



# ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

2013  
Т. 2, № 2

ISSN 2305-9052

СЕРИЯ

## «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

ПОСВЯЩАЕТСЯ  
70-ЛЕТИЮ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Учредитель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)

Основной целью издания является пропаганда научных исследований в следующих областях:

- Вычислительная математика и численные методы
- Математическое программирование
- Распознавание образов
- Вычислительные методы линейной алгебры
- Решение обратных и некорректно поставленных задач
- Доказательные вычисления
- Численное решение дифференциальных и интегральных уравнений
- Исследование операций
- Теория игр
- Теория аппроксимации
- Информатика
- Математическое и программное обеспечение высокопроизводительных вычислительных систем
- Системное программирование
- Распределенные вычисления, облачные и грид-технологии
- Технология программирования
- Машинная графика
- Интернет-технологии
- Системы электронного обучения
- Технологии обработки баз данных и знаний
- Интеллектуальный анализ данных

### Редакционная коллегия

**Л.Б. Соколинский**, д.ф.-м.н., проф., *отв. редактор*  
**В.П. Танана**, д.ф.-м.н., проф., *зам. отв. редактора*  
**М.Л. Цымблер**, к.ф.-м.н., доц., *отв. секретарь*  
**С.М. Абдуллаев**, д.г.н., проф.  
**А.В. Панюков**, д.ф.-м.н., проф.  
**К.С. Пан**, *техн. секретарь*

### Редакционный совет

**В.И. Бердышев**, д.ф.-м.н., акад. РАН, *председатель*  
**А. Андряк**, PhD, профессор (Германия)  
**В.В. Воеводин**, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
**М. Герц**, PhD, профессор (Германия)

**Дж. Донгарра**, PhD, профессор (США)  
**И.И. Ерёмин**, д.ф.-м.н., акад. РАН  
**А.Б. Куржанский**, д.ф.-м.н., акад. РАН  
**В.Г. Романов**, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
**Д. Маллманн**, PhD, профессор (Германия)  
**А.Н. Томилин**, д.ф.-м.н., профессор  
**В.Е. Третьяков**, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
**А.М. Федотов**, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
**В.И. Ухоботов**, д.ф.-м.н., профессор  
**В.Н. Ушаков**, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
**М.Ю. Хачай**, д.ф.-м.н., профессор  
**П. Шумяцки**, PhD, профессор (Бразилия)  
**Е. Ямазаки**, PhD, профессор (Бразилия)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

2013  
Vol. 2, no. 2

ISSN 2305-9052

---

SERIES

«COMPUTATIONAL MATHEMATICS  
AND SOFTWARE ENGINEERING»

---

South Ural State University

The main purpose of the series is publicity of scientific researches in the following areas:

- Numerical analysis and methods
- Mathematical optimization
- Pattern recognition
- Numerical methods of linear algebra
- Reverse and ill-posed problems solution
- Computer-assisted proofs
- Numerical solutions of differential and integral equations
- Operations research
- Game theory
- Approximation theory
- Computer science
- High performance computer software
- System programming
- Distributed, cloud and grid computing
- Programming technology
- Computer graphics
- Internet technologies
- E-learning
- Database and knowledge processing
- Data mining

#### Editorial Board

**L.B. Sokolinsky**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)  
**V.P. Tanana**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)  
**M.L. Zymbler**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)  
**S.M. Abdullaev**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)  
**A.V. Panyukov**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)  
**C.S. Pan**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

#### Editorial Council

**V.I. Berdyshev**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russian Federation)  
**A. Andrzejak**, Heidelberg University (Germany)  
**V.V. Voevodin**, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation)  
**M. Gertz**, Heidelberg University (Germany)  
**J. Dongarra**, University of Tennessee (USA)  
**I.I. Eremin**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russian Federation)  
**A.B. Kurzhansky**, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation)  
**V.G. Romanov**, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the RAS (Novosibirsk, Russian Federation)  
**D. Mallmann**, Julich Supercomputing Centre (Germany)  
**A.N. Tomilin**, Institute for System Programming of the RAS (Moscow, Russian Federation)  
**V.E. Tretyakov**, Ural Federal University (Yekaterinburg, Russian Federation)  
**A.M. Fedotov**, Institute of Computational Technologies, SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)  
**V.I. Ukhobotov**, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russian Federation)  
**V.N. Ushakov**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russian Federation)  
**M.Yu. Khachay**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russian Federation)  
**P. Shumyatsky**, University of Brasilia (Brazil)  
**Y. Yamazaki**, Federal University of Pelotas (Brazil)

## Содержание

|  |     |
|--|-----|
| СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ<br>А.С. Антонов, Вл.В. Воеводин, В.П. Гергель, Л.Б. Соколинский .....  | 5   |
| ПАКЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ HELMHOLTZ3D<br>Д.С. Бутюгин .....   | 18  |
| РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ АНАЛИЗА<br>ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ<br>А.В. Калачев, А.С. Карсаков, И.Б. Мееров, Я.А. Напыльникова, А.Ю. Овсяжно .....                       | 33  |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И СЕЙСМИЧЕСКОГО ПОЛЯ В<br>ИЕРАРХИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ<br>О.А. Хачай, А.Ю. Хачай .....   | 48  |
| МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЗМУЩЕНИЙ,<br>РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ИЗ ОЧАГА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ<br>В.И. Голубев, Н.И. Хохлов .....   | 56  |
| ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ<br>АТМОСФЕРЫ КРУПНОГО ПРОМЫШЛЕННОГО ГОРОДА (НА ПРИМЕРЕ<br>г. ЧЕЛЯБИНСКА)<br>О.Ю. Ленская, С.М. Абдуллаев, А.И. Приказчиков, Д.Н. Соболев ..... | 65  |
| ОБЗОР АЛГОРИТМОВ ЛОКАЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДЛЯ МОБИЛЬНЫХ<br>УСТРОЙСТВ<br>Р.М. Миниахметов, А.А. Рогов, М.Л. Цымблер .....  | 83  |
| <b>Краткие сообщения</b>   |     |
| МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ В<br>СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ<br>СОМРЕТЕНТУМ<br>О.Н. Иванова .....   | 97  |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА<br>В.И. Ухоботов, В.С. Величко .....   | 104 |
| ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОКРЫТИЯ С<br>УПОРЯДОЧЕННЫМ ОХВАТЫВАНИЕМ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ<br>Т.А. Панюкова, Е.А. Савицкий .....  | 111 |
| СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ<br>КОНКУРЕНТНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ПРЕДПРИЯТИЙ СОТОВОЙ СВЯЗИ<br>И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова, Е.П. Маас .....                                    | 118 |
| ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ .....   | 126 |

## Contents

|  |     |
|--|-----|
| A SYSTEMATIC APPROACH TO SUPERCOMPUTING EDUCATION<br>A.S. Antonov, Vl.V. Voevodin, V.P. Gergel, L.B. Sokolinsky .....  | 5   |
| PARALLEL APPLICATION PACKAGE HELMHOLTZ3D<br>D.S. Butyugin .....  | 18  |
| DEVELOPMENT OF SOFTWARE TOOL FOR THE ANALYSIS OF ENERGY EFFICIENCY<br>A.V. Kalachev, A.S. Karsakov, I.B. Meyerov, Y.A. Napylnikova, A.U. Ovshyno .....   | 33  |
| MODELING OF ELECTROMAGNETIC AND SEISMIC FIELDS IN HIERARCHIC<br>HETEROGENEOUS MEDIA<br>O.A. Hachay, A.Y. Khachay .....   | 48  |
| MATHEMATICAL MODELLING OF ELASTIC PERTURBATIONS PROPAGATING FROM<br>THE EARTHQUAKE HYPOCENTER<br>V.I. Golubev, N.I. Khokhlov .....   | 56  |
| MODELING STUDY OF AMOSPHERIC BOUNDARY LAYER CHARACTERISTICS IN<br>INDUSTRIAL CITY BY THE EXAMPLE OF CHELYABINSK<br>O.Yu. Lenskaia, S.M. Abdullaev, A.I. Prikazchikov, D.N. Sobolev .....                         | 65  |
| THE SURVEY OF INDOOR POSITIONING ALGORITHMS FOR MOBILE DEVICES<br>R.M. Miniakhmetov, A.A. Rogov, M.L. Zymbler .....  | 83  |
| <b>Brief Reports</b>   |     |
| METHODICAL RECOMMENDATIONS ON THE ORGANIZATION OF THE ESTIMATION<br>OF KNOWLEDGE IN E-LEARNING SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF THE<br>INSTRUMENTS OF COMPANY COMPETENTUM<br>O.N. Ivanova .....                         | 97  |
| SIMULATION OF THE 5-MEMBERED MECHANISM'S GIVEN MOVEMENT<br>V.I. Ukhobotov, V.S. Velichko .....   | 104 |
| THE SOFTWARE FOR CONSTRUCTING A GRAPH COVERING WITH ORDERED<br>ENCLOSING FOR MULTICONNECTED PLANAR GRAPHS<br>T.A. Panyukova, E.A. Savitskiy .....  | 111 |
| COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING PROBLEMS OF<br>OPTIMAL CONTROL THE BEHAVIOR OF ECONOMIC AGENTS IN THE CONDITIONS<br>OF COMPETITIVENESS<br>I.P. Bolodurina, T.A. Ogurtsova, E.P. Maas ..... | 118 |
| INFORMATION FROM EDITORIAL BOARD .....   | 126 |

## СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ<sup>1</sup>

*А.С. Антонов, Вл.В. Воеводин, В.П. Гергель, Л.Б. Соколинский*

Система суперкомпьютерного образования создается в рамках выполнения проекта Комиссии при Президенте РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России «Создание системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения». В данной статье дается краткая характеристика создаваемой Системы, рассматривается ее структура и основные компоненты. Главный акцент делается на системность реализуемого подхода, позволяющую заложить основу для внедрения суперкомпьютерного образования в практику образовательных учреждений России.

*Ключевые слова:* суперкомпьютерное образование, подготовка кадров, научно-образовательный центр.

### Введение

В 2010–2012 годах был реализован проект Комиссии при Президенте РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России «Создание системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения» («Суперкомпьютерное образование»). В рамках данного проекта впервые были предприняты усилия по созданию в России целостной системы суперкомпьютерного образования.

Стремительное внедрение суперкомпьютерных технологий в повседневную практику ставит принципиально новые задачи перед системой высшего образования. Требуется массовая подготовка не просто компьютерно-грамотных пользователей, а именно специалистов в области параллельных вычислений и суперкомпьютерных технологий. При реализации данного проекта основное внимание было уделено не столько подготовке определенного количества специалистов в данной области, сколько созданию целостной системы, способной в течение длительного времени готовить соответствующие кадры.

В данной статье системность реализуемого подхода будет продемонстрирована на различных областях реализации данного проекта:

- создание Системы научно-образовательных центров суперкомпьютерных технологий (Системы НОЦ СКТ), охватывающей всю территорию России;
- систематизация знаний в области суперкомпьютерных технологий;
- реализация системы обучения в области суперкомпьютерных технологий;
- система сертификации знаний в области суперкомпьютерных технологий;
- система проведения мероприятий в области суперкомпьютерных технологий;
- система издания учебной и учебно-методической литературы в области суперкомпьютерных технологий;
- система мероприятий по популяризации.

---

<sup>1</sup> Статья рекомендована к публикации программным комитетом Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии – 2013»

## 1. Система НОЦ СКТ

В результате выполнения проекта «Суперкомпьютерное образование» Комиссии при Президенте РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России к концу 2012 года реализована национальная Система научно-образовательных центров суперкомпьютерных технологий. В Систему НОЦ СКТ входят 8 региональных НОЦ, созданных в 7 федеральных округах России (рис. 1).



**Рис. 1.** География Системы научно-образовательных центров суперкомпьютерных технологий

Научно-образовательные центры, входящие в систему НОЦ СКТ, создаются на базе структурных подразделений учреждений высшего профессионального образования, входящих в Суперкомпьютерный консорциум университетов России, которые обладают значительным опытом выполнения научно-исследовательских работ и ведения образовательной деятельности в области СКТ.

Основными задачами Системы НОЦ СКТ являются:

- подготовка, переподготовка и повышение квалификации специалистов по приоритетным и перспективным направлениям суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения;
- повышение эффективности научных исследований;
- осуществление инновационной деятельности в научной и образовательной сферах совместно с организациями науки, промышленности и бизнеса.

Структура Системы НОЦ СКТ представлена на следующей схеме (рис. 2).

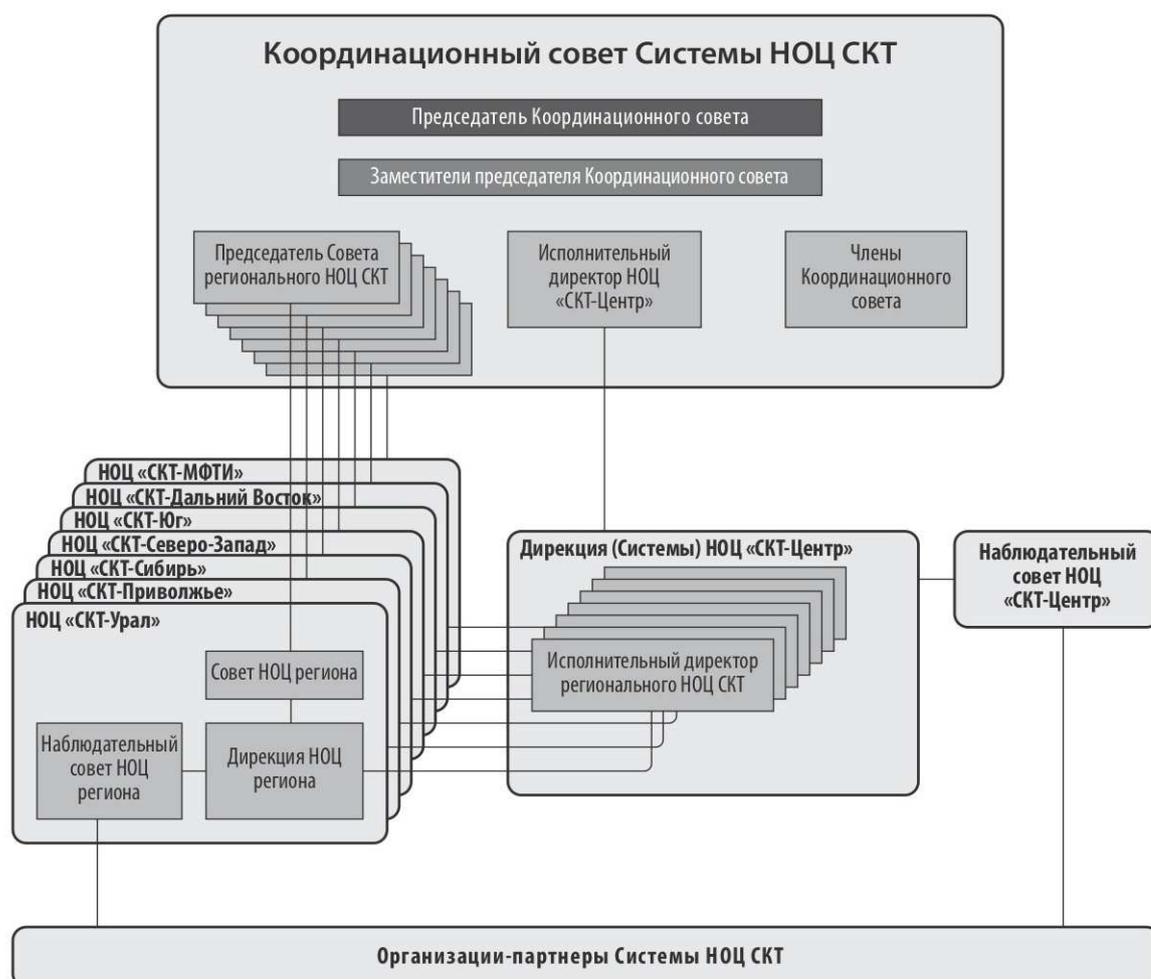


Рис. 2. Структура Системы НОЦ СКТ

Председателем Координационного совета Системы НОЦ СКТ является ректор МГУ имени М.В. Ломоносова академик В.А. Садовничий.

## 2. Систематизация знаний в области СКТ

Центральное место в разработке учебно-методического обеспечения системы подготовки, переподготовки и повышения квалификации кадров в области суперкомпьютерных технологий занимает разработка Свода знаний и умений в области СКТ. Это те компетенции, которыми должны обладать учащиеся после того, как закончат соответствующий факультет или курс, пройдут переподготовку или специализированное обучение в рамках спецгрупп. Именно Свод помогает понять, как должен строиться и на что должен опираться учебный процесс.

Главное в Своде — это описать предметную область «Суперкомпьютеры и параллельные вычисления», с тем, чтобы потом четко определиться, чему учить и как организовать учебный процесс для каждой конкретной целевой группы обучаемых.

Структура созданного Свода знаний согласована с рекомендациями международных профессиональных сообществ ACM и IEEE Computer Society.

Свод знаний, который должен быть освоен для успешной деятельности в рамках определенных отраслей науки, техники и бизнеса, определяется набором отдельных об-

ластей знаний, представляющих собой отдельные части изучаемой специальности. Далее, области делятся на меньшие структуры, называемые разделами, которые представляют собой отдельные тематические модули внутри области. Каждый раздел, в свою очередь, состоит из набора тем, представляющих собой нижний уровень этой иерархии в определяемой специальности. Каждая тема сопровождается указанием, является ли она обязательной или факультативной, а также рекомендуемым объемом учебного времени, необходимым для ее изучения.

Важно подчеркнуть, что подобная структура областей, разделов и тем определяет именно свод знаний, необходимый для освоения специальности, а не перечень учебных курсов. И именно этот свод знаний может служить основой для разработки учебных планов и определения необходимых учебных курсов.

Применение указанной методики (подготовка свода знаний, рекомендации по учебным планам и составу необходимых учебных курсов) для конкретной специальности или направления осуществляется специально формируемыми для этой цели рабочими группами экспертов и, как правило, такая деятельность занимает достаточно большой период времени.

Дополняет Свод знаний и умений в области СКТ комплекс созданных в рамках выполнения проекта учебных курсов. Комплекс учебных курсов покрывает основные направления развития суперкомпьютерных технологий и параллельных вычислений. При этом рассматриваются не только теоретические аспекты, но и практические вопросы использования параллельных и распределенных вычислительных технологий для решения задач в различных областях фундаментальных и прикладных исследований. Данные учебные курсы позволяют сформировать у обучаемого понятийный аппарат параллельного программирования, набор практических умений и навыков в области суперкомпьютерных технологий. Все учебные курсы прошли учебно-методическую экспертизу и получили заключение Учебно-методического совета по прикладной математике, информатике и информационным технологиям Учебно-методического объединения классических университетов.

### **3. Система обучения в области СКТ**

Одной из важнейших задач реализации проекта является подготовка специалистов, реализуемая сразу по нескольким направлениям.

В рамках проекта реализуются программы массовой подготовки специалистов начального уровня по суперкомпьютерным технологиям. Данное мероприятие охватило все федеральные округа Системы НОЦ СКТ и более 45 вузов России. Программы обучения в большинстве вузов были направлены на получение базовых знаний и освоение наиболее востребованных технологий параллельного программирования, что нужно для успешного вхождения в область СКТ.

Примеры учебных программ подготовки специалистов начального уровня по суперкомпьютерным технологиям:

- «Параллельное программирование и высокопроизводительные вычисления»;
- «Суперкомпьютерные технологии, параллельные вычисления и их приложения»;
- «Высокопроизводительные вычисления в прикладном численном моделировании»;
- «Основы применения параллельных вычислений на основе Windows2008 HPC, Visual Studio 2011 и Intel Parallel 2011»;

- «Многопоточные вычисления на основе технологий MPI и OpenMP»;
- «Многопоточные вычисления на основе технологий CUDA и OpenCL»;
- «Суперкомпьютерные технологии с использованием прикладных пакетов»;
- «Суперкомпьютерные технологии для гибридных кластерных систем»;
- «Параллельные алгоритмы в электродинамике».

За время выполнения проекта успешно реализованы программы переподготовки и повышения квалификации профессорско-преподавательского состава. Успешно прошли переподготовку и повышение квалификации преподаватели из более 40 вузов всех федеральных округов России.



Рис. 3. Группа повышения квалификации в НОЦ «СКТ-Центр»

Примеры программ переподготовки и повышения квалификации профессорско-преподавательского состава:

- «Суперкомпьютерные системы и приложения»;
- «Суперкомпьютерные технологии с использованием прикладных пакетов»;
- «Основы суперкомпьютерных технологий»;
- «Современные параллельные вычислительные технологии»;
- «Перспективные технологии распределенных вычислений»;
- «Параллельные вычислительные системы и технологии, используемые при разработке программ»;
- «Многопроцессорные вычислительные системы и параллельное программирование»;
- «Распараллеливание алгоритмов и программ».

Выполнено крайне сложное мероприятие проекта – целевая интенсивная подготовка в области суперкомпьютерных технологий в рамках специальных групп, ориентированная на глубокое изучение конкретных разделов суперкомпьютерных технологий. Обучение спецгрупп было организовано во всех федеральных округах Системы НОЦ СКТ.

В числе уже реализованных программ обучения:

- «Суперкомпьютерное моделирование: технологии, инструменты и приложения (основная и углубленная программа)»;
- «Технологии, используемые при организации высокопроизводительных вычислений»;

- «Решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела в высокопроизводительных системах»;
- «Виртуализация и построение виртуальных кластеров на базе Microsoft HyperV и VMWare ESXI, разработка многопоточных приложений для виртуальных кластеров»;
- «Распараллеливание алгоритмов и программ»;
- «Моделирование биологических систем на GPU»;
- «Суперкомпьютерные технологии для решения естественнонаучных задач».

Еще один вид обучения, реализованный в рамках выполнения проекта – это дистанционное образование. Проект Интернет-университета суперкомпьютерных технологий имеет уникальный характер. Отличительные особенности: привлечение ведущих специалистов страны для проведения занятий, реализация классической формы обучения на новой технологической основе, доступность обучения за счет использования сети Интернет. Все эти характеристики проекта позволяют обеспечить массовую и оперативную подготовку специалистов в области суперкомпьютерных технологий.

На базе Интернет-университета суперкомпьютерных технологий проводилось дистанционное обучение по следующим курсам:

- «Основы параллельных вычислений»;
- «Введение в параллельные алгоритмы»;
- «Параллельное программирование с OpenMP»;
- «Основы параллельного программирования с использованием MPI».

В рамках проекта «Суперкомпьютерное образование» начальную подготовку в области СКТ с использованием технологий дистанционного образования получили слушатели из более 100 городов России.

#### **4. Система сертификации знаний в области СКТ**

Система сертификации знаний в области СКТ разрабатывается для инженерно-технических, естественнонаучных и социально-гуманитарных направлений. Разработка системы сертификации знаний входит обязательным условием формирования национальной системы подготовки высококвалифицированных специалистов в области СКТ.

Сертификация призвана зафиксировать обладание человеком определенным уровнем знаний по конкретной предметной области. Предметной областью может быть как вся область суперкомпьютерных технологий, так и некоторая ее подобласть. Сертификация в некоторой области выполняется по трем уровням знаний: Introduction, Basic, Master (Начальный, Базовый, Мастер).

Сертификация знаний производится на основе обязательного выполнения человеком набора тестов в автоматизированном режиме с помощью электронной системы тестирования. Это условие необходимое, но для высших уровней знаний отдельных областей может потребоваться выполнение дополнительных заданий.

Набор тестов для каждого уровня знаний каждой области отражает все разделы Свода знаний по сертифицируемой области. Свод знаний по сертифицируемой области формируется в соответствии со Сводом знаний и умений по суперкомпьютерным технологиям, разработанным в рамках данного проекта, но не обязательно должен являться его подмножеством.

Для каждого уровня каждой области фиксируется процедура прохождения сертификации. Иногда на начальных уровнях возможна полностью автоматизированная сертификация, выполняемая через Интернет без какого-либо контроля над способом прохождения тестирования. В большинстве случаев при прохождении тестирования требуется обязательное присутствие преподавателя.

Процедура включения сертификации по некоторой конкретной области СКТ в общую систему сертификации предполагает выполнение следующих шагов.

1. Формирование Свода знаний по сертифицируемой области на основе общего Свода знаний и умений по суперкомпьютерным технологиям.
2. Выделение сертифицируемых уровней знаний.
3. Указание в Своде знаний сертифицируемой области разделов, необходимых для каждого выделенного уровня знаний.
4. Формирование наборов тестов для каждого выделенного уровня знаний для организации электронного тестирования.
5. Описание процедуры прохождения сертификации для каждого уровня.
6. Утверждение Консорциумом Свода знаний по сертифицируемой области, уровней знаний и процедуры прохождения сертификации. В случае положительного решения со стороны Консорциума, на выдаваемом сертификате размещается логотип Консорциума, ставится подпись от Консорциума, каждый сертификат получает уникальный номер, сохраняемый в базе Консорциума.

В июле 2012 года в рамках проведения в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова международной Летней Суперкомпьютерной Академии система сертификации знаний была опробована при проведении сертификация базового уровня знаний по параллельным вычислениям и суперкомпьютерным технологиям. В результате проведения тестирования группа выпускников Академии получила первые официальные сертификаты.

С 2011 г. реализуется похожая программа сертификации по параллельному программированию при активном использовании программных инструментов компании Интел.

## 5. Система проведения мероприятий

В последние годы сформировалась система основных национальных суперкомпьютерных конференций:

- Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ)», организаторы – Российская академия наук, Суперкомпьютерный консорциум университетов России (<http://agora.guru.ru/pavt>).
- Международные суперкомпьютерные конференции серии «Научный сервис в сети Интернет», организаторы – Российская академия наук, Суперкомпьютерный консорциум университетов России (<http://agora.guru.ru/abrau>).
- Суперкомпьютерный форум «Суперкомпьютерные технологии в образовании, науке и промышленности», учредитель – Суперкомпьютерный консорциум университетов России (<http://agora.guru.ru/hpcNN>).
- Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям (<http://ssspc.math.tsu.ru>).

Система молодежных суперкомпьютерных школ в России состоит из серии мероприятий, организованных Суперкомпьютерным консорциумом университетов России на базе ведущих вузов:

- Северного (Арктического) федерального университета (февраль);
- Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (апрель);
- Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (июнь – июль);
- Московского физико-технического института (август);
- Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского (ноябрь);
- Томского государственного университета (декабрь).

## 6. Система издания учебной и учебно-методической литературы

Успешно реализуется комплексная программа по разработке и экспертизе учебной и учебно-методической литературы в области суперкомпьютерных технологий для бакалавриата и магистратуры. В формируемую в рамках проекта серию «Суперкомпьютерное образование» входят монографии, учебники и учебные пособия, написанные ведущими российскими и зарубежными специалистами по основным разделам Свода знаний в области суперкомпьютерных технологий. Всего в серии – более 25 книг российских и зарубежных авторов.

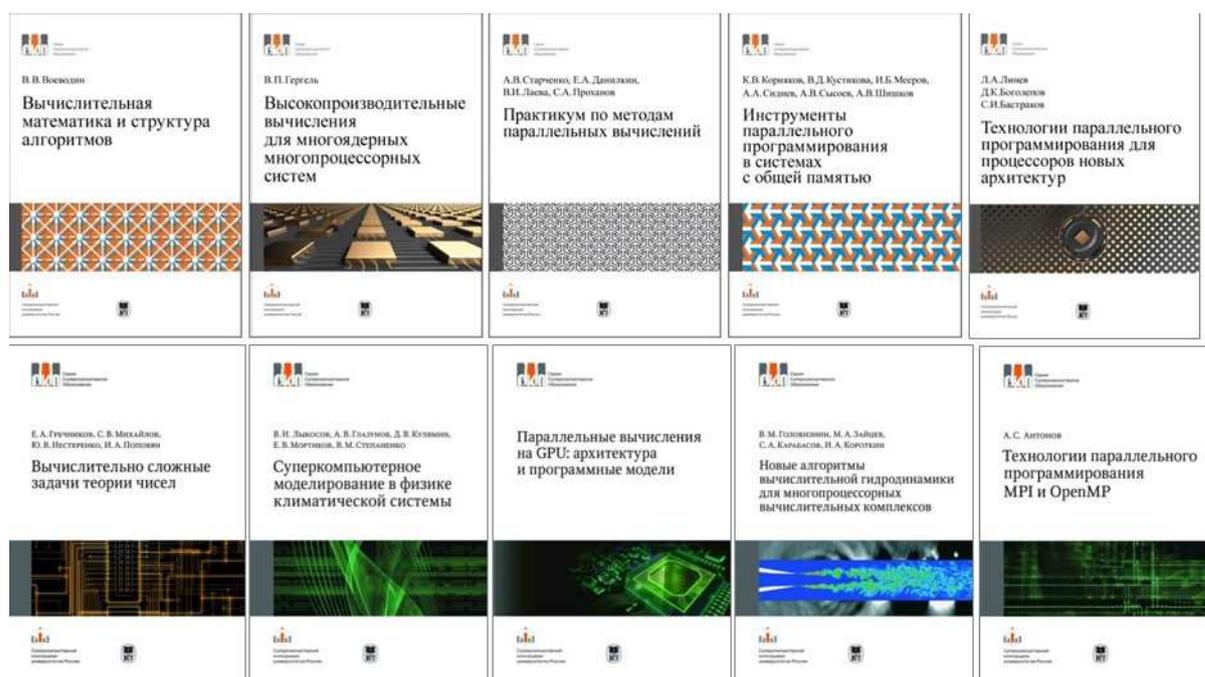


Рис. 4. Обложки книг серии «Суперкомпьютерное образование»

От 10 до 50 экземпляров каждой книги серии «Суперкомпьютерное образование» бесплатно передается в 43 университета России. Всего за время проекта в российские университеты передается 37500 книг данной серии.

## 7. Система мероприятий по популяризации области СКТ

Разработана и реализована система мероприятий по популяризации достижений и перспектив использования суперкомпьютерных технологий с привлечением СМИ: выступления с лекциями в проекте «Академия» на телеканале «Культура», публикации в профильных Интернет-изданиях, на сайте Комиссии при Президенте РФ ([i-russia.ru](http://i-russia.ru)), серии публикаций в центральных и региональных СМИ, участие в работе конференций, фестивалей, выставок, организация экскурсий школьников в суперкомпьютерные центры и многое другое.

Результаты проекта постоянно отображаются на страницах Интернет-центра (<http://hpc-education.ru>). В разделах центра можно познакомиться со Сводом знаний и умений в области суперкомпьютерных технологий и принять участие в работе над его созданием. Здесь представлена деятельность Научно-образовательных центров в области СКТ, созданных в федеральных округах России, новые учебные курсы и программы, разработанные с учетом рекомендаций Свода знаний и умений и международного опыта, существующая и разрабатываемая нормативная база в области СКТ, в частности, рекомендации по расширению ФГОС, а также информация о международных, федеральных, региональных учебно-научных мероприятиях и событиях. Вся информация, размещаемая на страницах этого ресурса, проходит строгую экспертную оценку.

Деятельность Интернет-центра наглядно демонстрирует тот вклад, который внесли участники Суперкомпьютерного консорциума университетов России в создание национальной системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий, а также их четкое понимание ответственности за подготовку высококвалифицированных специалистов и формирование прочного научного фундамента, столь необходимого для эффективного использования суперкомпьютерных технологий на практике.

## 8. Развитие системы суперкомпьютерного образования

В рамках проекта Комиссии при Президенте РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России «Создание системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения» создана основа функционирования системы суперкомпьютерного образования в России. Однако эта система требует дальнейшего развития и совершенствования.

Дальнейшей целью должно быть обеспечение устойчивого развития национальной системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения на основе развития инфраструктуры НОЦ СКТ, расширения спектра образовательных программ с учетом потребностей инновационной экономики и решения задач по приоритетным направлениям развития науки, техники и технологий, совершенствования учебных планов и программ подготовки, переподготовки и повышения квалификации специалистов.

Предполагается создание специализированного математического и программного обеспечения для реализации услуг в области распределенных и облачных вычислений, применения дистанционных технологий в организации совместной образовательной деятельности НОЦ СКТ, самостоятельной работы студентов и слушателей, обучающихся

по образовательным программам в области СКТ, организации дополнительного образования учащихся старших классов на базе специализированных школ для одаренных детей при вузах.

Подготовка преподавателей вузов, реализующих образовательные программы по направлениям инженерного, естественнонаучного и социально-гуманитарного образования, является необходимым элементом развития системы суперкомпьютерного образования. Должны быть разработаны предложения по модификации (обновлению) существующих и разработке новых учебных курсов и программ в области СКТ для укрупненной группы специальностей и направлений подготовки по социально-гуманитарным направлениям, включая: экономические, гуманитарные и социальные направления подготовки магистров.

Для кадрового обеспечения социально-экономического развития регионов России на основе модифицированных учебных планов и программ в соответствии с разработанной системой сертификации знаний будут реализованы образовательные программы подготовки специалистов начального уровня и целевой интенсивной подготовки в области СКТ.

Важными направлениями развития проекта являются расширение спектра образовательных программ в области инженерного образования, приоритетных направлений науки, техники и технологий и образовательных программ с учетом потребностей высокотехнологичных отраслей экономики России. Должны быть разработаны предложения по расширению федеральных государственных образовательных стандартов третьего поколения для специальностей, отвечающих приоритетным направлениям развития науки, техники и технологий, включая: «Индустрия наносистем», «Науки о жизни», «Рациональное природопользование», «Транспортные и космические системы», «Энергоэффективность, энергосбережение, ядерная энергетика». Должны быть разработаны предложения и рекомендации по модификации (обновлению) учебных планов и программ переподготовки и повышения квалификации в области СКТ для системы инженерного образования по направлениям «Авиационная и ракетно-космическая техника», «Металлургия, машиностроение и материалобработка», «Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника».

Учебно-методическое обеспечение образовательных программ является важным фактором повышения качества учебного процесса и в целом качества образования специалиста. Планируется разработка новых учебных пособий и учебников по СКТ для выбранных направлений подготовки специалистов в области инженерного образования, социально-гуманитарного образования, естественнонаучного образования.

Привлечение зарубежных ученых и научно-образовательных центров является важным фактором повышения качества суперкомпьютерного образования в России. Развитие международного сотрудничества в области суперкомпьютерного образования (СКО) предполагается по направлениям: разработка совместных с зарубежными университетами образовательных программ в области СКТ; разработка и реализация программ академического обмена с ведущими зарубежными научно-образовательными центрами для студентов, аспирантов и молодых ученых. В рамках этого сотрудничества будут публиковаться альманахи «Суперкомпьютерное образование в мире». Планируется привлечение зарубежных специалистов для формирования международной системы сертификации знаний в области СКТ.

Одним из ключевых факторов успешной реализации проекта является информационная и просветительская деятельность. Популяризация научных знаний и достижений науки и техники в области СКТ являются основными механизмами формирования общественного мнения и положительного имиджа СКТ в обществе, воспитания научного мировоззрения молодежи и привлечения ее в науку. С этой целью предусматривается создание системы информационного сопровождения проекта с привлечением печатных и электронных СМИ и коллективных научных мероприятий. На базе НОЦ СКТ планируется создание специализированных школ по СКТ при вузах для одаренных детей, реализация программ дополнительного образования детей и создание системы интеллектуальных конкурсов студентов в области СКТ

Для выполнения поставленных в проекте задач может быть задействован уникальный потенциал профессорско-преподавательского состава и ученых университетов-членов Суперкомпьютерного консорциума университетов России, а также университетов и научных центров, входящих в состав Системы НОЦ СКТ.

## Заключение

Реализация системы суперкомпьютерного образования в рамках выполнения проекта Комиссии при Президенте РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России «Создание системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения» позволяет рассчитывать на постоянный приток высококвалифицированных специалистов, обладающих необходимыми знаниями и навыками для внедрения передовой суперкомпьютерной техники в самые разные отрасли экономики.

Усилия, предпринятые в рамках данного проекта, были высоко оценены как в России, так и в мире. Так, в 2011 году объединенная команда МГУ имени М.В. Ломоносова и ННГУ имени Н.И. Лобачевского победила в международном конкурсе по разработке учебных материалов по параллельному программированию «Informatics Europe Curriculum Best Practices Award». Также большое внимание было уделено презентациям проекта на стендах российских участников ведущих международных суперкомпьютерных конференций International Supercomputing Conference и Supercomputing.

## Литература

1. Развитие системы суперкомпьютерного образования в России: текущие результаты и перспективы / Вл.В. Воеводин, В.П. Гергель, Л.Б. Соколинский и др. // Вестник Нижегородского университета. — 2012. — № 4. — С. 203–209.
2. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 608 с.
3. Гергель, В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем / В.П. Гергель — М.: Издательство Московского университета, 2010. — 544 с.
4. Воеводин, Вл.В. Суперкомпьютерное образование: третья составляющая суперкомпьютерных технологий / Вл.В. Воеводин, В.П. Гергель // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2010. — Т. 11, № 2. — С. 117–122.

5. Антонов, А.С. Проект «Суперкомпьютерное образование»: 2012 год / И.Л. Артемьева, А.В. Бухановский // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений: Труды Всероссийской научной конференции (17–22 сентября 2012 г., г. Новороссийск). — М.: Изд-во МГУ, 2012. — С. 4–8.

Антонов Александр Сергеевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия), asa@parallel.ru

Воеводин Владимир Валентинович, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, профессор, зам. Директора Научно-исследовательского вычислительного центра, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия), voevodin@parallel.ru

Гергель Виктор Павлович, д.т.н., профессор, декан факультета вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия), gergel@unn.ru

Соколинский Леонид Борисович, д.ф.-м.н., профессор, декан факультета Вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Россия), sokolinsky@acm.org

---

## A SYSTEMATIC APPROACH TO SUPERCOMPUTING EDUCATION

**A.S. Antonov**, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation),

**Vl.V. Voevodin**, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation),

**V.P. Gergel**, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (Nizhni Novgorod, Russian Federation)

**L.B. Sokolinsky**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

A System of supercomputing education is created under the Russian Federation Presidential Commission Project on the modernization and technological development of Russian economy “Supercomputing Education.” This article provides a brief description of created System, reviews its structure and main components. The main focus is made on the systematic approach allowing to lay the foundation for the implementation of supercomputing education in a practice of educational institutions in Russia.

*Keywords: Supercomputing Education, Specialist Training, Research and Education Center.*

## References

1. Voevodin Vl.V., Gergel V.P., Sokolinsky L.B., Demkin V.P., Popova N.N., Boukhanovsky A.V. Razvitie sistemy supercompjuternogo obrazovaniya v Rossii: tekuschie rezultaty i perspektivy [Development of Supercomputing Education System in Russia: Current Results and Prospects] // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod], 2012. No. 4. P. 203–209.
2. Voevodin V.V., Voevodin Vl.V. Parallelnye vychisleniya [The Parallel Computing]. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2002. 608 p.

3. Gergel V.P. Vysokoproizvoditelnye vychisleniya dlya mnogoprocessornyh mnogoyadernyh sistem [High-performance Computing for Multiprocessor Multicore Systems]. Moscow: Publishing of the Moscow State University, 2010. 544 p.
4. Voevodin Vl.V., Gergel V.P. Supercompjuternoe obrazovanie: tretya sostavlyayuschaya supercomputernyh technologij [Supercomputing Education: the Third Pillar of HPC] // Numerical Methods and Programming: Advanced Computing. - Moscow: Research Computing Center of Moscow State University, 2010. Vol. 11. No. 2. P. 117–122.
5. Antonov A.S., Artemieva I.L., Boukhanovsky A.V., Voevodin Vl.V., Gergel V.P., Demkin V.P., Konkov K.A, Krukier L.A., Popova N.N., Sokolinsky L.B., Sukhinov A.I. Project «Supercomputernoe obrazovanie»: 2012 god [«Supercomputing Education» project: Year 2012] // Nauchnyj servis v seti Internet: poisk novyh reshenij: Trudy Vserossijskoj nauchnoj konferentsii (17–22 sentyabrya 2012 g., Novorossiysk) [Scientific Services and Internet: looking for new solutions: Proceedings of the National Scientific Conference (17–22 september, 2012, Novorossiysk)]. Moscow: Publishing of the Moscow State University, 2012. P. 4–8.

*Поступила в редакцию 15 февраля 2013 г.*

## ПАКЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ HELMHOLTZ3D<sup>1</sup>

*Д.С. Бутюгин*

В работе представлен пакет параллельных прикладных программ Helmholtz3D, который позволяет проводить расчеты трехмерных электромагнитных полей с гармонической зависимостью от времени, распространяющиеся в трехмерных областях со сложной геометрией. Для решения возникающих в результате аппроксимаций систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными плохообусловленными неэрмитовыми матрицами используются современные итерационные методы решения СЛАУ в подпространствах Крылова совместно с оригинальными параллельными предобуславливателями. Апробация пакета проведена на серии методических и практических задач расчета электромагнитных полей для волновых устройств и задач электромагнитного каротажа.

*Ключевые слова:* Уравнения Максвелла, метод конечных элементов, итерационные алгоритмы, параллельные алгоритмы.

### Введение

В настоящее время существует ряд коммерческих и открытых пакетов, позволяющих проводить расчеты гармонических электромагнитных полей. К ним относятся как пакеты, ориентированные на решение именно задач электромагнетизма, например ANSYS HFSS и CST Microwave Studio, так и пакеты общего назначения для решения различных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных (Partial Differential Equations, PDE), к которым можно отнести, например, пакет FEniCS. Однако использование таких пакетов может быть сопряжено с определенными сложностями. Во-первых, отсутствие подходящего вычислительного инструментария в продукте может привести к невозможности адекватно описать модель и вычислить электромагнитные поля в расчетной области. Во-вторых, закрытый характер коммерческих программных продуктов может затруднить интеграцию с уже существующими у пользователей программными комплексами. В третьих, далеко не всегда имеется поддержка вычислений на удаленных вычислительных системах, имеющих в распоряжении институтов и коммерческих компаний. И наконец, не стоит сбрасывать со счетов высокую стоимость лицензии, которая может достигать десятков тысяч долларов в год. В открытых же пакетах, зачастую, реализованы не слишком эффективные алгоритмы, а имеющаяся по ним документация ограничена. В связи с этим, актуальной является разработка пакетов, основанных на самых современных достижениях в области конечно-элементного моделирования электромагнитных полей и поддерживающих расчеты на параллельных системах с общей и распределенной памятью с тысячами и десятками тысяч вычислительных узлов.

В работе предлагается пакет параллельных прикладных программ Helmholtz3D. Данный пакет позволяет проводить расчеты трехмерных электромагнитных полей с гармонической зависимостью от времени, распространяющиеся в трехмерных областях со сложной геометрией. Цель разработки пакета — создание средства решения задач трехмерного электромагнетизма, основанного на самых современных достижениях в этой области. Ключевыми особенностями данного проекта являются следующие. Решается комплексное векторное

<sup>1</sup>Статья рекомендована к публикации программным комитетом Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии – 2013»

уравнение Гельмгольца (2), полученное непосредственно из уравнений Максвелла без использования приближений. Это позволяет использовать полученные алгоритмы при расчете широкого спектра моделей при различных физических параметрах, в частности, рассчитывать электромагнитные поля в широком спектре частот. Использование различных вариационных формулировок задачи позволяет выбирать оптимальный алгоритм для проведения вычислений в зависимости от физических параметров задачи и дает возможность получить физически корректную картину распределения электромагнитных полей. Применение символьных вычислений и техник оптимизации выражений и автогенерации кода для построения конечно-элементных (МКЭ) аппроксимаций высоких порядков (вплоть до  $O(h^4)$ ) упрощает сопровождение кода и существенно снижает вероятность появления ошибок в сложных выражениях для вычисления матриц СЛАУ.

Для решения возникающих в результате аппроксимаций систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными плохообусловленными неэрмитовыми матрицами используются современные итерационные методы решения СЛАУ в подпространствах Крылова совместно с оригинальными параллельными предобуславливателями. Предобуславливатели используют методы аддитивного Шварца и экономичной геометрической декомпозиции области, а также алгебраические мультисеточные методы на основе иерархических базисов, в том числе методы алгебраической грубосеточной коррекции. Применение таких алгоритмов позволяет добиться высокого уровня производительности решателей на системах с общей и распределенной памятью и хорошей масштабируемости на сотнях вычислительных узлов. Алгоритмы пакета были апробированы на серии методических и практических задач расчета электромагнитных полей для волновых устройств и задач электромагнитного каротажа, продемонстрировав высокую эффективность, в частности, решение получаемых СЛАУ с сотнями миллионов неизвестных может занимать около 10-15 минут. Высокая точность полученных конечно-элементных решений была показана путем сравнения с имеющимися аналитическими решениями либо результатами расчетов других групп (в том числе и полученных другими методами).

Структура данной работы следующая. В первом разделе приводится описание математической постановки решаемых пакетом Helmholtz3D задач. В разделе 2 приводится описание архитектуры программного комплекса. Раздел 3 содержит описание особенностей используемых технологий параллельного программирования. В разделе 4 представлены результаты численных экспериментов с использованием предлагаемого пакета. В заключении обсуждаются результаты работы.

## 1. Математическая постановка задачи

Пусть векторы напряженности электрического и магнитного полей имеют вид  $\Re(\vec{E}_a e^{-i\omega t})$ ,  $\Re(\vec{H}_a e^{-i\omega t})$ , где  $t$  — время,  $\omega$  — круговая частота,  $i$  — мнимая единица,  $\Re(x)$  — действительная часть  $x$ , а  $\vec{E}_a$  и  $\vec{H}_a$  — зависящие только от пространственных координат комплексные амплитуды. Тогда система уравнений Максвелла, описывающая электромагнитные поля с гармонической зависимостью от времени, при отсутствии сторонних электрических объемных зарядов и магнитной проводимости, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_a &= i\omega\mu\vec{H}_a, & \nabla \cdot (\epsilon_r \vec{E}_a) &= 0, \\ \nabla \times \vec{H}_a &= -i\omega\epsilon \vec{E}_a + \vec{J}, & \nabla \cdot (\mu_r \vec{H}_a) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{J}$  — амплитуда внешних гармонических токов,  $\dot{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon_r + i\sigma_e/\omega$ ,  $\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}/\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0 \mu_r$ ,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума,  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  — относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а  $\sigma_e$  — электрическая проводимость.

Мы полагаем, что физические параметры сред не зависят от полей  $\vec{E}_a$  и  $\vec{H}_a$ . Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) после исключения вектора  $\vec{H}_a$  сводится к уравнению Гельмгольца

$$\nabla \times \left( \mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}_a \right) - k_0^2 \dot{\epsilon}_r \vec{E}_a = ik_0 Z_0 \vec{J}, \quad (2)$$

где  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c > 0$ ,  $c$  — скорость света,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \mu_0 c$ .

Решение рассматриваемых уравнений будем искать в ограниченной односвязной области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$ , на каждой из частей которой поставлено одно из граничных условий:

$$\vec{n} \times \vec{E}_a \Big|_{\Gamma} = \vec{n} \times \vec{E}_0, \quad \vec{n} \times \vec{H}_a \Big|_{\Sigma} = \vec{n} \times \vec{H}_0, \quad (3)$$

где  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к границе, а  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  — заданные функции координат.

Будем полагать, что расчетная область  $\Omega$  состоит из  $m$  непересекающихся подобластей  $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \bar{\Omega}_k$ , в каждой из которых физические параметры сред  $\epsilon_r, \mu_r$  и  $\sigma_e$  являются достаточно гладкими. Полагаем, что внутренние границы их раздела  $\Gamma_{k,k'} = \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_{k'}$  являются липшицевыми и, соответственно, на них почти всюду определена нормаль  $\vec{n}_{k,k'}$ , направленная из  $\Omega_k$  в  $\Omega_{k'}$ . Выполняются условия сопряжения

$$\begin{aligned} \vec{n}_{k,k'} \cdot (\dot{\epsilon}_k \vec{E}_{a,k} - \dot{\epsilon}_{k'} \vec{E}_{a,k'}) &= 0, & \vec{n}_{k,k'} \times (\vec{E}_{a,k} - \vec{E}_{a,k'}) &= \vec{0}, \\ \vec{n}_{k,k'} \cdot (\mu_k \vec{H}_{a,k} - \mu_{k'} \vec{H}_{a,k'}) &= 0, & \vec{n}_{k,k'} \times (\vec{H}_{a,k} - \vec{H}_{a,k'}) &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагаем, что  $k_0^2$  не является максвелловским собственным числом ( $\omega$  не является резонансной частотой), т.е. краевая задача (2)–(4) при  $\vec{E}_0 = 0, \vec{H}_0 = 0$  и  $\vec{J} = 0$  имеет только нулевое решение.

Вводятся стандартные соболевские пространства:

$$\begin{aligned} H^1 &= \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \nabla \varphi \in [L^2(\Omega)]^3 \right\}, & H^{\text{rot}} &= \left\{ \vec{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \vec{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\}, \\ H_0^{\text{rot}} &= \left\{ \vec{\psi} \in H^{\text{rot}} : \vec{n} \times \vec{\psi} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Мы полагаем, что существует  $\vec{E}_{\Gamma} \in H^{\text{rot}}$  такая, что  $\vec{n} \times \vec{E}_{\Gamma} \Big|_{\Gamma} = \vec{n} \times \vec{E}_0$ . Введем билинейные формы  $s, m : H^{\text{rot}} \times H^{\text{rot}} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$s(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \mu_r^{-1} (\nabla \times \vec{u}) \cdot (\nabla \times \vec{v}) \, d\Omega, \quad m(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_r (\vec{u} \cdot \vec{v}) \, d\Omega,$$

и линейный функционал  $L : H^{\text{rot}} \rightarrow \mathbb{C}$

$$L(\vec{v}) = k_0^2 m(\vec{E}_{\Gamma}, \vec{v}) - s(\vec{E}_{\Gamma}, \vec{v}) - ik_0 Z_0 \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{v} \, d\Omega - ik_0 Z_0 \int_{\Sigma} \vec{H}_0 \cdot (\vec{n} \times \vec{v}) \, d\Omega.$$

*Вариационная формулировка* уравнения (2) с краевыми условиями (3) в форме Галеркина имеет следующий вид (см. [1, 2]): найти такое  $\vec{E} \in H_0^{\text{rot}}$ , что для всех  $\vec{\psi} \in H_0^{\text{rot}}$  выполнено

$$s(\vec{E}, \vec{\psi}) - k_0^2 m(\vec{E}, \vec{\psi}) = L(\vec{\psi}), \quad (5)$$

при этом исходное решение  $\vec{E}_a$  восстанавливается как  $\vec{E}_a = \vec{E} + \vec{E}_\Gamma$ .

Рассмотрим теперь дискретный аналог вариационной задачи. Для простоты мы рассматриваем только тетраэдральные неструктурированные сетки. Пусть построено соответствующее разбиение расчетной области  $\Omega$  на непересекающиеся тетраэдральные элементы  $\Omega = \bigcup \Omega_T$ . В каждом из тетраэдров вводятся базисные функции, соответствующие его степеням свободы. Пусть  $\mathcal{W}_l$  — конечномерное пространство базисных функций порядка не выше  $l$ , конформное  $H^{\text{rot}}$ . В работе рассматриваются иерархические базисные функции, предложенные в [3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_l &= \tilde{\mathcal{W}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{W}}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{W}}_l, \\ \tilde{\mathcal{W}}_1 &= \tilde{\mathcal{A}}_1, \quad \tilde{\mathcal{W}}_i = \tilde{\mathcal{A}}_i \oplus \nabla \tilde{\mathcal{V}}_i, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathcal{W}}_i$  — инкрементальное подпространство с базисными функциями порядка  $i$ , при этом  $\tilde{\mathcal{V}}_i$  — инкрементальное подпространство со скалярными базисными функциями, конформными  $H^1$ , а  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  — инкрементальное подпространство с роторными базисными функциями. Подпространства  $\mathcal{V}_{l,0}$  и  $\mathcal{W}_{l,0}$  вводятся естественным образом.

Приближенное решение  $\vec{E}^h$  будем искать в виде

$$\vec{E}^h = \sum_i u_i \vec{\psi}_i^0.$$

Конечно-элементарная функция  $\vec{E}_\Gamma^h$  строится таким образом, что коэффициенты разложения по базисным функциям с ненулевым следом на  $\Gamma$  принимают фиксированные значения, соответствующие первому краевому условию в (3), а остальные равны нулю.

Вводятся матрицы соответствующих билинейных форм и вектор правой части:

$$M_{i,j} = m(\vec{\psi}_j^0, \vec{\psi}_i^0), \quad S_{i,j} = s(\vec{\psi}_j^0, \vec{\psi}_i^0), \quad f_i = L(\vec{\psi}_i^0), \quad (6)$$

где базисные функции  $\vec{\psi}_i^0, \vec{\psi}_j^0 \in \mathcal{W}_{l,0}$ . Тогда итоговая система принимает вид

$$[S - k_0^2 M] u = f. \quad (7)$$

Для вычисления элементов матрицы и вектора правой части можно воспользоваться поэлементной технологией сборки [4], заменив интегрирование по расчетной области  $\Omega$  суммой интегралов по каждому из тетраэдров и вычислением в каждом из тетраэдров локальных матриц и векторов.

## 2. Методология построения пакета параллельных прикладных программ Helmholtz3D

Задача моделирования гармонических электромагнитных полей может быть разбита на следующие функциональные этапы:

- 1) геометрическое и функциональное моделирование расчетной области;
- 2) генерация сетки в расчетной области;
- 3) построение МКЭ аппроксимации и генерация СЛАУ;
- 4) решение СЛАУ с разреженными матрицами высоких порядков;
- 5) постобработка решения и его визуализация.

Пакет Helmholtz3D ориентирован на решение этапов 2–5. Геометрическое и функциональное моделирование могут быть осуществлены средствами CAD-систем. Для этого пакет предоставляет возможность импорта сеток из сторонних пакетов за счет использования подходящих конвертеров.

В соответствии с функциональным назначением пакета была разработана его архитектура. Схематично она представлена на рис. 1.



Рис. 1. Архитектура пакета Helmholtz3D

В качестве языка реализации был выбран C++. Использование шаблонов (templates) в сочетании с объектно-ориентированным подходом позволяет писать максимально обобщенные коды, не теряющие скорость работы при использовании современных компиляторов. В качестве компилятора использовался GCC 4.4.1. Для упрощения разработки аппроксиматора и алгебраических решателей использовалась C++ библиотека линейной алгебры Eigen версии 3.0.1 [5]. В качестве основных достоинств библиотеки можно привести следующие: универсальность, высокая скорость работы за счет явной векторизации и оптимизации выражений, простота и выразительность пользовательского программного интерфейса (API), а также распространение под лицензией MPL. Помимо Eigen, использовалась высокопроизводительная библиотека Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL [6]). Из данной библиотеки использовался прямой решатель PARDISO для разреженных СЛАУ.

## 2.1. Генерация сеток

Задача генерации сеток является очень важной, так как сама сетка оказывает большое влияние на точность полученного решения. Такие сетки должны иметь адаптивные сгущения как вблизи мелких геометрических объектов расчетной области, так и вблизи особенностей решения, вызванными наличием высоко-контрастных сред. Данной проблеме посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов, однако эта проблема выходит за рамки текущей работы. Поэтому в пакете Helmholtz3D был разработан простейший генератор сеток, имеющий возможность построения квазиструктурированных сеток в областях, составленных из параллелепипедов. Однако для того, чтобы пользователи имели возможность использования качественных адаптивных сеток, был реализован их импорт из формата пакета NETGEN [7].

## 2.2. Декомпозиция расчетной области

Для решения задачи на системах с распределенной памятью требуется распределить данные между узлами системы, по возможности минимизируя объем коммуникационных данных. Основной проблемой здесь является то, что алгоритмы, генерирующие разбиения высокого качества, сами требуют больших вычислительных ресурсов. Поэтому, как правило, приходится идти на компромисс и выбирать алгоритмы, позволяющие получить достаточно хорошее разбиение за приемлемое время.

В данной работе предлагается геометрический подход к декомпозиции области (см. подробнее [8]), заключающийся в декомпозиции сетки расчетной области при помощи построения упрощенного BSP-дерева [9]. Упрощение состоит в том, что секущие плоскости предлагается проводить ортогонально осям координат. Алгоритм рекурсивно разделяет имеющееся множество тетраэдров на две приблизительно равные части, минимизируя при этом количество тетраэдров, принадлежащих обоим подобластям. При эффективной реализации и использовании достаточно регулярных сеток можно добиться алгоритмической сложности метода  $O(N_T \log N_T)$ , где  $N_T$  — количество тетраэдров сетки.

## 2.3. Построение аппроксимаций вариационных постановок задач

Дискретизация вариационной постановки задачи приводит к задаче (6)–(7). Как уже было отмечено, построение СЛАУ такого вида может быть проведено на основе элементной технологии с вычислением локальных матриц и векторов. Дополнительный плюс такого подхода заключается в том, что части распределенной СЛАУ могут генерироваться непосредственно на тех узлах системы, на которых они в дальнейшем будут нужны. Это позволяет избавиться от необходимости хранить глобальную СЛАУ на каком-либо из узлов, что снимает ограничения на размер решаемых систем.

Базисные функции пространств  $\mathcal{W}_l$  могут быть выписаны с использованием кусочно-линейных функций  $\xi_i(\vec{r})$  координат, равных единице в одной из вершин сетке и нулю — в остальных [3]. Далее, несложно заметить, что функции  $\vec{\psi}_i^0$  и  $\nabla \times \vec{\psi}_i^0$  могут быть приведены к следующему каноническому виду:

$$\sum_j c_j \xi_1^{p_{j,1}} \xi_2^{p_{j,2}} \xi_3^{p_{j,3}} \xi_4^{p_{j,4}} \vec{F}_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \quad (8)$$

где  $c_j$  — некоторая константа,  $\xi_1, \dots, \xi_4$  — четыре не равных нулю функций  $\xi_i$  в данном тетраэдре,  $p_{j,k}$  — целочисленные степени,  $\vec{F}_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  — константная вектор-функция, не зависящая от координат. Тогда интегралы для вычисления коэффициентов матриц  $S$  и  $M$  в каждом из тетраэдров могут быть приведены к виду

$$\sum_j \sum_k c_j c_k \left( \vec{F}_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \cdot \vec{F}_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \right) \int_{\Omega_T} \xi_{i_1}^{p_1} \xi_{i_2}^{p_2} \dots \xi_{i_{j+k}}^{p_{j+k}} d\Omega, \quad (9)$$

Такие интегралы могут быть вычислены аналитически [1]. Для автоматизации процесса генерации локальных матриц по формуле (9) был реализован модуль, по заданному описанию базисных функций генерирующий выражения для вычисления элементов матриц и проводящий символьные оптимизации получаемых выражений. Схема программы представлена на рис. 2.

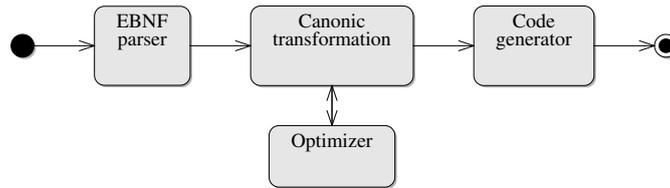


Рис. 2. Схема работы генератора выражений

Правила описания базисных функций задают некоторую формальную грамматику и могут быть записаны в расширенной форме Бэкуса–Наура (РБНФ, или EBNF). Набор базисных функций читается парсером РБНФ (EBNF parser) и преобразуется в промежуточный вид, соответствующий дереву разбора выражений. Поскольку не любое выражение, записанное в предложенной грамматике является корректным, то в парсер дополнительно встроен валидатор, который проверяет выражение на совместимость.

Проводившиеся символьные оптимизации состояли в приведении подобных слагаемых и исключении слагаемых в (9) с нулевыми коэффициентами. Основная проблема, решавшаяся в рамках процедуры приведения подобных слагаемых — идентификация одинаковых (с точностью до порядка сомножителей) векторных частей в термах (9). Для решения этой проблемы было предложено использовать рекурсивную процедуру приведения векторного выражения к виду, минимальному в заданном лексикографическом порядке.

После проведения необходимых символьных вычислений и оптимизаций система генерирует исходный код на языке C++ для вычисления элементов локальных матриц и векторов в соответствии с полученными формулами. Помимо этого она строит выражения для нахождения интерполянтов функций  $\vec{J}$ ,  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$ , а также — для вычисления электрического и магнитного полей в тетраэдре.

## 2.4. Распределенные итерационные решатели

После декомпозиции задачи на подобласти и построения блоков матрицы на соответствующих узлах кластера, мы имеем распределенную расширенную СЛАУ

$$\bar{A}\bar{u} = \bar{f}.$$

Для решения таких СЛАУ широко используются методы Шварца. Одна итерация аддитивного метода Шварца в матричном виде может быть записана как (см. [10])

$$u_{i+1} = u_i + \sum_p R_p^T A_p^{-1} R_p (\bar{f} - \bar{A}u_i),$$

где  $R_p$  — оператор сужения на подобласть  $\Omega_p$ ,  $p = 1, \dots, P$ ; здесь и далее подчеркивание для  $u_i$  мы опускаем. Матрицу  $A_p$  для подобласти  $p$  можно представить в виде  $A_p = R_p A R_p^T$ .

Проблема состоит в том, что для уравнения Гельмгольца метод Шварца может не сходиться. Однако можно заметить, что решение системы методом Шварца есть ни что иное, как решение методом простой итерации предобусловленной системы

$$B^{-1}\bar{A}\bar{u} = B^{-1}\bar{f}, \quad B^{-1} = \sum_p R_p^T A_p^{-1} R_p. \quad (10)$$

Такую предобусловленную систему можно решать итерационными методами в подпространствах Крылова. Однако метод Шварца имеет недостаток, заключающийся в том, что

количество итераций, необходимое для достижения заданной точности, растет с увеличением числа подобластей [10]. Для преодоления этого недостатка можно воспользоваться методом коррекции на грубой сетке [11] (Coarse Grid Correction, CGC).

Для этого введем операторы грубосеточного сужения  $R_c$ , определенный как оператор сужения на базис подпространства  $\mathcal{W}_1$ , а также оператор продолжения  $P_c = R_c^T$ . Тогда итерация метода аддитивного Шварца с грубосеточной коррекцией записывается как

$$\begin{aligned} u_{i+1/2} &= u_i + P_c A_1^{-1} R_c (\bar{f} - \bar{A} u_i), \\ u_{i+1} &= u_{i+1/2} + \sum_p R_p^T A_p^{-1} R_p (\bar{f} - \bar{A} u_{i+1/2}), \end{aligned}$$

где  $\bar{A}_1 = R_c \bar{A} P_c$  — матрица, полученная при использовании базисных функций порядка 1.

Мы будем решать предобусловленную систему вида (10), где предобуславливатель  $B^{-1}$  при наличии грубосеточной коррекции имеет вид

$$B^{-1} = \sum_p R_p^T A_p^{-1} R_p [I - \bar{A} P_c \bar{A}_1^{-1} R_c] + P_c \bar{A}_1^{-1} R_c. \quad (11)$$

Поскольку метод коррекции на грубой сетке не очень чувствителен к точности аппроксимации  $A_1^{-1}$  [12], для приближенного решения систем вида  $\bar{A}_1 v = q$  можно использовать итерационные методы в подпространствах следов, см. например [13]. Однако приближенное обращение матрицы  $\bar{A}_1$  приводит к тому, что предобуславливатель  $B^{-1}$  становится переменным. В этом случае хорошим выбором для итерационного решения задач с таким предобуславливателем оказывается метод Flexible GMRES [10], допускающий использование переменных предобуславливателей.

Для решения задач в подобластях  $A_p x = b$  можно использовать какой-нибудь прямой решатель для разреженных систем, например решатель PARDISO из библиотеки Intel MKL [6]. Проблема состоит в том, что время, требуемое PARDISO для разложения матриц, растет практически как  $O(N^3/P^3)$ , поэтому такой метод подходит только для решения не очень больших систем на большом числе процессоров. Однако действие обратных матриц  $A_p^{-1}$  можно также вычислять приближенно, например методом FGMRES с предобуславливателем AMG, основанным на использовании иерархических базисов, предложенным в [13].

## 2.5. Методы визуализации электромагнитных полей

Визуализация электромагнитных полей является неотъемлемой частью численного эксперимента, поскольку позволяет проанализировать характерное распределение полей в расчетной области. В связи с этим, в рамках пакета Helmholtz3D был реализован модуль визуализации электромагнитных полей, основанный на технологии OpenGL.

Визуализация электромагнитных полей осуществляется следующим образом. Визуализатор предоставляет возможность визуализировать одно из полей — электрическое либо магнитное, и позволяет переключаться между этими двумя режимами. Поля отрисовываются в каждом из тетраэдров в виде стрелки, сонаправленной с полем в данной точке, и имеющей длину, пропорциональную амплитуде поля в текущий момент времени. Для большей наглядности амплитуда поля кодируется цветом — с линейным переходом от желтого (максимально возможная амплитуда для текущего поля), до синего (близкая к нулю амплитуда). Отметим, что поскольку амплитуда поля представляется в виде двух векторов — действительной и мнимой компоненты, то в заданный момент времени  $t$  реальная ампли-

туда поля задается формулой

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_{re} \cos(\omega t) + \vec{F}_{im} \sin(\omega t),$$

где  $\vec{F}_{re}$  и  $\vec{F}_{im}$  — векторы амплитуд действительной и мнимой части для соответствующего поля (электрического либо магнитного). Для примера на рис. 3 приведена визуализация электрического поля в волноводе с однородной средой. На рисунке хорошо видна структура электрического поля.

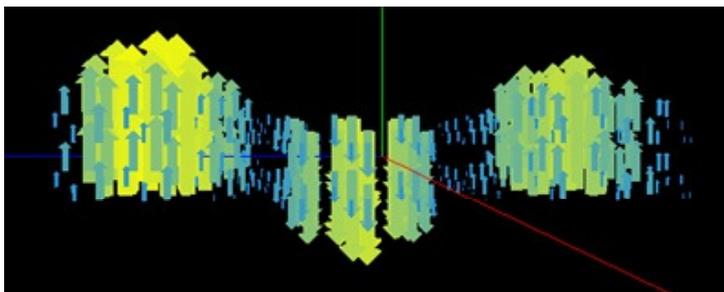


Рис. 3. Пример визуализации электрического поля в волноводе

### 3. Технологии параллельного программирования и оптимизации для систем с распределенной и общей памятью

Параллельные распределенные алгоритмы в пакете Helmholtz3D построены на основе широко распространенного стандарта интерфейса обмена данными MPI (Message Passing Interface). При этом используемые в пакете итерационные решатели с предобуславливателями типа аддитивного Шварца естественным образом ложатся на архитектуру современных вычислительных систем. Действительно, итерационное решение СЛАУ методом FGMRES требует 3 следующих типа операций.

К первому типу относятся векторно-векторные операции. Для имеющейся декомпозиции задачи на подобласти распараллеливание таких операций проводится естественным образом, за исключением операций вычисления скалярного произведения и нормы, для которых необходима точка синхронизации и обмен данными. Однако в интерфейсе MPI имеется требуемая функция `MPI_Allreduce`, реализация которой оптимизируется поставщиком библиотеки MPI.

Для умножения матрицы на вектор решатель строит в каждой подобласти списки узлов, являющихся граничными для соседних подобластей. В дальнейшем решатель использует собранную информацию для пересылки частей вектора между процессами. Ключевым моментом в таком подходе является уменьшение объема пересылаемых данных — в соседние подобласти требуется пересылать только граничные коэффициенты векторов вместо того, чтобы пересылать вектор целиком. В итоге, общий объем пересылаемых данных в трехмерных задачах электромагнетизма для одного умножения матрицы на вектор будет пропорционален  $O(N^{2/3} \log P)$  вместо  $O(N)$ .

Применение предобуславливателей, основанных на методе Шварца, требует на каждой итерации внешнего алгоритма решения подзадач в подобластях, и, согласно (10), не требуют коммуникаций. Распараллеливание решателя в подобластях проводилось с использова-

нием средств OpenMP. Были реализованы параллельные процедуры умножения матрицы на вектор, а также параллельное решение разреженных треугольных систем для оператора сглаживания SSOR (Symmetric Successive Over-Relaxation, [10]) в предобуславливателе AMG. Распараллеливание треугольного решателя проводилось при помощи метода планирования вычислений по уровням: при решении системы вида  $Ux = y$  для каждой вершины вычисляется ее уровень  $l_i$ :

$$l_i = \max \{l_j + 1 : U_{i,j} \neq 0, j > i\}. \quad (12)$$

После этого коэффициенты вектора  $x$  с одинаковым уровнем можно вычислять независимо.

Можно отметить ряд полезных оптимизаций решателя в подобластях. Для начала необходимо отметить его особенность: такое итерационное решение СЛАУ в подобластях оказывается bandwidth-limited, то есть существенно ограничено пропускной способностью шины данных системы, поскольку за одну итерацию алгоритма, фактически, требуется несколько раз прочитать всю матрицу системы (в том числе для решения двух треугольных систем), и несколько раз прочитать и записать различные векторы. Таким образом, реализованные оптимизации можно разделить на две категории: оптимизации доступа к памяти за счет переупорядочивания матрицы и оптимизации, направленные на повышение производительности алгоритма на NUMA-системах, заключающиеся в правильной инициализации областей памяти. Подробнее об этих оптимизациях см. [14].

Отметим, что помимо матрично-векторных операций, решатель в подобластях использует прямой метод PARDISO из Intel® MKL для самой «грубой» системы в предобуславливателе AMG. Дополнительное распараллеливание и оптимизация данной части решателя не требуется: PARDISO поддерживает OpenMP параллелизм как на этапе построения  $LU$ -разложения матрицы, так и на этапе поиска решения, а также использует высокоэффективные функции BLAS и LAPACK.

## 4. Численные эксперименты

Предлагаемые в работе алгоритмы были апробированы на серии методических и практических задач электромагнетизма.

Первой из задач является вычисление электромагнитного поля в параллелепипеде в волноводе  $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ ,  $a = 72$  мм,  $b = 34$  мм и  $c = 200$  мм, см. рис. 4.

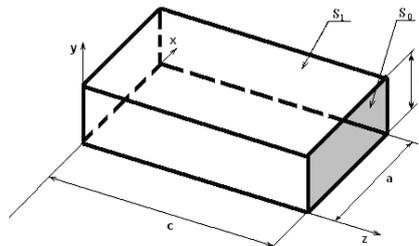


Рис. 4. Расчетная область для модельной задачи

Физические параметры среды:  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 1 - 0.1i$ ,  $\omega = 6\pi \cdot 10^9$  Гц. При  $z = 200$  мм поставлено краевое условие (3) с  $\vec{E}_0 = \vec{e}_y \sin(\pi x/a)$ , на остальной части границы — краевое

условие идеального проводника  $\vec{E}_0 = \vec{0}$ . Известен аналитический вид решения:

$$\vec{E} = \vec{e}_y \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{\sin \gamma z}{\sin \gamma c}. \quad (13)$$

Сетка в данном случае была сгенерирована средствами пакета Helmholtz3D.

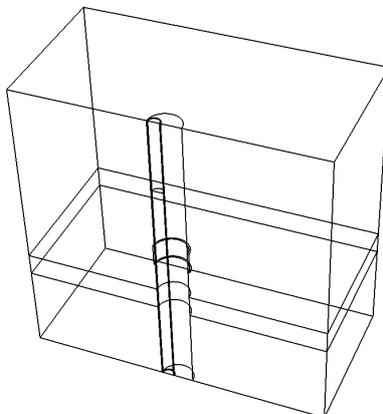


Рис. 5. Расчетная область для задачи электромагнитного каротажа

Вторая из рассматриваемых задач — задача электромагнитного каротажа. Рассматриваемая расчетная область в виде куба с центром в начале координат и стороной 10 метров. Параметры  $\mu_r = 1$ ,  $\varepsilon_r = 1$  во всей области. Проводимость среды  $\sigma = 0.1$  См/м, в среде имеется слой с  $\sigma = 0.05$  См/м. Координаты слоя по оси  $Oz$ : от  $-0.425$  м до  $-0.275$  м. В среде пробурена вертикальная цилиндрическая скважина радиуса  $0.108$  м с центром в начале координат в плоскости  $Oxy$ . В скважине имеется цилиндрическая каверна внешнего радиуса  $0.118$  м и положением по оси  $Oz$  от  $-0.0725$  до  $0.0725$  м. Проводимость скважины и каверны  $\sigma = 5$  См/м. В скважину вставлен полый цилиндрический прибор радиуса  $0.043$  м, смещенный по оси  $x$  относительно центра скважины на  $-0.064$ , заполненный воздухом ( $\sigma = 0$ ). В приборе имеется одна генераторная и две приемные петли радиуса  $0.0365$  м при  $z = 0.5$  м и при  $z = 0.0$  и  $z = 0.1$  м соответственно. По генераторной петле течет ток  $1$  А с частотой  $14$  МГц. Искомой является разность фаз ЭДС в приемниках.

Генерация неравномерной сетки проводилась при помощи утилиты NETGEN [7]. Количество тетраэдров сетки  $N_T = 490282$ , порядок СЛАУ без учета пересечений  $N_0 = 8946864$ .

Тестирование проводилось на двух системах: OpenMP решатель для систем с общей памятью (соответствует  $P = 1$ ) — на системе Intel® Xeon X7560,  $2.27$  ГГц,  $4 \times 8$  ядер,  $64$  ГБ памяти, гибридный решатель — на узлах HP BL2x220 G6 кластера НКС-30Т. Каждый узел кластера — Intel Xeon E5540,  $2.53$  ГГц,  $2 \times 4$  ядер,  $16$  ГБ памяти.

Для аппроксимации использовались базисные функции  $\mathcal{W}_3$  третьего порядка.

В качестве критерия останова итерационного процесса было выбрано уменьшение нормы невязки в  $\varepsilon$  раз:  $|r_i| < \varepsilon|f|$ . Для внутренних итераций FGMRES с предобуславливателем AMG  $\varepsilon_A = 0.2$ , для грубосеточной коррекции в подпространстве следов  $\varepsilon_c = 0.1$ . Решение задач в подобластях при обращении  $A_p$  проводилось с  $\varepsilon_p = 0.01$ . Внешние итерации проводились с точностью  $\varepsilon = 10^{-7}$  за исключением сетки  $116 \times 55 \times 320$  для первой задачи, для которой использовалось  $\varepsilon = 10^{-9}$  для получения  $\vec{E}^h$  нужной точности.

В табл. 1–3 приведены результаты тестирования решателей на модельной задаче и задаче электромагнитного каротажа:  $N_0$  порядок системы без учета пересечений,  $\delta E$  — мак-

<sup>1</sup>Используется более одного MPI процесса на узел (всего 64 узла).

Таблица 1

Масштабируемость гибридного кластерного решателя на модельной задаче

| Сетка, $N_0$<br>и $\delta E$ |       | Количество подобластей (MPI процессов) |         |         |                  |                  |                  |
|------------------------------|-------|--|---------|---------|------------------|------------------|------------------|
|                              |       | 16                                     | 32      | 64      | 128 <sup>1</sup> | 256 <sup>1</sup> | 512 <sup>1</sup> |
| $58 \times 28 \times 160$    | $N_b$ | 705312                                 | 1168248 | 1777626 | 2599050          | 3928914          | 5804454          |
|                              | $n$   | 8                                      | 9       | 10      | 10               | 11               | 12               |
|                              | $n_c$ | 266                                    | 385     | 382     | 468              | 577              | 704              |
|                              | $n_A$ | 24                                     | 27      | 29      | 29               | 32               | 36               |
| $7,1 \cdot 10^{-7}$          | $t$   | 1.2e3                                  | 5.2e2   | 2.3e2   | 1.1e2            | 8.0e1            | 5.7e1            |
| $116 \times 55 \times 320$   | $N_b$ |  |         |         |                  | 13035042         | 18153966         |
|                              | $n$   |  |         |         |                  | 13               | 14               |
|                              | $n_c$ | N/A                                    | N/A     | N/A     | N/A              | 1102             | 1142             |
|                              | $n_A$ |  |         |         |                  | 40               | 42               |
| $9,0 \cdot 10^{-8}$          | $t$   |  |         |         |                  | 1.2e3            | 9.2e2            |

симальная относительная ошибка электрического поля,  $N_b$  — размерность пространства следов для  $A_1$ ,  $n$  — количество внешних итераций распределенного решателя,  $n_3$  и  $n_2$  — общее количество внешних и внутренних (в предобуславливателе AMG) итераций OpenMP решателя,  $n_c$  — общее количество итераций грубосеточной коррекции,  $n_A$  — максимальное количество внешних итераций метода FGMRES в подобластях,  $t$  — время решения СЛАУ в секундах в экспоненциальном формате  $a.ben = a.b \cdot 10^n$ . Результат решения задачи электромагнитного каротажа показал хорошее соответствие с результатом группы НГТУ, которая решала эту задачу другим методом — методом выделения поля источника, при этом искомая разность фаз ЭДС в приемниках совпала с ошибкой 1.8 %.

Таблица 2

Масштабируемость OpenMP решателя на задаче электромагнитного каротажа

|       | Количество OpenMP потоков |       |       |       |       |       |
|-------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 1                         | 2     | 4     | 8     | 16    | 32    |
| $n_3$ | 14                        | 14    | 14    | 14    | 14    | 14    |
| $n_2$ | 33                        | 33    | 33    | 33    | 33    | 33    |
| $t$   | 7.5e3                     | 4.1e3 | 2.2e3 | 1.3e3 | 8.8e2 | 6.1e2 |

Из таблиц видно, что предобуславливатели AMG и CGC успешно уменьшают количество внешних итераций до приемлемого значения. Количество итераций грубосеточной коррекции растет, но гораздо медленнее, чем линейно, за счет трехмерной декомпозиции расчетной области. Тем не менее, при дальнейшем росте размера СЛАУ может потребоваться геометрическое огрубление задачи для  $A_1$ , например [15], в результате чего мы получим многоуровневую схему грубосеточной коррекции.

<sup>1</sup>Используется более одного MPI процесса на узел (всего 64 узла).

Таблица 3

Масштабируемость MPI решателя на задаче электромагнитного каротажа

|       | Количество подобластей (MPI процессов) |        |        |        |         |                  |                  |                  |
|-------|--|--------|--------|--------|---------|------------------|------------------|------------------|
|       | 4                                      | 8      | 16     | 32     | 64      | 128 <sup>1</sup> | 256 <sup>1</sup> | 512 <sup>1</sup> |
| $N_b$ | 102918                                 | 236787 | 477672 | 803112 | 1346418 | 2038260          | 2873652          | 3972480          |
| $n$   | 14                                     | 19     | 19     | 36     | 35      | 36               | 38               | 42               |
| $n_c$ | 86                                     | 131    | 148    | 310    | 310     | 341              | 383              | 445              |
| $n_A$ | 49                                     | 61     | 61     | 111    | 109     | 113              | 123              | 126              |
| $t$   | 8.8e2                                  | 4.9e2  | 2.3e2  | 1.9e2  | 9.2e1   | 6.2e1            | 5.5e1            | 4.9e1            |

## Заключение

В работе представлен пакет параллельных прикладных программ Helmholtz3D. Данный пакет позволяет проводить расчеты трехмерных электромагнитных полей с гармонической зависимостью от времени. Предложенные алгоритмы позволяют рассчитывать электромагнитные поля в областях со сложной разномасштабной геометрией и высококонтрастными средами с высокой точностью, продемонстрированной на методических и практических задачах. Параллельные алгоритмы решения СЛАУ для систем с общей и распределенной памятью позволяют решать сверхбольшие задачи — до нескольких сотен миллионов неизвестных — за время порядка 10–15 минут.

*Работа поддержана грантами РФФИ №11-01-00205 и ОМН РАН №1.3.3-4.*

## Литература

1. Соловейчик, Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
2. Monk, P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations / P. Monk. — Oxford University Press, 2003.
3. Ingelström, P. A new set of H(curl)-conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes / P. Ingelström // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 2006. — Vol. 54, № 1. — P. 160–114.
4. Ильин, В.П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007.
5. Eigen. URL: <http://eigen.tuxfamily.org> (дата обращения 12.12.2012).
6. Intel (R) Math Kernel Library from Intel. URL: <http://software.intel.com/en-us/intel-mkl> (дата обращения 12.02.2013).
7. Schöberl, J. NETGEN — An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules / J. Schöberl // Computing and Visualization in Science. — 1997. — Vol. 1, № 1. — P. 41–52.
8. Бутюгин, Д.С. Алгоритмы решения СЛАУ на системах с распределенной памятью в применении к задачам электромагнетизма / Д.С. Бутюгин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». — 2012. — № 46(305). — С. 5–18.

9. Fuchs, H. On visible surface generation by a priori tree structures / H. Fuchs, Z.M. Kedem, B.F. Naylor // ACM Computer Graphics. — 1980. — Vol. 14, № 3. — P. 124–133.
10. Saad, Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition / Y. Saad. — SIAM, 2003.
11. Bramble, J. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I. / J. Bramble, J. Pasciak, A. Schatz // Mathematics of Computation. — 1986. — Vol. 47, № 175. — P. 103–134.
12. Nabben, R. A comparison of deflation and coarse grid correction applied to porous media flow / R. Nabben, C. Vuik // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2004. — Vol. 42, № 4. — P. 1631–1647.
13. Butyugin, D.S. Efficient iterative solvers for time-harmonic Maxwell equations using domain decomposition and algebraic multigrid / D.S. Butyugin // Journal of Computational Science. — 2012. — Vol. 3, № 6. — P. 480–485.
14. Бутюгин, Д.С. Параллельный предобуславливатель SSOR для решения задач электромагнетизма в частотной области / Д.С. Бутюгин // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 110–117.
15. Toward an  $h$ -independent algebraic multigrid method for Maxwell's equations / J. Hu, R. Tuminaro, P. Bochev et al. // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2005. — Vol. 27, № 5. — P. 1669–1688.

Дмитрий Сергеевич Бутюгин, младший научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, аспирант, Новосибирский государственный университет, dm.butyugin@gmail.com.

---

## PARALLEL APPLICATION PACKAGE HELMHOLTZ3D

*D.S. Butyugin*, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

The paper present parallel application package Helmholtz3D, which allows to compute three-dimensional time-harmonic electromagnetic fields propagating in domains with complicated geometry. In order to solve systems of linear algebraic equations (SLAEs) with complex ill-conditioned non-hermitian matrices arising in the finite element discretizations, the package uses state-of-the-art iterative methods in Krylov subspace combined with original parallel preconditioners. Package approbation was performed on the series of model and real-life problems of electromagnetic field computation in the microwave devices and well logging problems.

*Keywords:* Maxwell's equations, finite element method, iterative algorithms, parallel algorithms.

## References

1. Soloveychick Y.G., Royak M.E., Persova M.G. Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalarnykh i vektornykh zadach [Finite Element Method for the Solution of Scalar and Vector Problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007.
2. Monk P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford University Press, 2003.

3. Ingelström P. A new set of  $H(\text{curl})$ -conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2006. Vol. 54, No. 1. P. 160–114.
4. П'ин В.П. Методы и технологии конечноэлементов [Methods and technologies of finite elements]. Novosibirsk, ICM&MG SBRAS Publ., 2007.
5. Eigen. URL: <http://eigen.tuxfamily.org> (accessed 12 December 2012).
6. Intel (R) Math Kernel Library from Intel. URL: <http://software.intel.com/en-us/intel-mkl> (accessed 12 February 2013).
7. Schöberl J. NETGEN — An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules. *Computing and Visualization in Science*. 1997. Vol. 1, No. 1. P. 41–52.
8. Butyugin D.S. Algoritmy resheniya SLAU na sistemakh s raspredelennoy pamatyu v primemenii k zadacham elektromagnetizma [Algorithms of SLAEs solution on the systems with distributed memory applied to the problems of electromagnetism]. *Vestnik YUURGU. Seriya "Vychislitel'naya matematika i informatika" [Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering]*, 2012. No. 46(305). P. 5–18.
9. Fuchs H., Kedem Z.M., Naylor B.F. On visible surface generation by a priori tree structures *ACM Computer Graphics*. 1980. Vol. 14, No. 3. P. 124–133.
10. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Second Edition. SIAM, 2003.
11. Bramble J., Pasciak J., Schatz A. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I. *Mathematics of Computation*. 1986. Vol. 47, No. 175. P. 103–134.
12. Nabben R., Vuik C. A comparison of deflation and coarse grid correction applied to porous media flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2004. Vol. 42, No. 4. P. 1631–1647.
13. Butyugin D.S. Efficient iterative solvers for time-harmonic Maxwell equations using domain decomposition and algebraic multigrid. *Journal of Computational Science*. 2012. Vol. 3, No. 6. P. 480–485.
14. Butyugin D.S. Parallelniy predobuslavlivatel' SSOR dlya resheniya zadach elektromagnetizma v chastotnoy oblasti [Parallel SSOR preconditioner for the solution of electromagnetism problems in the frequency domain]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie [Computational methods and programming]*. 2011. Vol. 12, No. 1. P. 110–117.
15. Hu J., Tuminaro R., Bochev P., Garasi C., Robinson C. Toward an  $h$ -independent algebraic multigrid method for Maxwell's equations *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2005. Vol. 27, No. 5. P. 1669–1688.

Поступила в редакцию 15 февраля 2013 г.

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ АНАЛИЗА ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ<sup>1</sup>

А.В. Калачев, А.С. Карсаков, И.Б. Мееров, Я.А. Напыльникова,  
А.Ю. Овсяно

В работе рассмотрена задача разработки энергоэффективного программного обеспечения. Основное внимание уделено программированию для мобильных устройств. Предложен новый программный инструмент для анализа энергоэффективности приложений для мобильных устройств. Инструмент позволяет собирать и обрабатывать экспериментальную информацию, характеризующую энергоэффективность приложений на используемой платформе. Приведено сравнение аналогичных инструментов. Описаны основная функциональность, метод использования и результаты применения на примере задачи матричного умножения. Проведен анализ энергоэффективности реализаций алгоритма с использованием набора команд SSE, а также технологий параллельного программирования OpenMP и Cilk Plus. Исследованы зависимость энергоэффективности от числа использованных потоков, количества кэш-промахов, количества переходов между C-State-состояниями процессора. Сформулированы выводы по результатам проведенного анализа. Приведены планы по дальнейшему развитию функциональности инструмента.

*Ключевые слова:* мобильные системы, оптимизация энергопотребления, инструменты для анализа энергоэффективности, метрики для оценки энергопотребления, C-State-состояния.

### Введение

В настоящее время проблема оптимизации энергосбережения является достаточно актуальной в разных областях науки и техники. В связи с повсеместным применением информационных технологий (ИТ) энергетическая эффективность (энергоэффективность) стала приоритетным направлением и в ИТ-сфере. Так, увеличение производительности процессоров привело к нелинейному росту энергопотребления в рабочих станциях и серверах. Особенно сильно эта проблема коснулась центров обработки данных, где используется большое количество вычислительных устройств и сетевого оборудования. Так, в период с 2011 по 2012 год общее энергопотребление всех таких центров в мире существенно возросло.

С другой стороны производители мобильных устройств столкнулись с существенным падением времени автономной работы при расширении функциональности. Если первые модели процессоров потребляли лишь доли Ватта, то современные могут требовать до 130 и более Ватт. К сожалению, емкость батарей увеличивается медленнее и не успевает удовлетворить существующие потребности пользователей.

Таким образом, основная задача, которая ставится при конструировании современных процессоров, — достижение не максимально возможной производительности, а вы-

---

<sup>1</sup> Статья рекомендована к публикации программным комитетом научной конференции «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» (Нижний Новгород, 2012).

сокого уровня производительности при обеспечении энергопотребления на приемлемом уровне. Необходимость внедрения энергосберегающих технологий продиктована не только желанием сэкономить ресурсы, но и невозможностью обеспечить приемлемое время автономной работы мобильных устройств. Сейчас это является одной из движущих сил совершенствования архитектур и технологий, как мобильных процессоров, так и мощных суперкомпьютеров и серверов.

Полностью справиться с проблемой, используя только аппаратные решения (увеличение емкости батареи, оптимизация устройства процессора и др.), не представляется возможным, поэтому необходимо использовать и программные решения.

В данной работе проводится обзор текущих достижений в данной области, проведен обзор существующих программных инструментов для анализа энергоэффективности и предлагается новый инструмент для сбора и анализа данных об энергопотреблении в программах, описывается подход к организации инструмента, приводятся примеры его использования на модельных задачах, анализируются результаты экспериментов, формулируются выводы и планы по дальнейшему развитию.

## 1. Текущее состояние предметной области

**Метрики.** Вопрос о введении согласованной системы метрик для оценки энергопотребления активно изучается в литературе. Для оценки энергопотребления могут использоваться классические физические характеристики: Ватты, Ватт\*часы и Джоули. В работе [1] предлагается ввести новую физическую величину: MIPJ (millions of instructions per joule), миллион операций на джоуль. В некоторых других источниках эту величину называют Gflop/s per Watt, что с точки зрения физики является эквивалентным. Чем больше эта величина, тем более энергоэффективной является вычислительная система. Долгое время эта метрика использовалась для сравнения энергоэффективности вычислительной техники. Аналогично списку Top500 самых высокопроизводительных систем в мире<sup>2</sup> был создан список наиболее энергоэффективных систем – Green500<sup>3</sup>. В 2010 была предложена альтернативная метрика [2] – FTTSE ( $f(timetosolution) * energy$ ), одновременно учитывающая время работы программы ( $f(timetosolution)$ ) и потраченную энергию ( $energy$ ). Вопрос формирования и применения системы метрик для оценки энергопотребления представляет большой практический интерес.

**Оптимизация энергопотребления.** Оптимизация энергопотребления в мобильных устройствах может выполняться как на аппаратном, так и на программном уровне. Развитие вопроса протекало в двух основных направлениях: Dynamic Power Management (DPM) [3–6] и Dynamic Voltage Scaling (DVS) [6–8]. Суть первого направления заключается в том, чтобы операции, не требующие всей вычислительной мощности центрального процессора, выполнялись в более энергоэффективных состояниях центрального процессора. Центральный процессор

<sup>2</sup> Список самых высокопроизводительных систем – <http://www.top500.org>

<sup>3</sup> Список самых энергоэффективных систем – <http://www.green500.org>

может переходить в состояния, при которых производительность понижена, что в свою очередь уменьшает энергопотребление. Основная сложность заключается в том, чтобы правильно предсказывать момент перехода в режим экономии энергии. Направление Dynamic Voltage Scalling предлагает другой подход, суть которого заключается в динамическом изменении питания, подаваемого на разные компоненты аппаратного обеспечения (такие как центральный процессор, оперативная память и др.) в зависимости от потребностей исполняемого в данный момент программного обеспечения.

На основе технологий DPM и DVS в современных процессорах реализованы P-state- и C-state-состояния процессора. P-state-состояния – активные режимы работы процессора, характеризующиеся комбинацией тактовой частоты и рабочего напряжения. Для различных моделей процессоров эти режимы могут отличаться. При снижении вычислительной нагрузки процессор может регулировать свою тактовую частоту и напряжения питания. Этот процесс незначительно сказывается на производительности, но дает ощутимый выигрыш в энергоэффективности. В отличие от P-state, C-State-состояния показывают степень засыпания процессора во время «простоя», т.е. когда он не исполняет инструкции. У каждого состояния есть номер, чем он больше, тем ниже энергопотребление процессора, но тем больше времени и энергии понадобится для перехода в активное состояние. Далее приведена краткая характеристика основных C-state-состояний [9]:

- C0 – активное состояние процессора, в котором он выполняет вычисления и исполняет инструкции.
- C1 – состояние ожидания, процессор не исполняет инструкции, но готов с минимальной задержкой приступить к их исполнению. В данном режиме процессор сохраняет состояние системного кэша.
- C2 – данное состояние ожидания процессора более энергоэффективное, чем C1, реализованное за счет аппаратных возможностей процессора.
- C3 – состояние ожидания процессора, при котором выключаются тактовый генератор и механизмы поддержания когерентности кэшей.

В некоторых процессорах могут быть реализованы более энергоэффективные состояния ожидания, вплоть до C6.

В имеющихся статьях по написанию энергоэффективного кода, существуют рекомендации снизить количество переходов из одного C-state-состояния в другое, т.к. эти переходы зачастую ведут к потере энергии [10].

В настоящее время указанные подходы достаточно хорошо изучены и активно развиваются с появлением новой вычислительной техники. Вместе с тем, все больший интерес вызывает оптимизация на уровне прикладных программ – написание энергоэффективного программного обеспечения [5, 11–15].

## 2. Оценка энергоэффективности программного обеспечения

Целью данной работы является разработка методов и программных инструментов для анализа энергоэффективности программного обеспечения. Для ее достижения необходимо определить набор величин, основываясь на которых можно будет оценивать энергоэффективность. Нами были выбраны следующие метрики:

1. Текущая потребляемая мощность (Вт).
2. Процент времени, в течение которого процессор находится в том или ином C-state-состоянии.
3. Кол-во переходов между разными C-state-состояниями (переходов/с).
4. Процент времени загрузки процессора.
5. Процент времени бездействия (простоя) процессора.
6. Существуют множество инструментов, которые позволяют определять данные метрики.

Сравнительный анализ таких инструментов представлен в табл. 1. Для сравнения были взяты следующие инструменты. Power Checker [16], Power Informer [17] продукты корпорации Intel, Joulemeter [18], Perfmon [19] корпорации Microsoft и продукт с открытым кодом Powertop [20]. В качестве критериев сравнения были использованы основные функции, необходимые для оценки энергоэффективности программ.

Все инструменты обладают теми или иными достоинствами и недостатками. Ни один из них не реализует полный набор функций, перечисленных в первом столбце табл. 1. Особо стоит обратить внимание на возможность инструмента автоматически следить за условиями проведения экспериментов, т.к. на энергопотребление приложения влияет большое количество факторов: загрузка центрального процессора, текущий уровень потребляемой мощности системы и отдельных ее компонент, работы системы охлаждения мобильного устройства и т.д. Исследователю необходимо учитывать эти факторы для того, чтобы сделать корректные выводы из результатов эксперимента. К сожалению, перечисленные в табл. 1 инструменты не предоставляют такой возможности.

В связи с вышесказанным возникла необходимость разработать новую систему для анализа энергоэффективности программного обеспечения.

Были предъявлены следующие требования к системе:

- **Кроссплатформенность.** Предусмотреть поддержку ОС WindowsXP, Windows 7 и Linux, процессоров на базе архитектуры x86. Обеспечить возможность портирования на мобильные ОС (Android, iOS, WindowsPhone) и другие архитектуры процессоров (ARM).

- **Нагрузка.** Система должна добавлять минимальную погрешность в проводимые эксперименты (не более 5%).

## Инструменты для анализа энергоэффективности

|   | Intel Power Checker | Intel Power Informer | Joulemeter | Perfmon | Powertop |
|---|---------------------|----------------------|------------|---------|----------|
| ОС  | Windows             | Windows              | Windows    | Windows | Linux    |
| Измерение текущей потребляемой мощности       | Да                  | Да                   | Да         | Да      | Да       |
| Анализ C-State-состояний                      | Да                  | Да                   | Нет        | Да      | Да       |
| Сбор информация о центральном процессоре      | Нет                 | Да                   | Нет        | Да      | Да       |
| Отображение результатов в реальном времени    | Нет                 | Нет                  | Да         | Да      | Да       |
| Проведение серий экспериментов                | Нет                 | Нет                  | Нет        | Нет     | Нет      |
| Слежение за условиями проведения эксперимента | Нет                 | Нет                  | Нет        | Нет     | Нет      |
| Период обновления данных (с)                  | 1,0                 | неизвестно           | 1,0        | 1,0     | 15,0     |
| Вывод результатов в файл                      | Да                  | Да                   | Нет        | Да      | Нет      |
| Возможность хранения результатов              | Нет                 | Нет                  | Нет        | Нет     | Нет      |

- **Автоматизация запуска экспериментов.** Система должна иметь открытую архитектуру, поддерживать расширение списка используемых параметров, функцию калибровки. Основываясь на полученных параметрах, система должна следить за корректностью условий проведения экспериментов. В режиме ручного эксперимента приложение должно позволять настраивать параметры эксперимента. В режиме серийного эксперимента приложение должно работать, используя конфигурационный файл.

- **Формат хранения данных.** Формат хранения должен быть расширяемым, самодостаточным, ориентированным на хранение параметров и результатов экспериментов, поддерживать быстрые операции чтения/записи в файл.

- **Источник данных.** Исследовательский комплекс должен иметь возможность получать информацию об энергопотреблении из различных источников (измерительный прибор, API ОС, драйвер батареи и др.) Каждый источник дан-

ных должен быть взаимозаменяемым и не влиять на другую функциональность системы.

- **Пользовательский интерфейс.** Взаимодействие с пользователем должно происходить с использованием графического интерфейса. Должна поддерживаться следующая функциональность: задание параметров эксперимента (графическая форма или выбор конфигурационного файла на файловой системе), работа с очередью экспериментов, запуск экспериментов, сбор и представление результатов экспериментов (графический, конвертация в текстовый формат).

- **Представление данных.** Пользователь должен иметь возможность загружать результаты проведенных экспериментов. Результаты должны быть представлены в удобном и наглядном виде с использованием графиков, таблиц и гистограмм.

### 3. Архитектура системы

Для минимизации накладных расходов при сборе метрик для разработки инструмента был использован язык программирования C++. Для обеспечения кроссплатформенности реализация пользовательского интерфейса была выполнена с помощью QT framework. Использование объектного подхода позволило предусмотреть возможность расширения системы как с точки зрения поддержки новых метрик, так и с точки зрения подключения новых измерителей (в текущей версии поддерживается Perfmon).

Архитектура системы представлена на рис. 1.

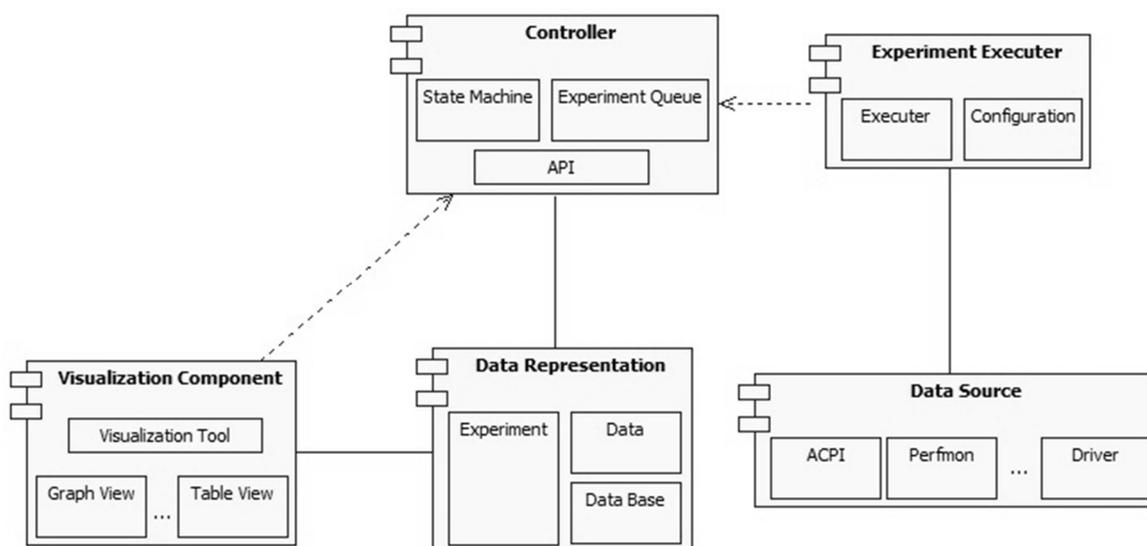


Рис. 1. Архитектура системы

Центральным управляющим модулем системы является *Controller*. Данная компонента предоставляет API, посредством которого другие компоненты системы могут взаимодействовать с внутренней машиной состояний и очередью экс-

периментов. Также данный компонент имеет набор функций, с помощью которых другие компоненты могут получить доступ к модулю *DataRepresentation*, который отвечает за программное представление данных об эксперименте. Модуль *ExperimentExecuter* реализуют всю логику, связанную с проведением экспериментов и сбором метрик. Для получения необработанных данных используются различные источники данных, реализации которых представлены в модуле *DataSource*. Все инструменты визуализации, а также компонента предварительной обработки данных находятся в модуле *Visualization*.

#### 4. Результаты проведенных экспериментов

Использовалось следующее программно-аппаратное окружение:

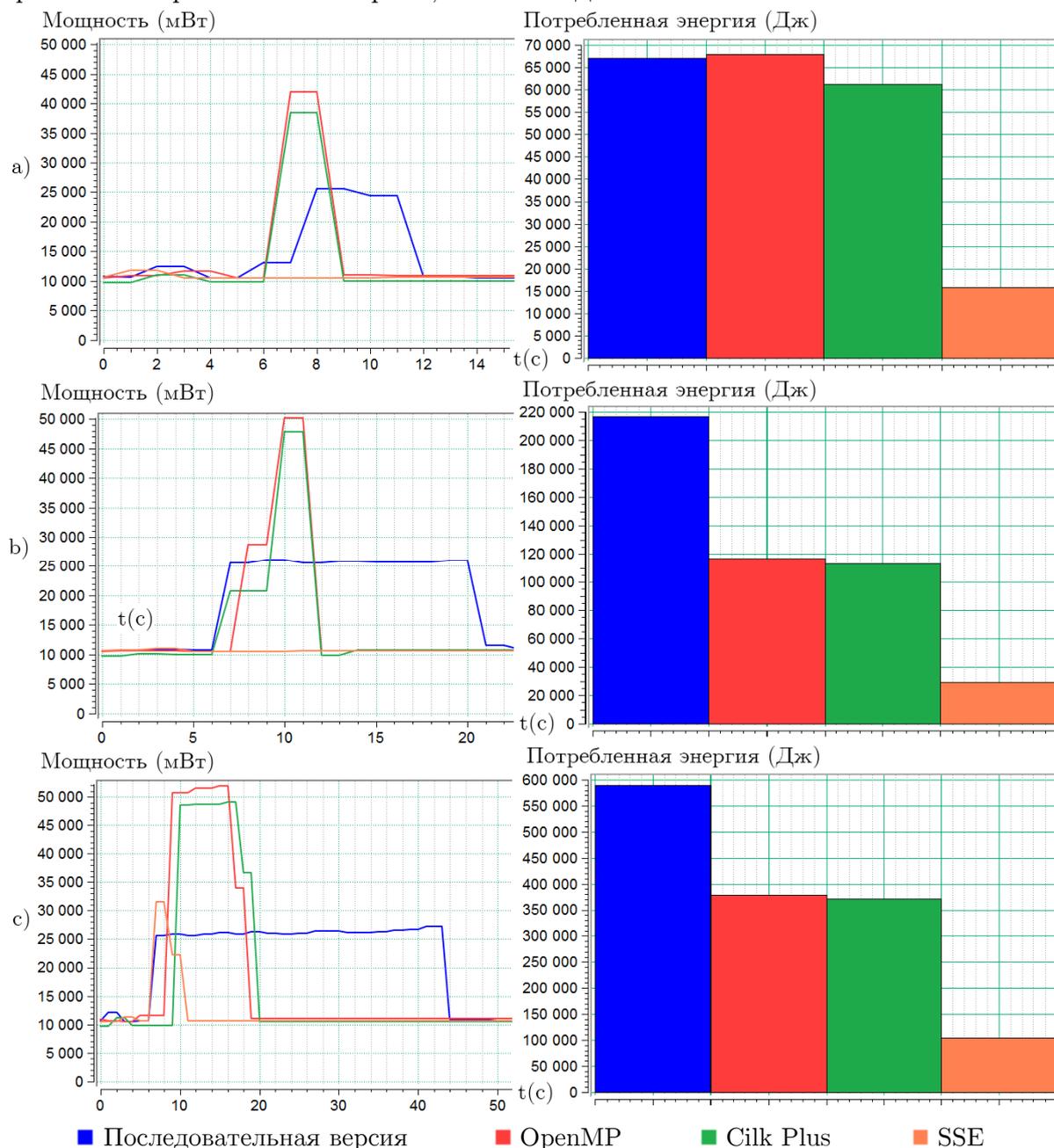
- Процессор: Mobile Quad Core Intel Core i7 2630QM @ 2GHz (2.9 GHz Turbo Boost).
- Кэш процессора: L1 – 32 KB, L2 – 256 KB, L3 – 6MB.
- Оперативная память: 4GB, DDR3 1333 MHz.
- Операционная система: Windows 7 Ultimate (x64).

В первой серии экспериментов (рис. 2) проводится сравнение потребляемой мощности при решении задачи матричного умножения в следующих конфигурациях: последовательная версия, версии с использованием SSE, OpenMP и Cilk Plus. Здесь и далее за основу принят классический алгоритм матричного умножения, осуществляющий вычисление элементов по определению.

На рис. 2а, 2б, 2с слева, по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат текущая потребляемая мощность, измеряемая в мВт. Таким образом, данная серия графиков отображает количество потребляемой энергии в каждый момент времени работы алгоритма. Заметим, что пиковое значение потребляемой мощности при работе параллельных версий больше, чем у последовательной версии (фиолетовый). Так, при размерности матриц 800 на 800 элементов (см. рис. 2а) пиковая потребляемая мощность у реализаций на OpenMP (красный) и Cilk Plus (синий) на 35% больше. При увеличении размерности задачи, например, до 1600 на 1600 элементов (см. рис. 2с) разница составляет уже 45 %. Данное явление объясняется тем, что параллельные реализации задействуют большие вычислительные ресурсы системы. Этим же можно объяснить, что время работы параллельных реализаций меньше по сравнению с последовательной. Действительно, при небольшой размерности задачи (см. рис. 2а) время работы параллельных реализаций в 2 раза меньше, чем у последовательной, но при увеличении размерности задачи (см. рис. 2с) параллельная версия работает более чем в 3 раза быстрее. Реализация с использованием SSE (оранжевый) задействует дополнительные возможности процессора, что позволяет решить задачу с минимальным временем и минимальной пиковой потребляемой мощностью.

Чтобы сделать выводы об энергоэффективности, проинтегрируем полученные результаты по времени. На гистограммах (см. рис. 2а, 2б, 2с, справа) отражено суммарное количество энергии, потраченное на решение задачи. Несмотря на то, что пиковая потребляемая мощность в параллельных реализациях больше,

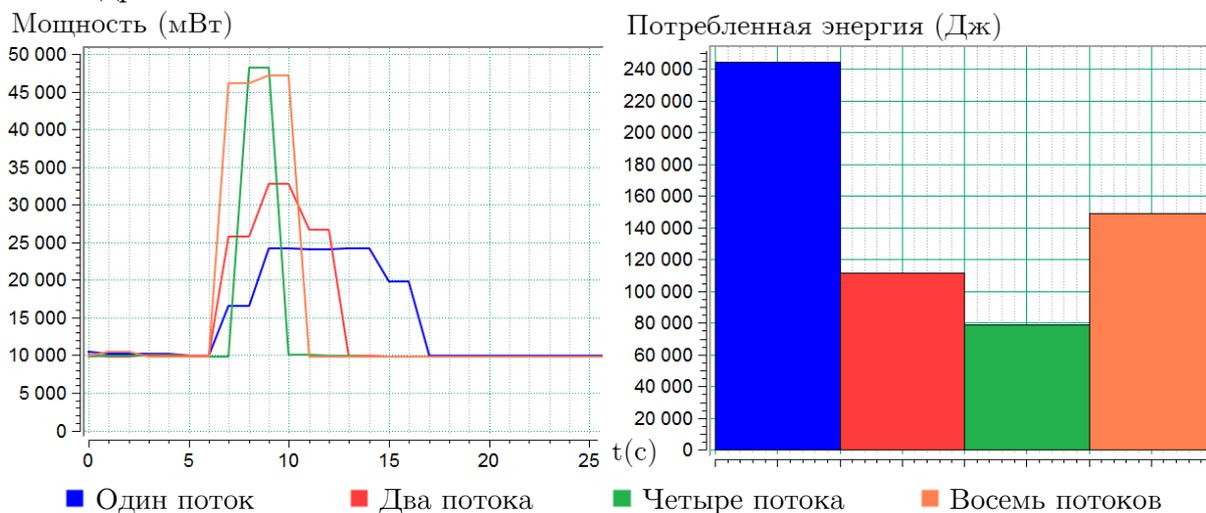
чем в последовательной реализации, энергия, потраченная на решение задачи меньше. Если для небольших задач (см. рис. 2а, справа) разница составляет 20%, то для задач большей размерности (см. рис. 2с, справа) параллельным реализациям требуется в 2 раза меньше энергии, чем последовательной. Отметим, что версия на OpenMP (красный) и версия на Cilk Plus (синий) показывают примерно одинаковые результаты. Версия на SSE для этой же задачи (см. рис. 2с) потребляет в 6 раз меньше энергии, чем последовательная.



**Рис. 2.** Сравнение энергоэффективности реализаций матричного умножения при следующих размерах матриц: а) 800\*800 б) 1200\*1200 в) 1800\*1800. Слева: измерение текущей потребляемой мощности во время эксперимента. Справа: суммарная потребленная энергия каждой из реализаций

Таким образом, параллельные реализации являются более энергоэффективными, чем последовательная реализация, несмотря на то, что пиковая потребляемая мощность у параллельных версий больше. Причем с ростом размеров матриц увеличивается и разница в количестве энергии, потребляемой последовательной и параллельными версиями.

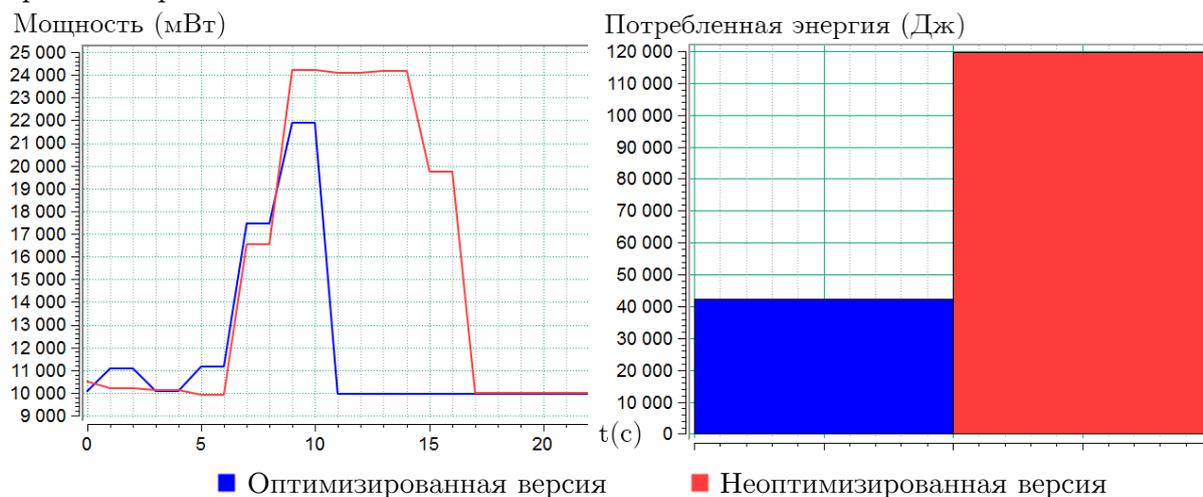
Вторая серия экспериментов (рис. 3) иллюстрирует, как использование различного числа потоков при решении задачи влияет на энергоэффективность. Для анализа использовалась реализация матричного умножения с использованием технологии OpenMP. Серия экспериментов подразумевала запуск программы в одно- (синий), двух- (красный), четырех- (оранжевый) и восьмипоточной (фиолетовый) конфигурации. Отметим, что тестовая система имеет четыре физических ядра.



**Рис. 3.** Сравнение энергоэффективности параллельной реализации матричного умножения при различном числе потоков. Слева: измерение текущей потребляемой мощности во время эксперимента. Справа: суммарная потребленная энергия при разном числе потоков

Из результатов экспериментов видно, что при увеличении количества потоков время работы алгоритма уменьшается, однако потребляемая мощность в каждый момент времени увеличивается (см. рис. 3, слева). Это объясняется тем, что программа использует для решения задачи все доступные ей ресурсы центрального процессора. Архитектура современных процессоров устроена таким образом, что распределение работы между ядрами процессора является более энергоэффективным, чем выполнение этой работы при использовании одного ядра. Данный эффект подтверждается гистограммой (см. рис. 3, справа). Отметим, что в случае, когда число потоков превышает число ядер процессора (восьмипоточная конфигурация), наблюдается увеличение потребляемой энергии из-за дополнительных накладных расходов. Таким образом, для каждой вычислительной системы можно подобрать оптимальное, с точки зрения энергоэффективности, количество потоков для решения задачи.

Третья серия экспериментов (рис. 4) демонстрирует влияние количества кэш-промахов на энергоэффективность программы. В данном эксперименте для уменьшения количества кэш-промахов правая матрица была предварительно транспонирована.

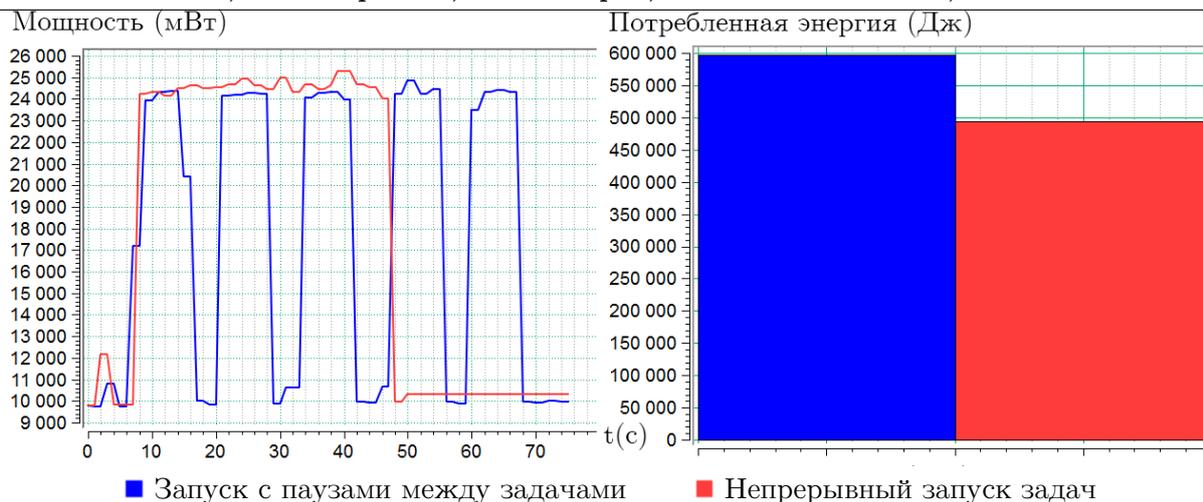


**Рис. 4.** Анализ влияния количества кэш-промахов на энергопотребление на примере матричного умножения. Слева: измерение текущей потребляемой мощности во время эксперимента. Справа: суммарная потребленная энергия каждой из реализаций

Как и ожидалось, эксперимент показывает сокращение времени работы программы более чем на 40% (см. рис. 4, слева), что отражается в соответствующем уменьшении суммарной потраченной энергии (см. рис. 4, справа). Однако суммарная потраченная энергия уменьшается более чем на 60%. Дополнительное уменьшение потраченной энергии на 20% объясняется тем, что в оптимизированной версии алгоритма из-за уменьшения количества кэш-промахов понижается нагрузка на аппаратное обеспечение, в частности, на оперативную память, что, в свою очередь, снижает общие затраты энергии.

Четвертая серия экспериментов (рис. 5) иллюстрирует влияние количества переходов между C-state-состояниями процессора на энергопотребление. Рассмотрим задачу, состоящую из нескольких независимых частей, которые можно запускать либо непрерывно друг за другом (красный), либо с некоторыми паузами (синий), что приводит к увеличению числа C-State-переходов.

В результате видим, что время обработки данных примерно одинаковое, но в случае, когда задачи запускаются непрерывно друг за другом, энергопотребление уменьшается приблизительно на 15% (см. рис. 5, справа). Это показывает, что увеличение числа переходов между C-state-состояниями процессора приводит к росту энергопотребления. Таким образом, группировка при обработке данных может привести к существенному выигрышу в энергоэффективности приложения.



**Рис. 5.** Анализ влияния количества переходов между C-State-состояниями на энергопотребление на примере матричного умножения. *Слева:* измерение текущей потребляемой мощности во время эксперимента. *Справа:* суммарная потребленная энергия каждой из реализаций

## Заключение

В работе представлен инструмент, предназначенный для помощи разработчику в оптимизации энергоэффективности программного обеспечения. Инструмент предоставляет широкий спектр возможностей для запуска экспериментов, сбора необходимых данных, хранения, обработки и визуализации результатов.

Работоспособность системы продемонстрирована на примере анализа энергоэффективности разных программных реализаций алгоритма матричного умножения. Проведены следующие эксперименты:

1. Сравнение энергоэффективности реализаций, выполненных с использованием набора команд SSE и технологий параллельного программирования OpenMP и Cilk Plus. В ходе эксперимента было показано, что при анализе энергоэффективности нужно обращать внимание не только на потребляемую мощность в каждый момент времени работы алгоритма, но и на общее время работы алгоритма.
2. Исследование влияния числа потоков в параллельной реализации на энергоэффективность. Было продемонстрировано, что можно подобрать оптимальное, с точки зрения энергопотребления, количество потоков для решения задачи.
3. Анализ влияния количества кэш-промахов на энергопотребление. Результаты экспериментов продемонстрировали, что на энергоэффективность помимо использования центрального процессора также влияет и использование других компонентов вычислительной системы, например, оперативной памяти.

4. Анализ влияния количества переходов между C-State-состояниями на энергопотребление. Эксперимент показал, что для достижения максимальной энергоэффективности разработчику необходимо уметь работать с C-State-состояниями центрального процессора.

Архитектура системы обеспечивает ее расширяемость (добавление новых метрик, источников данных, способов визуализаций и др.). Расширение функциональности системы, всесторонняя апробация, выработка подходов к оптимизации энергопотребления являются темами дальнейшей исследований.

*Работа выполнена в лаборатории Intel-ННГУ «Информационные технологии» (ITLab).*

## Литература

1. Scheduling for Reduced CPU Energy / M. Weiser, B. Welch, A. Demers et al. // Proceedings of the 1st USENICS Symposium on Operating Systems Design and Implementation (Monterey, CA). – Nov. 1994. – P. 13–23.
2. Bekas, C. A new energy aware performance metric / C. Bekas, A. Curioni // Computer Science – R&D. – 2010. –Vol. 25. – P. 187–195.
3. Benini, L. Dynamic Power Management: Design Techniques and Cad Tools / L. Benini, G. De Micheli – Kluwer Academic Publishers, 1998. – 231 p.
4. Dynamic Voltage Scaling and Power Management for Portable Systems / T. Simunic, L. Benini, A. Acquaviva et al. // Proceedings of the 38<sup>th</sup> conference on Design automation (Las Vegas, Nevada). – Jun. 2001. – P. 524–529
5. Simunic, T. Energy efficient system design and utilization: PhD Thesis / T. Simunic – Stanford University (Stanford, CA), 2001. – 128 p.
6. Snowdon, D. Power Management and Dynamic Voltage Scaling: Myths and Facts / D. Snowdon, S. Ruocco, G. Heiser // Proceedings of the 7th ACM & IEEE International conference on Embedded software (Salzburg). – Sep. 2007. – P. 84–93.
7. Kappiah, N. Just In Time Dynamic Voltage Scaling: Exploiting Inter-Node Slack to Save Energy in MPI Programs / N. Kappiah, V.W. Freeh, D.K. Lowenthal // Proceedings of the ACM/IEEE SC 2005 Conference (Seattle, Washington). – Nov. 2005. – P. 33.
8. Reducing power with performance constraints for parallel sparse applications / G. Chen, K. Malkowski, M.T. Kandemir et al. // Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Parallel & Distributed Processing Symposium (Denver, Colorado). – Apr. 2005. – P. 8.
9. Intel Corp., Intel 64 and IA-32 Architectures Optimization Reference Manual / URL: <http://www.intel.com/content/dam/doc/manual/64-ia-32-architectures-optimization-manual.pdf> (дата обращения: 10.1.2013), Chapter 11. P. 423–430.
10. Energy-Efficient Platforms – Considerations for Application Software and Services / URL: <http://download.intel.com/technology/pdf/322304.pdf> (дата обращения: 05.09.2012).
11. Tiwari, V. Power Analysis of Embedded Software: A First Step / V. Tiwari, S. Malik, A. Wolfe // IEEE Transactions on VLSI Systems. – 1994. –Vol. 2, No. 4. – P. 437–445.

12. Instruction Level Power Analysis and Optimization of Software / V. Tiwari, S. Malik, A. Wolfe et al. // Proceedings of the 9th International Conference VLSI Design (Bangalore, India). – Jan. 1996. – P. 326–328.
13. Instruction scheduling for power reduction in processor-based system design / Н.Н. Tomiyama, Т. Ishihara, А. Inoue et al. // Proceedings of the Conference Design, Automation and Test in Europe (Paris, France). – Feb. 1998. – P. 855–860.
14. Simunic, T. Energy-Efficient Design of Battery-Powered Embedded Systems / T. Simunic, L. Benini, G. De Micheli // IEEE Transactions on VLSI Systems. – 2001. – Vol. 9, No. 1. – P. 15–28.
15. The impact of source code transformations on software power and energy consumption / C. Brandoles, W. Fornaciari, F. Salice et al. // World Scientific Journal of Circuits Systems and Computers. – 2002. – Vol. 11, No. 5 – P. 477–502.
16. Power Checker Web Site /  
URL: <http://software.intel.com/en-us/blogs/2011/06/27/intel-power-checker/> (дата обращения: 10.10.2012).
17. Power Informer Web Site /  
URL: <http://software.intel.com/en-us/articles/intel-powerinformer/> (дата обращения: 10.10.2012).
18. Joulemeter Web Site /  
URL: <http://research.microsoft.com/en-us/downloads/fe9e10c5-5c5b-450c-a674-daf55565f794/> (дата обращения: 10.10.2012).
19. Perfmon Web Site /  
URL: <http://technet.microsoft.com/en-us/library/bb490957.aspx> (дата обращения: 10.10.2010).
20. Power Checker Web Site /  
URL: <https://01.org/powertop/> (дата обращения: 10.10.2012).

Калачев Артем Валерьевич, студент 2 курса магистратуры факультета Вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, [artem.kalachev@me.com](mailto:artem.kalachev@me.com).

Карсаков Александр Сергеевич, студент 4 курса факультета Вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, [karsakov.a.s@gmail.com](mailto:karsakov.a.s@gmail.com).

Мееров Иосиф Борисович, к.т.н., доцент, зам. зав. каф, математического обеспечения ЭВМ, факультет Вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, [meerov@vmk.unn.ru](mailto:meerov@vmk.unn.ru).

Напыльникова Яна Александровна, студентка 4 курса факультета Вычислительной математики и кибернетики Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, [napulnikova.ja@gmail.com](mailto:napulnikova.ja@gmail.com).

Овсяно Андрей Ювенальевич, студент 4 курса факультета Вычислительной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, [kselar@gmail.com](mailto:kselar@gmail.com).

## DEVELOPMENT OF SOFTWARE TOOL FOR THE ANALYSIS OF ENERGY EFFICIENCY

**A.V. Kalachev**, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (N.Novgorod, Russian Federation),

**A.S. Karsakov**, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (N.Novgorod, Russian Federation),

**I.B. Meyerov**, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (N.Novgorod, Russian Federation),

**Y.A. Napylnikova**, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (N.Novgorod, Russian Federation),

**A.U. Ovsuhno**, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (N.Novgorod, Russian Federation)

In this paper we consider the problem of energy efficient software design. We mostly focus on programming for mobile devices. A new software tool for the analysis of energy efficiency of applications for mobile devices is proposed. The tool allows collecting and processing experimental data, which characterizes the energy efficiency of applications which are running on the platform. We compare the similar instruments. We describe the basic functionality, method of use and the results of use on the matrix multiplication example. The analysis of the energy efficient algorithm implementations is done by using the SSE instruction set, as well as parallel programming technologies OpenMP and Cilk Plus. Additionally, we investigate the dependence of energy efficiency on the number of used threads, the quantity of cache misses and the number of transitions between the C-States of CPU. We formulate conclusions for the results of the analysis and present plans to further developing.

*Keywords: mobile systems, energy optimization, tools for the analysis of energy efficiency, metrics to evaluate the power, C-State.*

## References

1. Weiser, M. Scheduling for Reduced CPU Energy / M. Weiser, B. Welch, A. Demers, S. Shenker // Proceedings of the 1st USENICS Symposium on Operating Systems Design and Implementation (Monterey, CA). – Nov. 1994. – P. 13-23.
2. Bekas, C. A new energy aware performance metric / C. Bekas, A. Curioni // Computer Science – R&D. – 2010. –Vol. 25. – P. 187-195.
3. Benini, L. Dynamic Power Management: Design Techniques and Cad Tools / L. Benini, G. De Micheli – Kluwer Academic Publishers, 1998. – 231 P.
4. Simunic, T. Dynamic Voltage Scaling and Power Management for Portable Systems / T. Simunic, L. Benini, A. Acquaviva, P. Glynn, G. De Micheli // Proceedings of the 38<sup>th</sup> conference on Design automation (Las Vegas, Nevada). – Jun. 2001. – P. 524-529
5. Simunic, T. Energy efficient system design and utilization: PhD Thesis / T. Simunic – Stanford University (Stanford, CA), 2001. – 128 P.
6. Snowdon, D. Power Management and Dynamic Voltage Scaling: Myths and Facts / D. Snowdon, S. Ruocco, G. Heiser // Proceedings of the 7th ACM & IEEE International conference on Embedded software (Salzburg). – Sep. 2007. – P. 84-93.
7. Kappiah, N. Just In Time Dynamic Voltage Scaling: Exploiting Inter-Node Slack to Save Energy in MPI Programs / N. Kappiah, V.W. Freeh, D.K. Lowenthal // Proceedings of the ACM/IEEE SC 2005 Conference (Seattle, Washington). – Nov. 2005. – P. 33.

8. Chen, G. Reducing power with performance constraints for parallel sparse applications / G. Chen, K. Malkowski, M.T. Kandemir, P. Raghavan // Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Parallel & Distributed Processing Symposium (Denver, Colorado). – Apr. 2005. – P. 8.
9. Intel Corp., Intel 64 and IA-32 Architectures Optimization Reference Manual / URL: <http://www.intel.com/content/dam/doc/manual/64-ia-32-architectures-optimization-manual.pdf> (accessed: 10.1.2013), Chapter 11. P. 423-430.
10. Energy-Efficient Platforms – Considerations for Application Software and Services / URL: <http://download.intel.com/technology/pdf/322304.pdf> (дата обращения: 05.09.2012).
11. Tiwari, V. Power Analysis of Embedded Software: A First Step / V. Tiwari, S. Malik, A. Wolfe // IEEE Transactions on VLSI Systems. – 1994. –Vol. 2, No. 4. – P. 437-445.
12. Tiwari, V. Instruction Level Power Analysis and Optimization of Software / V. Tiwari, S. Malik, A. Wolfe, M. Lee // Proceedings of the 9th International Conference VLSI Design (Bangalore, India). – Jan. 1996. – P. 326-328.
13. Tomiayma, H.H. Instruction scheduling for power reduction in processor-based system design / H.H. Tomiyama, T. Ishihara, A. Inoue, H. Yasuura // Proceedings of the Conference Design, Automation and Test in Europe (Paris, France). – Feb. 1998. – P. 855-860.
14. Simunic, T. Energy-Efficient Design of Battery-Powered Embedded Systems / T. Simunic, L. Benini, G. De Micheli // IEEE Transactions on VLSI Systems. – 2001. –Vol. 9, No. 1. – P. 15-28.
15. Brandoles, C. The impact of source code transformations on software power and energy consumption / C. Brandoles, W. Fornaciari, F. Salice, D. Sciuto // World Scientific Journal of Circuits Systems and Computers. – 2002. – Vol. 11, No. 5 – P. 477-502.
16. Power Checker Web Site / URL: <http://software.intel.com/en-us/blogs/2011/06/27/intel-power-checker/> (accessed: 10.10.2012).
17. Power Informer Web Site / URL: <http://software.intel.com/en-us/articles/intel-powerinformer/> (accessed: 10.10.2012).
18. Joulemeter Web Site / URL: <http://research.microsoft.com/en-us/downloads/fe9e10c5-5c5b-450c-a674-daf55565f794/> accessed: 10.10.2012).
19. Perfmon Web Site / URL: <http://technet.microsoft.com/en-us/library/bb490957.aspx> (accessed: 10.10.2010).
20. Power Checker Web Site / URL: <https://01.org/powertop/> (accessed: 10.10.2012).

*Поступила в редакцию 8 февраля 2013 г.*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И СЕЙСМИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ИЕРАРХИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

*О.А. Хачай, А.Ю. Хачай*

Построен алгоритм 3D моделирования электромагнитного поля для произвольного типа источника возбуждения  $N$ -слойной среды с иерархическим проводящим включением, расположенным в  $J$ -ом слое. Построены алгоритмы 2-D моделирования для дифракции звука и линейно поляризованной поперечной упругой волны на включении иерархической структуры, расположенной в  $J$ -ом слое  $N$ -слойной упругой среды.

*Ключевые слова:* иерархическая среда, электромагнитное поле, сейсмическое поле, алгоритмы моделирования.

### Введение

Геологическая среда представляет собой открытую систему, на которую воздействуют как внешние, так и внутренние факторы, что может привести ее в неустойчивое состояние. Проявление этой неустойчивости, как правило, происходит локально, и эти зоны геологической среды называются динамически активными элементами, которые являются индикаторами потенциальных источников аварий и катастроф. Эти объекты обладают отличными от вмещающей геологической среды физико-механическими свойствами и способностью в резонансном режиме реагировать на внешние и внутренние воздействия, связанные с изменениями напряженно-деформированного состояния в их окрестности. Кроме того эти объекты обладают способностью изменять свою конфигурацию и структуру в пространстве и во времени, что осложняет задачу прогноза состояния и степени аварийной опасности. В работе Хачай О.А. [1] изложены принципы построения систем мониторинга природно-техногенных аварий и катастроф с использованием сейсмических и электромагнитных полей в пассивном и активном режиме возбуждения, в которых составной частью входят задачи картирования динамически активных зон.

Для решения задач геолого-геофизического картирования в настоящее время широко используется модель слоисто-блоковой среды с включениями, в рамках которой созданы аппаратурно-методические комплексы изучения трехмерно неоднородных сред с соответствующей теорией интерпретации геофизических данных [2]. При изучении пространственно-временных изменений структуры, физических свойств геологической среды или массива горных пород и связанных с ними напряженно-деформированного или фазового состояния модель слоисто-блоковой среды с включениями усложняется: она представляет собой двух ранговую цепочку в общей иерархически неоднородной модели среды. Модель иерархически неоднородной среды для описания процессов деформирования и разрушения геофизической среды была впервые предложена академиком Садовским М.А. [3]. Развитию и использованию иерархично-блоковой модели среды на качественном уровне посвящен ряд работ сотрудников Института Физики Земли РАН [4, 5]. Важную роль для понимания формирования и развития иерархии структурных

уровней деформации в твердых телах играют теоретические и экспериментальные результаты, полученные на образцах [6], с помощью которых обоснован подход, базирующийся на представлении о диссипативных структурах в неравновесных системах [7]. В работах [8, 9] Караевым Н.А. обобщены результаты сейсмических исследований по выделению участков земной коры со строением гетерогенного типа. Гетерогенность, по мнению автора, – важнейшая особенность горных пород, обусловленная неравномерностью распределения в пространстве геологических неоднородностей в виде включений всех масштабов, т.е. по сути дела изучение строения и динамики гетерогенных участков земной коры необходимо с использованием представлений об иерархичных моделях. Явления зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок, связанные с дискретностью и фрагментацией среды, описаны академиком Е.И. Шемякиным с соавторами [10] и получили статус открытия [11]. Эти явления имеют место как в неглубоких шахтах (до глубины 500 м), так и в глубоких шахтах (глубина более 500 м). Результаты геолого-геофизических исследований сверхглубоких скважин показывают, что с увеличением глубины сложность геологического строения среды не уменьшается. Наконец, проблема мониторинга и прогноза состояния геологической среды требует тщательного отбора из имеющихся методик исследования трехмерных сред, допускающих пространственно-временное (частотное) масштабирование и фокусирование. Настоящая работа посвящена разработке алгоритма моделирования электромагнитного эффекта в рамках частотно-геометрической методики при исследовании погруженной в горизонтально-слоистую среду проводящего включения с иерархической структурой.

## 1. Алгоритм моделирования распространения переменного электромагнитного поля в $N$ -слойной среде с проводящим включением иерархического типа

Алгоритм построен с использованием итерационного подхода решения объемных интегральных уравнений для переменного электромагнитного поля в частотной области. Для модели: проводящее включение, расположенное в произвольном слое пятислойной среды, при возбуждении электромагнитного поля плоской волной, вертикальным магнитным или горизонтальным электрическим диполем алгоритм изложен в работе [12].

Пусть локальная неоднородность имеет следующую структуру: на первом иерархическом уровне – это неоднородность объема  $V_1$  с проводимостью  $\sigma_{a1}$ , на втором уровне – это неоднородности, расположенные внутри объема  $V_1$  и занимающие объем  $V_2$  с проводимостями  $\sigma_{aj2}$  в общем случае. Мы будем рассматривать более простой случай, когда неоднородности второго и большего ранга будут иметь внутри своего ранга одинаковую проводимость, т.е.  $\sigma_{a2}$ . Неоднородности третьего ранга будут занимать объем  $V_3$  в пределах объема  $V_2$  с проводимостью  $\sigma_{a3}$  и т.д. Параметры вмещающей горизонтально-слоистой среды имеют вид  $\{\sigma_k, h_k\}$ , где  $k=1, \dots, N$ ,  $h_k$  – суммарные мощности слоев,  $i$  – номер ранга или иерархического уровня. Задача рассматривается для магнитооднородной среды в квазистационарном приближении.

Объемные интегральные уравнения и соответственно интегральные представления для составляющих электрического и магнитного поля выписываются в виде:

$$E_i(M_0) = E_0^{i-1}(M_0) + (\sigma_{ai} - \sigma_{k(M_0)}) \int_{V_i} E_i(M) \hat{G}_E(M, M_0) dV_i \quad (1)$$

$$H_i(M_0) = H_0^{i-1}(M_0) + \left( \frac{\sigma_{ai} - \sigma_{k(M_0)}}{i\omega\mu_0} \right) \int_{V_i} H_i(M) \hat{G}_H(M, M_0) dV_i \quad (2)$$

$\varphi^0$  где  $i$  – номер итерации, связанной с номером иерархического уровня,  $\hat{G}_E(M, M_0)$  и  $\hat{G}_H(M, M_0)$  – тензоры Грина слоистой среды, которые определяются известным способом, описанным в работе [12]. При  $i=1$   $E_0^{i-1}(M_0)$  и  $H_0^{i-1}(M_0)$  – составляющие напряженностей электрического и магнитного возбуждающего или нормального поля слоистой среды. При  $i=2, \dots, L$   $E_0^{i-1}(M_0)$  и  $H_0^{i-1}(M_0)$  – составляющие напряженностей электрического и магнитного поля предыдущего ранга с учетом неоднородностей предыдущего ранга. Распределение электрического и магнитного поля можно анализировать последовательно на каждом итерационном этапе перед включением неоднородностей нового иерархического уровня.

## 2. Моделирование дифракции звука на двумерной упругой неоднородности иерархического типа, расположенной в $N$ -слойной среде

В работе [13] описан алгоритм моделирования дифракции звука на двумерном упругом однородном включении, расположенном в  $J$ -ом слое  $N$ -слойной среды.

$$\begin{aligned} & \frac{(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{2\pi} \iint_{S_C} \varphi_l(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{ji}} \varphi^0(M^0) - \\ & - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{\sigma_{ji} 2\pi} \int_C G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dc = \varphi(M^0), M^0 \in S_C \\ & \frac{\sigma_{ji}(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_C} \varphi(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \varphi^0(M^0) - \\ & - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_C G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dc = \varphi(M^0), M^0 \notin S_C \end{aligned} \quad (3)$$

где  $G_{Sp,j}(M, M^0)$  – функция источника сейсмического поля, краевая задача для которой сформулирована в работе [13],  $k_{1ji}^2 = \omega^2(\sigma_{ji} / \lambda_{ji})$  – волновое число для продольной волны, в приведенном выражении индекс  $ji$  обозначает принадлежность свойств среды внутри неоднородности,  $ja$  – вне неоднородности,  $\lambda$  – постоянная Ламэ,  $\sigma$  – плотность среды,  $\omega$  – круговая частота,  $u = grad \varphi$  – вектор смещений,  $\varphi^0$  – потенциал нормального сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности:  $\varphi_{ji}^0 = \varphi_{ja}^0$ .

Идея, изложенная в предыдущем разделе для электромагнитного поля, реализована и для сейсмического поля для двумерного случая распространения продольной волны через локальную неоднородность с иерархической структурой, расположенной в  $J$ -ом слое  $N$ -слойной среды.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(k_{1jil}^2 - k_{1j}^2)}{2\pi} \iint_{S_{Cl}} \varphi_l(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{jil}} \varphi_{l-1}^0(M^0) - \\
 & - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jil})}{\sigma_{jil} 2\pi} \int_{Cl} G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} dc = \varphi_l(M^0), M^0 \in S_{Cl} \\
 & \frac{\sigma_{jil}(k_{1jil}^2 - k_{1j}^2)}{\sigma(M^0) 2\pi} \iint_{S_{Cl}} \varphi_l(M) G_{Sp,j}(M, M^0) d\tau_M + \varphi_{l-1}^0(M^0) - \\
 & - \frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{jil})}{\sigma(M^0) 2\pi} \int_{Cl} G_{Sp,j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} dc = \varphi_l(M^0), M^0 \notin S_{Cl}
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $G_{Sp,j}(M, M^0)$  – функция источника сейсмического поля, она совпадает с функцией выражения (3),  $k_{1jil}^2 = \omega^2(\sigma_{jil} / \lambda_{jil})$  – волновое число для продольной волны, в приведенном выражении индекс  $ji$  обозначает принадлежность свойств среды внутри неоднородности,  $ja$  – вне неоднородности,  $l=1\dots L$  – номер иерархического уровня,  $u_l = grad \varphi_l$ ,  $\varphi_l^0$  – потенциал нормального сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности предыдущего ранга, если  $l=2\dots L$   $\varphi_l^0 = \varphi_{l-1}$ , если  $l=1$ ,  $\varphi_l^0 = \varphi^0$ , что совпадает с соответствующим выражением из (3).

Если при переходе на следующий иерархический уровень ось двумерности не меняется, а меняются только геометрии сечений вложенных структур, то аналогично (1,2) можно описать итерационный процесс моделирования сейсмического поля (случай формирования только продольной волны). Итерационный процесс относится к моделированию вектора смещений при переходе с предыдущего иерархического уровня на последующий уровень.

Внутри каждого иерархического уровня интегро-дифференциальное уравнение и интегро-дифференциальное представление вычисляются с помощью алгоритмов (4). Если на некотором иерархическом уровне структура локальной неоднородности распадается на несколько неоднородностей, то двойной и контурные интегралы в выражениях (4) берутся по всем неоднородностям. В данном алгоритме рассмотрен случай, когда физические свойства неоднородностей одного и того же уровня одинаковы, различаются только границы областей.

### 3. Моделирование дифракции упругой поперечной волны на двумерной неоднородности иерархического типа в $N$ -слойной среде

Аналогично (4) выписывается такой же процесс для моделирования распространения упругой поперечной волны в  $N$ -слойной среде с двумерной иерархической структурой произвольной морфологии сечения с использованием интегральных соотношений, выписанных в работе [13].

$$\begin{aligned}
 & \frac{(k_{2jil}^2 - k_{2j}^2)}{2\pi} \iint_{S_{Cl}} u_{xl}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\mu_{ja}}{\mu_{jil}} u_{x(l-1)}^0(M^0) + \\
 & + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{jil})}{\mu_{jil} 2\pi} \int_{Cl} u_{xl}(M) \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} dc = u_{xl}(M^0), M^0 \in S_{Cl} \\
 & \frac{\mu_{jil}(k_{2jil}^2 - k_{2j}^2)}{\mu(M^0) 2\pi} \iint_{S_{Cl}} u_{xl}(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M + u_{x(l-1)}^0(M^0) + \\
 & + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{jil})}{\mu(M^0) 2\pi} \int_{Cl} u_{xl}(M) \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} dc = u_{xl}(M^0), M^0 \notin S_{Cl}
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $G_{Ss,j}(M, M^0)$  – функция источника сейсмического поля рассматриваемой задачи, она совпадает с функцией Грина, выписанной в работе [13] для соответствующей задачи,  $k_{2jil}^2 = \omega^2(\sigma_{jil} / \mu_{jil})$  – волновое число для поперечной волны,  $\mu$  – постоянная Ламэ,  $u_{xl}$  – составляющая вектора смещений,  $l=1\dots L$  – номер иерархического уровня,  $u_{xl}^0$  – составляющая вектора смещений сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности предыдущего ранга, если  $l=2\dots L$   $u_{xl}^0 = u_{x(l-1)}$ , если  $l=1$ ,  $u_{xl}^0 = u_x^0$ , что совпадает с соответствующим выражением для нормального поля в работе [13].

Таким образом, итерационные процессы (4) и (5) позволяют определить при заданных модулях упругости во вмещающей иерархическую неоднородность слоистой среде и в неоднородности пространственное распределение составляющих сейсмического поля на каждом иерархическом уровне. Затем по известным формулам работы [14] для каждого иерархического уровня можно вычислить распределение составляющих тензора деформации и тензора напряжений по распределению составляющих вектора смещений. Эта информация играет важную роль при оценке состояния среды в зависимости от структуры ее иерархичности и степени ее изменчивости.

## Заключение

В работе рассмотрена задача моделирования электромагнитного и сейсмического поля в слоистой среде с включениями иерархической структуры. Построены алгоритмы моделирования в электромагнитном случае для 3-D неоднородности, в сейсмическом случае для 2-D неоднородности. Представляет интерес с использованием полученных алгоритмов исследовать вопрос об изучении связи между тензорами напряжения и деформации на каждом иерархическом уровне и о возможном отклонении ее от обобщенного закона Гука. С другой стороны, с увеличением степени иерархичности среды увеличивается степень пространственной нелинейности распределения составляющих сейсмического и электромагнитного поля, что предполагает исключение методов линеаризации задачи при создании методов интерпретации. Кроме того, усложняется процесс комплексирования методов, использующих электромагнитное и сейсмическое поле для изучения отклика среды с иерархической структурой. Эта проблема неразрывно связана с формулировкой и решением обратной задачи для распространения электромагнитного и сейсмического полей в таких сложных средах, что является нашей ближайшей задачей.

## Литература

1. Хачай, О.А. Об изучении нестационарных процессов в литосфере Среднего Урала / О.А. Хачай, В.С. Дружинин, Г.И. Парыгин // Уральский геофизический вестник. – 2002. – № 3. – С. 103–107.
2. 300 лет горно-геологической службе России. Тезисы докладов Международной геофизической конференции. С.-Петербург: Изд-во ВИРГ – Рудгеофизика, ЕАГО – 2000. 738 с.
3. Садовский, М.А. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс / М.А. Садовский, Л.Г. Болховитинов, В.Ф. Писаренко – М.: Наука, 1987. – 98 с.
4. Дискретные свойства геофизической среды / Сборник научных трудов Института Физики Земли АН СССР – М.: Наука, 1989. – 173 с.
5. Родионов, В.Н. О моделировании природных объектов в геомеханике / В.Н. Родионов, И.А. Сизов, Г.Г. Кочарян // Дискретные свойства геофизической среды. – М.: Наука, 1989. – С. 14–18.
6. Панин, В.Е. Структурные уровни деформации твердых тел / В.Е. Панин, В.А. Лихачев, Ю.В. Гриняев. – Новосибирск: Наука, 1985. – 226 с.
7. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Г. Николис, И. Пригожин – М.: Мир, 1979. – 300 с.
8. Караев, Н.А. Рудная сейсморастворка / Н.А. Караев, Г.Я. Рабинович – М.: Геоинформмарк, 2000. – 468 с.
9. Караев, Н.А. Сейсмическая гетерогенность земной коры и проблемы интерпретации результатов региональных наблюдений в ближней зоне / Н.А. Караев // Неклассическая геофизика. – Саратов, 2000. – С. 30–32.
10. Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок / Е.И. Шемякин, Г.Л. Фисенко, М.В. Курленя и др. // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 5. – С. 830–832.
11. Открытие № 400. Явление зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок / Е.И. Шемякин, М.В. Курленя, В.Н. Опарин и др. // Бюллетень изобретений. – 1992. – № 1. – 5 с.
12. Хачай, О.А. Математическое моделирование и интерпретация переменного электромагнитного поля в неоднородной коре и верхней мантии Земли: дис. д-ра ф.-м. наук / О.А. Хачай. – Свердловск: ИГФ УрО РАН, 1994. – 314 с.
13. Хачай, О.А. О комплексировании сейсмических и электромагнитных активных методов для картирования и мониторинга состояния двумерных неоднородностей в N-слоистой среде / О.А. Хачай, А.Ю. Хачай // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2011. – № 2(219), Вып. 13. – С. 49–56.
14. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы. – 1956. – 435 с.

Хачай Ольга Александровна, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт геофизики УрО РАН, (Екатеринбург, Российская Федерация), [olgakhachay@yandex.ru](mailto:olgakhachay@yandex.ru)

Хачай Андрей Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, Уральский федеральный университет, (Екатеринбург, Российская Федерация), [andrey.khachay@usu.ru](mailto:andrey.khachay@usu.ru)

## MODELING OF ELECTROMAGNETIC AND SEISMIC FIELDS IN HIERARCHIC HETEROGENEOUS MEDIA

*O. A. Hachay*, Institute of Geophysics UB RAS (Yekaterinburg, Russian Federation)

*A. Y. Khachay*, Ural Federal University (Yekaterinburg, Russian Federation)

It had been constructed an algorithm for 3D modeling electromagnetic field for arbitrary type of source of excitation in N-layered medium with a hierarchic conductive intrusion, located in the layer number  $J$ . It had been constructed algorithms for 2D modeling of sound diffraction and linear polarized transversal seismic wave on an intrusion of hierarchic structure, located in the layer number  $J$  of N-layered elastic medium.

*Keywords: hierarchic medium, electromagnetic field, seismic field, algorithms of modeling.*

### References

1. Hachay O.A., Druginin V.S., Parigin G.I. Ob izuchenii nestationarnich processov v lithosphere Srednego Urala [About Research of no stationary Processes in the Lithosphere of the Middle Ural]. Uralskij geofizicheskiy vestnik [Ural Geophysical Bulletin]. 2002. No 3. P. 103–107.
2. Trista let gorno-geologicheskoy slughbi Rossii [300-years of mining- geological service of Russia]. Trudi mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii (S.-Peterburg 3–6 oktjabrja, 2000) Proceedings of the International Scientific Conference. (S.-Peterburg 3–6 october, 2000). S.-Petersburg, publishing by VIRG-RUDGEOPHYZIKA, EAGO. 2000. 738 p.
3. Sadovsky M.A., Bolhovitinov L.G., Pisarenko V.F. Deformatsia geofizicheskoy sredi I seismicheskij process [Deformation of Geophysical Medium and Seismic Process]. Moscow, Publishing in Nauka, 1987. 98 p.
4. Diskretnie svoistva geofizicheskoy sredi. [Discrete Features of Geophysical Medium]. Sbornik trudov Instituta Fiziki Zemli AN USSR [Proceedings of the Institute of Physics of the Earth of AN USSR]. Moscow, Publishing in Nauka, 1989. 173 p.
5. Rodionov V.N., Sizov I.A., Kocharjan G.G. O modelirovanii prirodnich objectov v geomechanike [About Modeling of Natural Objects in Geomechanics] Diskretnie svoistva geofizicheskoy sredi. [Discrete Features of Geophysical Medium]. Moscow, Publishing in Nauka, 1989. P. 14–18.
6. Panin V.E., Likhatchev V.A., Grinjaev Y.V. Strukturnie urovni deformatsii tverdich tel [Structural Levels of Deformation Elastic Bodies]. Novosibirsk. Publishing in Nauka, 1985. 226 p.
7. Nikolis G., Prigozin I. Samoorganizatsija v neravnovesnich sistemach [Selforganization in Nostable Systems] Moscow, Publishing in MIR, 1979. 300 p.
8. Karaev N.A., Rabinovitch N.A. Rudnaja seismorazvedka [Ore Seismic Prospecting] Moscow, Publishing in Geoinformmark, 2000. 468 p.
9. Karaev N.A. Seismicheskaja geterogenost zemnoj kori i problemi interpretacii rezultatov regionalnich nabludenij v blignei zone [Seismic Heterogeneity of the Earth's Crust and Interpretation Problems of the Results of Regional Observations in the Nearest Zone] Neklassicheskaja geofizika [No classic Geophysics]. Saratov, 2000. P. 30–32.

10. Shemjakin E.I., Fisenko G.L., Kurlenja M.V., Oparin V.N., et al. Effect zonalnoj dezintegracii gornich porod vokrug podzemnich virabotok [Effect of Zone Desintegration in Rock Massif around the Mine Holes] DAN USSR, 1986. V. 289. No 5. P. 830–832.
11. Shemjakin E.I., Kurlenja M.V., Oparin V.N., et al. Otkritie No 400. Javlenie zonalnoj dezintegratsii gornich porod vokrug podzemnich virabotok. [Discovery No 400. Phenomenon of Zone Disintegration in Rock Massif around the Mines Holes]. Bulletin izobrenenij [Bulletin of inventions] Moscow, 1992. No 1. 5 p.
12. Hachay O.A. Matematicheskoe modelirovanie I interpretatsija peremennogo electromagnitnogo polja v neodnorodnoj kore I mantii Zemli [Mathematical modeling and interpretation of alternating electromagnetic field in heterogeneous crust and mantle of the Earth] Dissertation of doctor of physics and mathematics. Sverdlovsk. IGF UB RAS, 1994. 320 p.
13. Hachay O.A., Khachay A.Y. O kompleksirovanii seismicheskikh I elektromagnitnich aktivnich metodov dlja kartirovanija I monitoring sostojanija dvumernich neodnorodnostey v N-sloinoj srede [About Integrating Seismic and Electromagnetic Active Methods for Mapping and Monitoring of the State of 2-D Heterogeneous Objects in N-layered Medium]. Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Kompyuternije tehnologii, upravlenije, radioelektronika" [Bulletin of South Ural State University. Series "Computer technologies, control, radioelectronics"], 2011. No 2(219). P. 49–56.
14. Lurie A.I. Prostranstvennie zadachi teorii uprugosti [Space Problems of Elastic Theory]. Moscow, Publishing by gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoj literature [State publishing house of technical and theoretical literature], 1956. 435 p.

*Поступила в редакцию 20 марта 2013 г.*

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЗМУЩЕНИЙ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ИЗ ОЧАГА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ<sup>1</sup>

*В.И. Голубев, Н.И. Хохлов*

Целью данной работы является разработка программного комплекса для проведения математического моделирования распространения упругих возмущений, зарождающихся в гипоцентре землетрясения, в гетерогенных средах. В качестве источника возмущения используется геофизическая модель очага землетрясения в виде подвижки по уже существующему разлому. Для описания динамического поведения среды используется система уравнений (гиперболического типа) механики твердого тела с явным выделением контактных границ неоднородностей. Она решается с помощью сеточно-характеристического метода на криволинейных структурных трехмерных сетках. Одной из особенностей используемого вычислительного алгоритма является его высокая масштабируемость по количеству вычислителей. Использование криволинейных сеток позволяет с высокой точностью описать большой класс расчетных геометрий. Авторами была проведена математическая постановка задачи, разработан программный комплекс и выполнена серия численных расчетов. В статье приведены результаты расчета распространения сейсмического возмущения в многослойной геологической среде и оценки сейсмостойкости наземного сооружения. Проведено исследование ускорения процесса расчета при увеличении количества вычислительных узлов.

*Ключевые слова:* сейсмическая активность, распространение упругих волн, гетерогенные среды, математическое моделирование, сеточно-характеристический численный метод, гиперболические системы уравнений.

## Введение

Во всем мире ежегодно происходит более десяти крупных землетрясений, которые приводят к огромному числу человеческих жертв, множественным разрушениям строений и существенному материальному ущербу. Таким образом, оценка безопасности жилых и промышленных сооружений при воздействии на них динамических нагрузок является одной из актуальных проблем, как при выборе мест для строительства объектов на этапе проектирования, так и при последующем сопровождении конструкций с целью предупреждения чрезвычайных ситуаций природного характера. Под динамическими нагрузками здесь понимаются, как природные, так и техногенные землетрясения.

В настоящее время наибольшее распространение получила методика оценки сейсмостойкости, называемая нелинейный динамический анализ. Она основана на замене реальной трехмерной геометрии строения некоторой осредненной аналитической моделью. Для нее проводится оценка отклика на сейсмическое воздействие. Стоит отметить, что входными данными модели, как правило, являются экспериментальные акселерограммы (значения ускорения на поверхности Земли). Так, например, в работах [1, 2] проводится оценка сейсмостойкости мостов, в работах [3, 4] – жилых сооружений. Необходимо от-

---

<sup>1</sup> Статья рекомендована к публикации программным комитетом Суперкомпьютерного форума «Суперкомпьютерные технологии в образовании, науке и промышленности – 2012».

метить, однако, что точность таких оценок невысока в силу значительного упрощения физической модели процесса.

В настоящей работе разрабатывается подход, основанный на полном моделировании динамических процессов, происходящих в геологической среде при инициации сейсмической активности. Использование определяющей системы уравнений механики твердого тела совместно с реологическими соотношениями и явным выделением границ всех неоднородностей позволяет провести математическое моделирование с учетом реальной геометрии и свойств, как геологического массива, так и наземного строения. Для идентификации мест инициации разрушений возможно использование критериев наступления пластических или хрупких режимов деформирования.

Поскольку определяющая система уравнений имеет гиперболический тип, для ее численного решения используется сеточно-характеристический метод [5] на криволинейных структурных сетках. Данный метод хорошо себя зарекомендовал для решения задач сейсморазведки в существенно гетерогенных средах [6]. Также в работе [7] продемонстрирована возможность точного моделирования поверхностных волн (Релея и Лава), а в работе [8] – перспективы по применению данного метода для задач сейсмостойкости (в двумерной постановке).

В первом разделе подробно описана предложенная численная механико-математическая модель очага землетрясения, основанная на геофизическом представлении о его природе. Перечислены параметры модели и предложен способ их восстановления по данным наземных наблюдений. Во втором разделе описана математическая модель геологической среды и численный метод, используемый в работе. В третьем разделе описан разработанный авторами программный комплекс и приведены результаты экспериментальной оценки масштабируемости реализованных вычислительных алгоритмов. В четвертом разделе приведены результаты моделирования землетрясения в слоистой гетерогенной среде, а также расчета сейсмостойкости наземного сооружения. В заключении приведено обобщение результатов работы.

## 1. Геофизическая модель очага землетрясения

Одной из особенностей данной работы является использование в качестве источника упругих возмущений механико-математической модели очага землетрясения. Отметим, что в геофизике существует множество различных моделей гипоцентра землетрясения [9], каждая из которых имеет экспериментальные факты, как свидетельствующие в пользу неё, так и против нее. Как правило, при возрастании сложности модели увеличивается число ее свободных параметров. Это приводит к усложнению однозначного решения задачи по восстановлению значений параметров модели по данным наземных измерений.

В настоящей работе было решено взять за основу максимально простую, но в то же время физически корректную модель, называемую «подвижка по разлому». Основой данной модели является геофизическое представление о землетрясении, как о процессе постепенного накопления упругих напряжений в земной коре, состоящей из отдельных блоков. Поскольку разломы между блоками заполнены брекчией, эффективная сила трения между бортами достаточно велика. Однако, при достижении некоторого порога, происходит проскальзывание граничащих блоков вдоль разлома и, соответственно, резкий спад напряжений. При этом вблизи разлома могут наблюдаться, как упругие, так и

пластические и хрупко-пластические процессы. На большом удалении от места инициации возмущения существенны лишь упругие процессы, которые выражаются в распространении упругих волн через геологическую среду.

Рассмотрим подробнее предлагаемую модель очага землетрясения. На рис. 1 изображен контакт двух блоков (линия контакта – разлом). Для задания ориентации плоскости разлома принято использовать два угла, определяемых следующим образом. Один из них называется *strike angle* ( $\vartheta$ ) и равен углу, который образуют линия пересечения плоскости разлома с горизонтальной плоскостью и направление на север. Вторым углом, называемый *dip angle* ( $\delta$ ), образуется между плоскостью разлома и горизонтальной плоскостью. Вдоль разлома происходит проскальзывание граничащих блоков, причем делается предположение о чистом продольном сдвиге, т.е. отсутствии составляющей скорости движения, перпендикулярной плоскости разлома. Ориентация вектора скорости задаётся углом между направлением вдоль линии пересечения плоскости разлома с горизонтальной плоскостью (*strike direction*) и направлением проскальзывания блоков (*slip direction*). Данный угол называется *rake angle* ( $\lambda$ ). Кроме того, для задания интенсивности возмущения используется также абсолютное значение скорости смещения. При этом предполагается, что в некоторой области, прилегающей к разлому, модуль вектора скорости постоянен по пространству. При переходе через плоскость разлома направление скорости меняется строго на противоположное направление.

По результатам измерений сейсмометров, расположенных на дневной поверхности, возможно определение ориентации плоскости разлома. Для оценки величины начальной скорости в источнике возмущения может быть использовано сравнение результатов численного моделирования с амплитудами зарегистрированных колебаний.

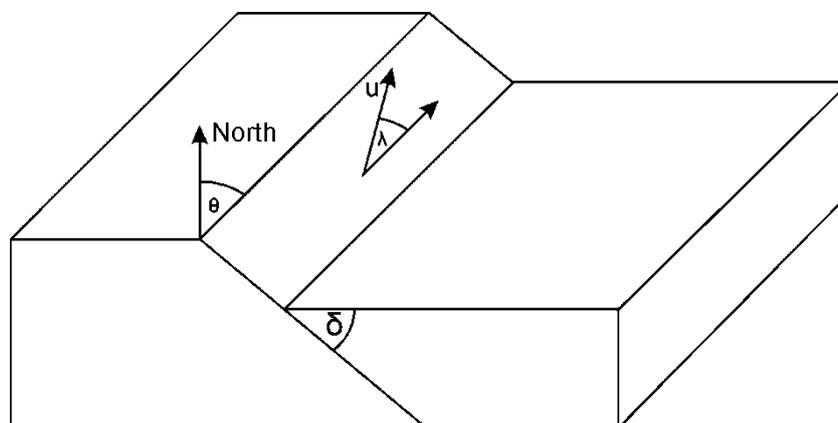


Рис. 1. Модель очага землетрясения

## 2. Математическая модель среды и численный метод

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твердом теле использовалась система динамических уравнений, объединяющая уравнения движения и реологические соотношения в виде:

$$\rho \cdot v_i = \nabla_j \cdot \sigma_{ij},$$

$$\sigma_{ij} = q_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} + F_{ij}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $v_i$  – компоненты скорости смещения,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  – компоненты тензоров напряжения и деформаций,  $\nabla_j$  – ковариантная производная по  $j$ -й координате,  $F_{ij}$  – добавочная правая часть.

Вид компонент тензора 4-го порядка  $q_{ijkl}$  определяется реологией среды. Для линейно-упругого тела

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Вторая группа уравнений представляет собой продифференцированный по времени закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

В этом соотношении  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные Ляме,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для численного решения динамических уравнений механики деформируемого твердого тела использовался сеточно-характеристический метод, подробнее с которым можно ознакомиться в [5, 6]. Возможность описания произвольных геометрий реализована за счет использования структурных криволинейных сеток. При этом выделение неоднородностей (например, различных геологических слоев) производится уже на этапе построения расчетной сетки. При этом для сшивки решений на границе областей используется постановка контактных условий в явном виде, не приводящая к появлению паразитных переотраженных волн.

### 3. Описание расчетного программного комплекса

На основе описанных моделей и методов был разработан программный комплекс, позволяющий проводить компьютерное моделирование динамических процессов, происходящих в геологической среде и материалах строений, при инициации сейсмической активности. В данный комплекс входят модули препроцессинга, расчета и постпроцессинга.

Для реализации совместимости с open source проектами использованы форматы GMSH и RED представления структурных сеток. Таким образом, задание произвольной геометрии возможно с использованием GUI GMSH.

Расчетный модуль использует технологию MPI для использования большого числа вычислителей. Начальная расчетная сетка делится на возможно равные части между процессами. При этом каждый процесс хранит только свою часть сетки, что позволяет существенно уменьшить потребление памяти и проводить расчеты на сетках, содержащих миллиарды узлов. Каждый процесс хранит еще слой приграничных ячеек для обмена актуальными данными с соседними процессам при расчете значений на следующем временном слое. Размер приграничного слоя зависит от порядка используемой разностной схемы. Так, для второго порядка точности он должен содержать две ячейки. Эффективность такого распараллеливания была протестирована на серии расчетов с сеткой, содержащей 64 миллиона узлов. При этом сравнивалось время расчета на разном количестве вычислителей: от 1 до 108 включительно. На рис. 2 приведены полученные зависимости, свидетельствующие о том, что масштабируемость составляет порядка 80 %.

Оценка сейсмостойкости строений основана на идентификации мест инициации разрушений при действии динамической нагрузки. На каждом временном шаге произво-

дится перебор всех узлов сеток, описывающих наземное строение. В каждом узле проверяется выполнение критерия Мизеса пластических деформаций. Те точки, в которых критерий выполнен, помечаются маркером, свидетельствующим о начавшихся в них разрушениях. Таким образом, по результатам расчета строится картина зависимости зон разрушений в строении от времени.

Для возможности детального анализа результатов расчета реализован функционал сохранения полного тензора напряжений, маркеров разрушений и вектора скорости в формате VTК.

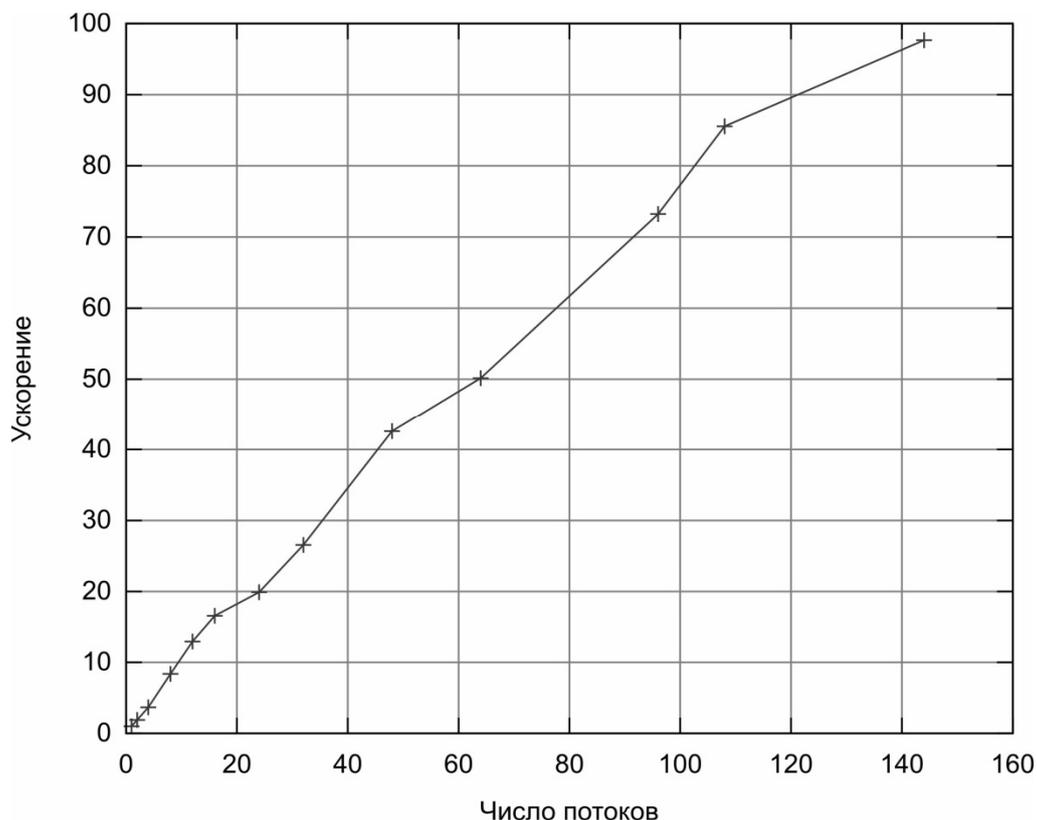


Рис. 2. Ускорение вычислительного алгоритма при увеличении числа потоков

#### 4. Результаты численного моделирования

Одним из преимуществ компьютерного моделирования сейсмической активности является возможность получения полной волновой картины в виде зависимости тензора упругости и вектора скорости от времени. При этом, конечно, сохраняется возможность построения всех общепринятых форматов (сейсмограмм, отдельных сейсмотрасс) представления процесса для сравнения с результатами полевых измерений.

В настоящей работе было проведено численное моделирование распространения упругого возмущения из очага землетрясения через слоистую геологическую среду. Она состояла из четырех слоев с различными упругими характеристиками, значения которых приведены в таблице. Результаты численного моделирования приведены на рис. 3 (изображено вертикальное сечение) в виде последовательности волновых картин. Детальный анализ волновой картины [8] показывает, что из гипоцентра распространяются четыре волны – две продольные и две поперечные. Когда они достигают границы разде-

ла слоев, в следующий слой проходит «проходящая» волна, а в предыдущий слой возвращается «отраженная» волна. Таким образом, в общем случае происходит ослабление всего возмущения.

Таблица

Характеристики слоистой среды

| Номер слоя | Толщина слоя, м | Плотность, кг/м <sup>3</sup> | Продольная скорость, м/с | Поперечная скорость, м/с |
|------------|-----------------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1          | 300             | 2500                         | 4190                     | 2793                     |
| 2          | 400             | 2500                         | 4650                     | 3100                     |
| 3          | 500             | 2500                         | 5250                     | 3500                     |
| 4          | 1600            | 2500                         | 5850                     | 3900                     |



Рис. 3. Волновые картины распространения сейсмического возмущения в многослойной среде

В настоящей работе также было проведено полное моделирование динамических процессов в области, включающей, как геологическую среду, так и наземное сооружение. Характерные размеры строения: 6 м \* 6 м \* 6 м. Толщина стен была выбрана равной 0,5 м. Рассматривалось влияние одной компоненты возмущения, распространяющегося из очага землетрясения, – поперечной волны большой амплитуды. Параметры вмещающего массива: плотность – 2000 кг/м<sup>3</sup>, скорость распространения продольной волны – 2000 м/с, скорость распространения поперечной волны – 1200 м/с. Материал строения имеет следующие свойства: плотность – 2500 кг/м<sup>3</sup>, скорость распространения продольной волны – 4000 м/с, скорость распространения поперечной волны – 2500 м/с.

Результатами моделирования являются рассчитанные поля скорости и напряжений, эволюционирующие во времени. Также был проведен поиск мест, в которых начинается разрушение здания. Расчетная сетка содержала порядка 13 миллионов узлов, а наибольший размер ячейки составлял 6 см. Результаты моделирования приведены на рис. 4.

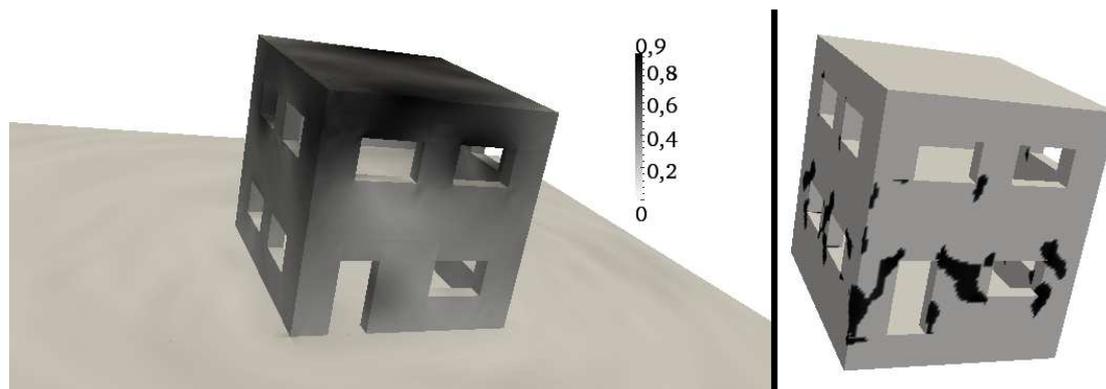


Рис. 4. Модуль скорости (слева) и места разрушений (справа)

## Заключение

В настоящей работе предложена численная механико-математическая модель гипоцентра землетрясения. Проведена разработка программного комплекса, позволяющего проводить полномасштабное моделирование динамических процессов, происходящих в геологической среде при инициации сейсмической активности. Эмпирическая оценка масштабируемости свидетельствует о высокой степени параллелизма используемых программных алгоритмов. На основе серии расчетов изучено распространение упругих возмущений из очага землетрясения в слоистой геологической среде. На основе анализа выполнения критерия Мизеса пластических деформаций проведена идентификация мест разрушений в наземном строении путем прямого численного моделирования.

Одной из особенностей геологических сред является их внутренняя трещиноватость: наличие газонасыщенных и флюидонасыщенных трещин протяженностью от нескольких сантиметров до десятков метров. Для корректного моделирования волновых процессов вблизи таких неоднородностей необходимо использовать очень подробную сетку. Однако равномерное измельчение сетки во всей расчетной области существенно увеличит время расчета. Таким образом, дальнейшим направлением исследования предполагается разработка алгоритмов сшивки структурных и неструктурных сеток, позволяющих описать неоднородности с использованием локального измельчения расчетной сетки.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.132.21.1809, и РФФИ в рамках научного проекта № 12-07-31028.*

## Литература

1. Ala Saadeghvaziri, M. Seismic behavior and capacity/demand analysis of three multi-span simply supported bridges / M. Ala Saadeghvaziri, A.R. Yazdani-Motlag // Engineering Structures. – 2008. – Vol. 30. – P. 54–66.
2. Soneji, B.B. Influence of soil structure interaction on the response of seismically isolated cable-stayed bridge / B.B. Soneji, R.S. Jangid // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2008. – Vol. 28. – P. 245–257.

3. Maniyar, M.M. Probabilistic seismic performance evaluation of non-seismic RC frame buildings / M.M. Maniyar, R.K. Khare, R.P. Dhakal // Structural Engineering and Mechanics. – 2009. – Vol.33, No. 6. – P. 725–745.
4. Solberg, K.M. Rapid expected annual loss estimation methodology for structures / K.M. Solberg, R.P. Dhakal, J.B. Mander, B.A. Bradley // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 2008. – Vol.37, No. 1. – P. 81–101.
5. Магомедов, К.М. Сеточно-характеристические численные методы / К.М. Магомедов, А.С. Холодов – М.: Наука, 1988. – 288 с.
6. Квасов, И.Е. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом / И.Е. Квасов, С.А. Панкратов, И.Б. Петрова // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 9. – С. 13–22.
7. Хохлов, Н.И. Моделирование сейсмических явлений сеточно-характеристическим методом / Н.И. Хохлов, И.Б. Петров // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3. – С. 159–167.
8. Голубев, В.И. Воздействие природных катастроф на наземные сооружения / В.И. Голубев, И.Е. Квасов, И.Б. Петров // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 8. – С. 46–54.
9. Поле упругих напряжений Земли и механизм очагов землетрясений / Л.М. Балакина, А.В. Введенская, Н.В. Голубева и др. – М.: Наука, 1972. – 191 с.

Голубев Василий Иванович, аспирант, Московский физико-технический институт, w.golubev@mail.ru

Хохлов Николай Игоревич, инженер, Московский физико-технический институт, k\_h@inbox.ru

---

## MATHEMATICAL MODELLING OF ELASTIC PERTURBATIONS PROPAGATING FROM THE EARTHQUAKE HYPOCENTER

*V.I. Golubev*, Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny, Russian Federation),

*N.I. Khokhlov*, Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny, Russian Federation)

The goal of this article is the development of the research software for the mathematical modelling of elastic waves propagation originated in the earthquake hypocenter through heterogeneous media. As a source of the perturbation the geophysical focal mechanism model based on the slipping along the fault is used. For the description of dynamic behavior of media the hyperbolic system of equations of elastic media is used with the explicit allocation of contact borders of heterogeneities. It is solved using the grid-characteristic method on curvilinear structured 3D meshes. One feature of used numerical algorithm is its high scalability per core. The usage of curvilinear meshes allows describing a wide variety of geometries with high precision. Mathematical formulation of problem, development of the research software and a set of numerical experiments were done by authors. The results of modelling of propagation of seismic perturbation through geological multilayered medium and assessment of seismic resistivity of ground facility are described in this article. The estimation of software scalability per core was carried out.

*Keywords: seismic activity, propagation of elastic waves, heterogeneous media, mathematical modeling, numerical grid-characteristic method, hyperbolic system of equations.*

## References

1. Ala Saadeghvaziri M., Yazdani-Motlag A.R. Seismic behavior and capacity/demand analysis of three multi-span simply supported bridges // *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. P. 54–66.
2. Soneji B.B., Jangid R.S. Influence of soil structure interaction on the response of seismically isolated cable-stayed bridge // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2008. Vol. 28. P. 245–257.
3. Maniyar M.M., Khare R.K., Dhakal R.P. Probabilistic seismic performance evaluation of non-seismic RC frame buildings // *Structural Engineering and Mechanics*. 2009. Vol.33, No. 6. P. 725–745.
4. Solberg K.M., Dhakal R.P., Mander J.B., Bradley B.A. Rapid expected annual loss estimation methodology for structures // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 2008. Vol.37, No. 1. P. 81–101.
5. Magomedov K.M., A.S. Holodov Setochno-harakteristicheskie chislennye metodi [Numerical Grid-Characteristic Methods]. M.: Science, 1988. 288 p.
6. Kvasov I.E., Pankratov S.A., Petrov I.B. Chislennoe modelirovanie seismicheskikh otklikov v mnogosloinnykh geologicheskikh sredakh setochno-harakteristicheskim metodom [Numerical Modelling of Seismic Responses in Multilayered Geological Media using Grid-Characteristic Methods]. *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modelling]*. 2010. Vol. 22, No 9. P. 13–22.
7. Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modelirovanie seismicheskikh yavlenij setochno-harakteristicheskim metodom [Modelling of Seismic Phenomena using Grid-Characteristic Method]. *Trudi MFTI [Proceedings of MIPT]*. 2011. V. 3. P. 159–167.
8. Golubev V.I., Kvasov I.E., Petrov I.B. Influence of Natural Disasters on Ground Facilities // *Mathematical Modelling and Computer Simulations*, 2012. Vol. 4, No. 2. P. 129–134.
9. Balakina L.M., Vvedenskaya A.V., Golubeva N.V., Misharina L.A., Shirokova E.I. Pole uprugih napryazhenij Zemli i mehanizmi ochagov zemletryasenij [Elastic Stress Field of the Earth and earthquake focal mechanisms]. M.: Science, 1972. 191 p.

*Поступила в редакцию 5 марта 2013 г.*

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ КРУПНОГО ПРОМЫШЛЕННОГО ГОРОДА (НА ПРИМЕРЕ г. ЧЕЛЯБИНСКА)

*О.Ю. Ленская, С.М. Абдуллаев, А.И. Приказчиков, Д.Н. Соболев*

В статье исследована возможность применения модели WRF (Weather Research and Forecasting) для исследования характеристик пограничного слоя атмосферы и его эволюции над крупным промышленным городом в условиях зимнего антициклона. Обсуждается влияние процессов, связанных с антропогенной деятельностью, неоднородностью городского ландшафта на развитие городского острова тепла. Получено, что WRF относительно хорошо описывает наблюдаемую структуру пограничного слоя с его температурной инверсией в нижнем 150-метровом слое и почти изотермическую стратификацию в однородном слое выше 300 м. Однако интенсивность инверсии оказывается значительно заниженной (примерно на 4 °С). Вычислительные эксперименты показывают, что абсолютная разность между наблюдаемой и рассчитанной температурой монотонно убывает во времени и после 18 часов от начала расчета сохраняется в пределах  $\pm 1$  °С на всех расчетных уровнях в пограничном слое. Обнаруживается некоторая инерция в эволюции смоделированных характеристик пограничного слоя в период восхода – захода солнца, когда происходит быстрое изменение температуры воздуха в нижнем слое (менее 150 м).

При низких температурах (ниже  $-10$  °С) и слабых ветрах поля метеохарактеристик изменяются под воздействием городского острова тепла, представляя собой две температурные аномалии до  $+2 \div +4$  °С, разделенные более холодной областью долины реки. Смоделированное поле ветра на разных уровнях в пограничном слое согласуется с температурным максимумом над обширной промышленной территорией в том, что в приземном слое здесь формируется зона дивергенции ветра, которая связана с нисходящими движениями воздуха, тогда как зона конвергенции вдоль долины реки связана с горизонтальными движениями «туннельного эффекта». Обнаружено, что при взаимодействии городского острова тепла с особенностями орографии города формируется необычно сильная струя на нижних уровнях над возвышенной частью города, занятой металлургическими предприятиями, которая, возможно, ответственна за сдвиги ветра над этой территорией. В целом структура циркуляций городского острова тепла может рассматриваться как стационарный фронт – один из новых объектов будущих мезомасштабных исследований.

*Ключевые слова:* мезомасштабное моделирование с WRF, пограничный слой атмосферы, обоснование схем параметризации, двухкупольный городской остров тепла, природно-антропогенные ландшафты, нижнеуровневая струя.

### Введение

Численный прогноз погоды для урбанизированных территорий является одним из главных направлений современной метеорологии. Среди прочих задач направления, представляемая работа касается двух взаимосвязанных вопросов влияния города на эволюцию метеорологических систем. Первый вопрос возникает из необходимости сочетания высокого пространственно-временного разрешения моделируемых полей с учетом того, что урбанизация территорий настолько изменяет термодинамические характеристики подстилающей поверх-

ности, что это отражается на температурном, влажностном и ветровом режиме пограничного слоя атмосферы в локальном и региональном масштабе. Это, очевидно, требует не только детальной постановки начальных и граничных условий для мезомасштабных моделей, но и разработки более совершенных моделей пограничного и приземного слоев, схем параметризации турбулентного обмена, процессов излучения и других физических процессов, происходящих в антропогенных ландшафтах. Вторым вопросом возникает в связи с уникальным результатом взаимодействия города и окружающей среды – появлению «городского острова тепла», обозначенного не только температурным контрастом между крупным городом и пригородными территориями, но и особой системой циркуляций городского атмосферного пограничного слоя, в том числе определяющей перенос и рассеяние загрязняющих веществ.

Для изучения и прогноза атмосферных процессов, протекающих над ограниченной территорией, используются мезомасштабные метеорологические модели, которые базируются на трехмерных нестационарных уравнениях гидротермодинамики атмосферы и на параметризации процессов тепло- и влагообмена между деятельным слоем земной поверхности и атмосферой. Несмотря на то, что компьютерная реализация таких моделей требует применения высокопроизводительных вычислительных ресурсов, исследования метеоусловий, складывающихся под влиянием урбанизации, ведутся во многих крупных городах мира. Дело в том, что наряду с общими закономерностями инфраструктуры мегаполисов, каждый город имеет свое неповторимое сочетание природных и техногенных условий, позволяющих ожидать и индивидуальных проявлений «острова тепла» в каждом конкретном городе.

Очевидно, что исследования локальных циркуляций будут актуальны для большинства крупных городов России с неблагоприятным по качеству атмосферным воздухом и, в частности, для Челябинска, сочетающего исторически функцию регионального мегаполиса и крупнейшего промышленного центра. В настоящей работе оценены возможности использования мезомасштабной численной модели WRF (Weather Research and Forecasting) для описания общих характеристик городского «острова тепла» и строения пограничного слоя атмосферы над территорией г. Челябинска.

## **1. Краткое описание модели прогностической модели Weather Research and Forecasting**

Модель WRF – это мезомасштабная прогностическая модель и система ассимиляции данных нового поколения. Создание WRF является результатом совместной работы многих научных организаций, руководимых Национальным центром атмосферных исследований (NCAR) США. Модель разработана для исследования атмосферных процессов и явлений среднего пространственного масштаба, в частности мезомасштабных систем осадков. Она включает в себя передовые

технологии численного моделирования и ассимиляции данных, возможности расчета на вложенных сетках и усовершенствованные методы параметризации физических процессов.

WRF может быть использована для выполнения широкого круга задач: от изучения идеализированных циркуляционных систем (например, LES, конвекция, бароклинные волны) до прогнозирования погоды в оперативном режиме, с преимущественным применением на пространственных сетках с шагом 1–10 км. Инфраструктура программного обеспечения WRF Software Framework включает в себя динамические ядра (dynamic solvers), связанные с ними пакеты физических параметризаций и программы для их запуска. В модели WRF представлены два динамических ядра. Первое, Advanced Research WRF (ARW) решает задачи для ограниченной территории в декартовой системе координат, и является разработкой Национального центра атмосферных исследований (NCAR) [1]. Второе, Nonhydrostatic Mesoscale Model (NMM), произведено в Национальном центре прогнозов окружающей среды (NCEP) США, и имеет существенное отличие от ARW, хотя многие параметризации физических процессов могут использоваться для решения на обоих ядрах [2].

В данной работе была использована модель WRF с динамическим ядром ARW. WRF-ARW является численной негидростатической моделью атмосферы (с возможностью гидростатического режима) в предположении полностью сжимаемой среды. В модели используется C-сетка Аракавы и схемы интегрирования Рунге-Кутты 2-го и 3-го порядка по времени, а также схемы 2-6 порядка для переноса в горизонтальном и вертикальном направлениях. Код модели WRF-ARW содержит несколько программ инициализации (ideal.exe и real.exe), программу численного интегрирования (wrf.exe) и ряд других. Модель WRF-ARW поддерживает множество возможностей: моделирование реальных и идеализированных данных, выбор для них различных граничных условий, обширный набор параметризаций физических процессов, негидростатическое и гидростатическое приближение (на выбор), проведение расчетов во вложенных областях с односторонним и двусторонним влиянием; использование в приложениях с масштабами, меняющимися от метров до тысяч километров. Модель WRF установлена в суперкомпьютерном центре Южно-Уральского государственного университета на суперкомпьютерах «СКИФ-Аврора» и «Торнадо». Производительность суперкомпьютеров семейства «СКИФ-Аврора» исследовалась в [3] для решения индустриальных задач. Данная работа представляет собой опыт решения задач суперкомпьютерного моделирования природной среды, в частности атмосферного пограничного слоя.

Системными требованиями, необходимыми для установки и работы модели являются компилятор ФОРТРАН 90 или 95, PERL 5.04 или выше, библиотеки MPI и OpenMP. Программный интерфейс API ввода/вывода модели WRF поддерживает форматы: netCDF, pnetCDF, PHD5, GriB 1 и GriB 2, для которых должны быть установлены соответствующие библиотеки.

Для выражения процессов обмена между атмосферой и земной поверхностью используется модель подстилающей поверхности Noah LSM. Ее использование обусловлено необходимостью учета потоков тепла, момента импульса и влаги подсеточного масштаба. Нижняя граница в атмосферных моделях является единственной, где требуется явное физическое представление этих потоков. Численная модель земной поверхности играет особо важную роль в случае использования более сложных схем параметризации пограничного слоя атмосферы, которые очень чувствительны к потокам массы и энергии. Помимо этого качество модели поверхности играет большую роль в выборе схем параметризации облачности, которые чувствительны к структуре пограничного слоя. Прогностическим численным моделям требуется учитывать мезомасштабные циркуляции, которые вызваны неоднородностями альбедо поверхности, температуры и влажности почвы, типом землепользования и снеговым покровом. Модель Noah LSM обеспечивает для атмосферной модели по крайней мере четыре важных параметра: 1) поток явного тепла; 2) поток скрытого тепла; 3) поток длинноволновой радиации от земной поверхности; 4) количество отраженной коротковолновой радиации, что означает знание альбедо поверхности, включая эффект отражения от снегового покрова. Noah LSM в составе WRF учитывает физические процессы, протекающие в замерзших грунтах, временную изменчивость плотности снега, пространственно неоднородный снеговой покров и шероховатость его поверхности. Также модель содержит описание процессов передачи тепла под снеговым покровом, переменную теплопроводность почвы, сезонную изменчивость излучения земной поверхности. Помимо этого в модель Noah введены дополнительные схемы для урбанизированных участков земной поверхности: UCM и BEP – однослойная и многослойная модели приземного слоя.

Для географической привязки модели: указание региона, для которого производится прогноз, характер рельефа и распределение типов землепользования земной поверхности – используются глобальные топографические данные различного разрешения – от 10 угловых минут до 30 секунд. Входные данные метеорологических полей представляют собой архивы данных реанализа глобальной модели GFS (Global Forecasting System) NCEP, либо Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF) и других центров, либо данные предшествующего прогноза самой модели WRF. Начальные и граничные условия для локальных метеорологических моделей формируются с использованием данных объективного анализа.

## **2. Характеристика региона, исходных данных и конфигурации модели**

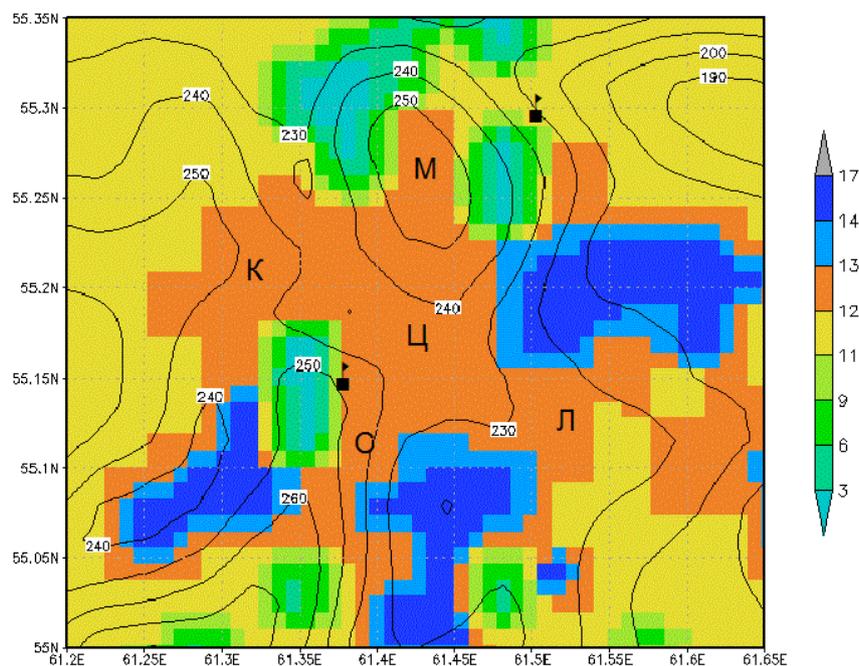
Челябинск расположен в зоне умеренно континентального климата с типичными для лесостепной зоны среднегодовыми значениями температур  $+2.4\text{ }^{\circ}\text{C}$  и количеством осадков 550 мм (1961–1990 гг.). В пределах городской черты пере-

пады высот составляют 210–240 метров над ур.м., с постепенным понижением с запада на востоку. Слабохолмистый рельеф разрезается долиной р. Миасс и ложбинами крупных водоемов: на северо-востоке — это оз. Первое, на юге — оз. Смолино и Синеглазово, на юго-западе — Шершневское водохранилище. В последние десятилетия в Челябинске и на территории Южного Урала в целом отмечается снижение суровости зим по причине повышения средних зимних температур [4]. Расчет интенсивности острова тепла Челябинска проведенный по данным, пригородных метеостанций Шершни и Баландино и восьми стационарных постов, расположенных в черте города, показал, что с 1987 по 2004 г. среднегородские температуры в зимние месяцы были выше пригородных на  $1,4 \div 4,8$  °С. В теплый сезон контрасты значительно слабее: от 0,8 до 1,4 °С.

Поскольку в [4] было установлено, что остров тепла в приземном слое имеет двухкупольную форму, обусловленную особенностями топографии Челябинска, то первой задачей, решаемой с помощью численного моделирования, было уточнение пространственной формы и описание эволюции «острова» во времени. В качестве периода для интенсивного исследования выбран интервал с 8 по 12 декабря 2011 года, когда над Южным Уралом установилась типичная для этого времени года зимняя антициклональная погода, характеризующаяся умеренно низкими приземными температурами (ниже  $-10$  °С) и слабым ветром до 1–2 м/с. Такие метеорологические условия в сочетании с увеличением выбросов тепла и влаги промышленностью, энергетикой и автотранспортом, способствуют формированию «острова тепла» над городом, при этом температура воздуха внутри городской черты Челябинска может превышать пригородную на 2 °С и более [4]. Кроме того, интерес к исследованию эволюции острова в такой ситуации объясняется тем, что в условиях штиля и температурной инверсии оседания рассеяние примесей в атмосфере затруднено, и в городе формируется повышенный уровень загрязнения воздуха.

Область моделирования ограничена по широте  $54,8 \div 55,5$  с.ш. и по долготе  $60,7 \div 62,1$  в.д., фрагмент ее, включающий г. Челябинск и окружающие его территории, представлен на рис. 1. Разрешение модели по горизонтали составляет 2 км, горизонтальная сетка включает  $45 \times 40$  точек. По вертикали было задано 34  $\sigma$ -уровня, 7 из которых находятся в нижнем слое 1 км. Расчеты производились для периода с 00:00 ВСУ 08.12.2011 по 00:00 ВСУ 10.12.2011, граничные условия менялись каждые 6 ч. В качестве начальных и граничных данных использовались метеоданные анализа NCEP с пространственным разрешением 0,5 град по широте и долготе. После ряда тестов с одними и теми же начальными и граничными условиями и с учетом работ других авторов по моделированию процессов в холодный период года были выбраны следующие схемы параметризации, описанные в [5]: для микрофизических процессов – WRF single-moment 3-class scheme [6]; для потоков длинноволновой радиации – RRTM [7]; для потоков коротковолновой радиации – схема Дудья [8]; параметризация пограничного слоя – схема университета Yonsei [9]; для параметризации процессов в почве и на по-

верхности – схема Noah [10]. Для задания параметров подстилающей поверхности в городской застройке использована однослойная модель городского приземного подслоя UCM (Urban Canopy Model)



**Рис. 1.** Фрагмент области моделирования, содержащий территорию города, с указанием типов землепользования. Обозначения соответствуют принятым в модели WRF категориям: 13 – городская застройка; 12 – пашня, 6 – 7 – залежи, покрытые кустарником и др., 10 – 11 местности, занятые луговой растительностью, заболоченные земли; 1–2, 3–4, 5 – хвойный, лиственный и смешанный лес, 17 – водные объекты. Символами указано положение АМСГ Баландино и ЧЦГМС МТП-5 (см. в тексте). Расположение основных районов города: М – Metallургический, К – Калининский, Ц – Центральный, С – Советский, Л – Ленинский

Поскольку в основные задачи работы входило тестирование качества моделирования городского пограничного слоя (ПСА) в конкретных условиях устойчивой погоды, заснеженного окружения и водоемов, покрытых льдом, то главным образом необходимо было убедиться, что выбранная конфигурация модели удовлетворительно описывает внутрисуточные изменения в ПСА. Для этого ежечасные выходные продукты модели были сопоставлены со сглаженными во времени данными измерений температуры, ветра и других метеовеличин на уровне 2 м АМСГ Баландино и данными микроволнового температурного профилера МТП-5, установленного на крыше Челябинского гидрометцентра (ЧЦГМС). Поскольку МТП-5 измеряет температуру воздуха в слое от 0 до 1000 м над поверхностью земли с шагом 50 м, то эти данные были линейно интерполированы к высоте близлежащих  $\sigma$ -уровней модели (всего 8 уровней).

Географические точки расположения профилера ( $55,15^\circ$  с.ш.,  $61,37^\circ$  в.д.) и метеостанции ( $55,3^\circ$  с.ш.  $61,5^\circ$  в.д.) достаточно репрезентативны для оценки вер-

тикального развития острова тепла и его периферийного взаимодействия с окружающей воздушной массой. Профилемер (см. рис. 1) находится в пределах жилой застройки Центрального района города, недалеко от плотины Шершневского водохранилища. Метеостанция областного аэропорта АМСГ Баландино расположена к северу от озера Первое, непосредственно у северо-восточной границы города, к востоку от Челябинского металлургического комбината.

### 3. Результаты моделирования и их анализ

По способам сопоставления моделируемых и наблюдаемых полей метеовеличин, результаты работы объединены в три раздела, где обсуждается эволюция параметров приземного слоя и термическая структура погранслоя (3.1), пространственно-временные особенности (3.2) и циркуляционная система острова тепла (3.3).

#### 3.1. Эволюция параметров пограничного слоя

Сравнение суточного хода модельной  $t_m$  и измеренной  $t_o$  температуры воздуха показало, что модель существенно сглаживает суточную амплитуду наблюдаемых в реальности колебаний температуры (рис. 2а). При этом средние за период наблюдений значения модельной температуры воздуха  $t_m$  и наблюдавшейся  $t_o$

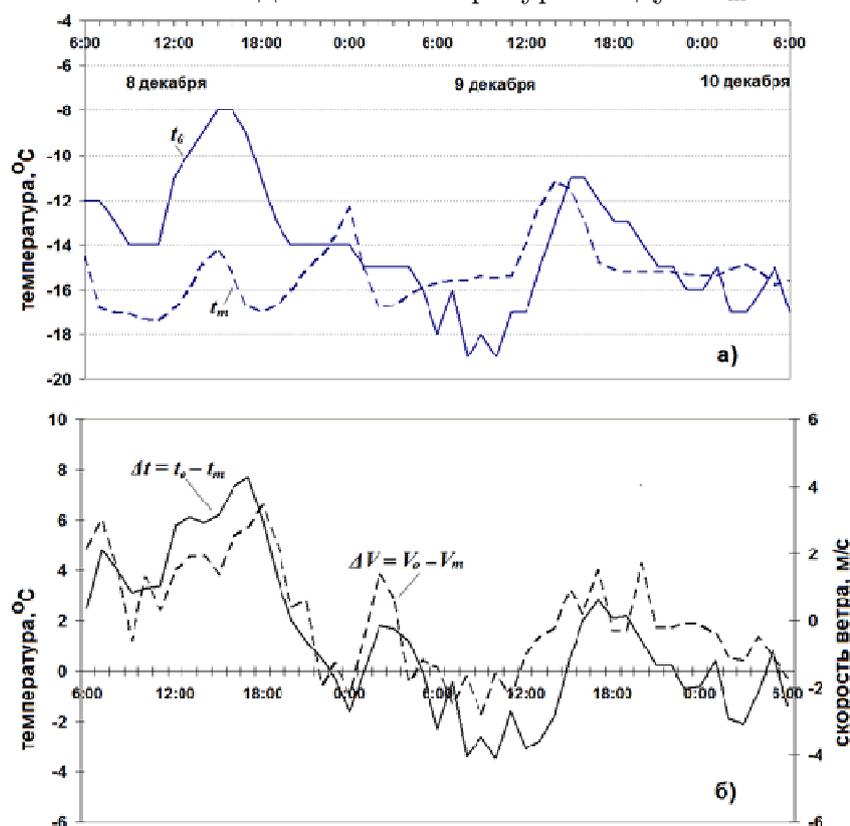


Рис. 2. а) Суточный ход температуры на уровне 2 м по данным измерений  $t_o$  и смоделированной  $t_m$  в точке расположения АМСГ Баландино;  
б) суточный ход разности температуры  $\Delta t = t_o - t_m$  и скорости ветра  $\Delta V = V_o - V_m$  в той же точке

на метеостанции Баландино достаточно близки, а соответствующие стандартные отклонения сильно различаются:  $t_m = -15.3 \pm 1.4$  °C и  $t_o = -14.1 \pm 2.7$  °C. Неизвестно, может ли это означать, что при осреднении за длительный период модель так же произведет почти несмещенную оценку среднего от наблюдений, но в более узком интервале отклонений, т.е. подавляет ли модель развитие турбулентности. Другим требующим интерпретации фактом является уменьшение абсолютной разности  $\Delta t = t_o - t_m$  с 4 °C в начале расчетов до  $-0.3$  °C в конце (см. рис. 2б).

Ниже будет показано, что аналогичное явление уменьшения ошибок модели во времени свойственно всему нижнему слою атмосферы. Например, средняя скорость ветра на станции,  $V_o = 2,0 \pm 1,6$  м/с и была слегка больше моделируемой,  $V_m = 1,7 \pm 1$  м/с, но и в этом случае разница в скорости ветра  $\Delta V = V_o - V_m$  уменьшалась от начала к концу периода наблюдений в явном согласии с ходом разности температур  $\Delta t$  (рис. 2 б). Наиболее существенное отличие  $\Delta V$  обнаружено 8 декабря с 6:00 до 20:00 местного времени, когда на станции дул юго-восточный ветер  $\approx 4$  м/с, а модельный ветер  $V_m$  был  $\approx 2$  м/с, достигнув сопоставимого значения 4,2 м/с лишь к началу следующих суток. В дальнейшем ветер на станции стих и знак  $\Delta V$  в целом определялся значением скорости модельного ветра  $V_m$ .

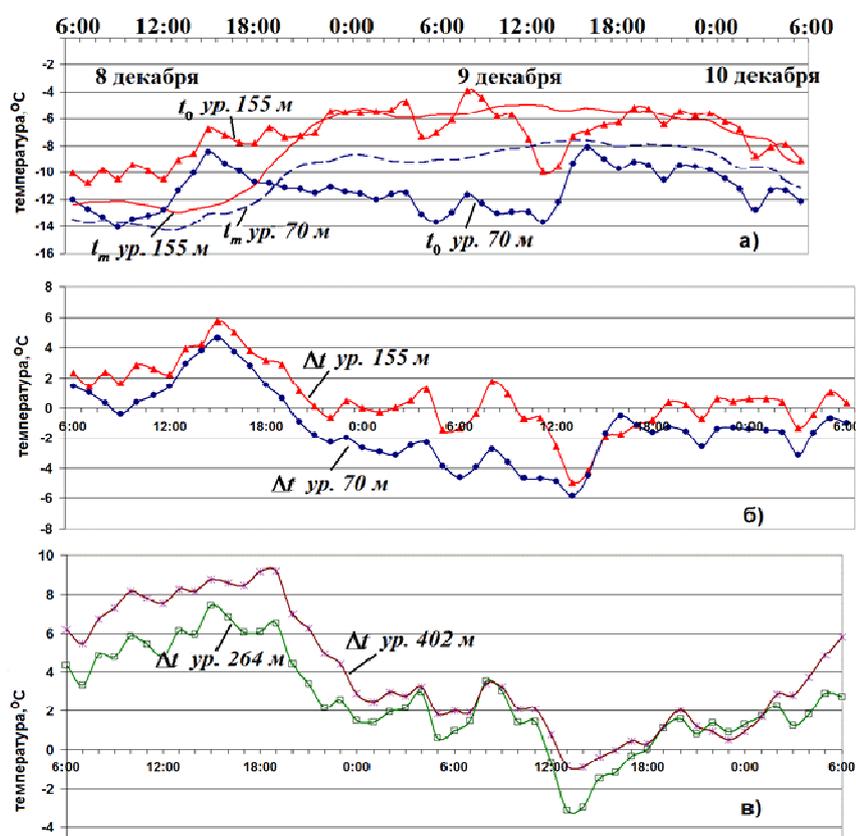
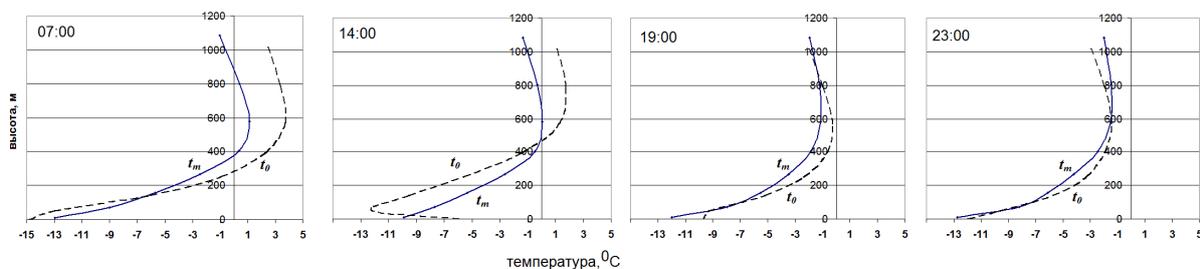


Рис. 3. Временной ход а) наблюдаемой  $t_o$  и моделируемой  $t_m$  температуры воздуха на высотах 70 и 155 м, а также б) их абсолютной разности  $\Delta t = t_o - t_m$  на высотах 70 и 155 м; и в) на высотах 264 и 402 м

Сравнение наблюдаемого давления и давления, моделируемого WRF, показывает, что в течение первых 18 часов расчетов шло очевидное «приспособление» модели к начальным и граничным условиям. Так, если первые 18 часов на станции шел рост давления с 1004 до 1006 гПа, то модельное приземное давление адаптировалось в течение первых 18 часов с 998 гПа до 1007 гПа. Очевидное замедление согласования полей давления видимо повлияло и на ошибки других приземных величин. В связи с этим в остальной части работы мы акцентируем внимание на интервале времени после 00:00 09 декабря, когда результаты моделирования можно было считать «установившимися».

Эволюция наблюдаемой и моделируемой термической структуры погранслоя на высотах, характеризуется графиками на рис. 3 и 4. Рис. 3 демонстрирует временной ход наблюдаемой  $t_o$  и моделируемой  $t_m$  температуры воздуха на высотах 70 м и 155 м (см. рис. 3а), а также их абсолютной разности  $\Delta t$  (см. рис. 3б). Как и следовало ожидать, на ближайшем к земной поверхности уровне 70 м суточная амплитуда как  $t_o$ , так и  $t_m$  выше. Этому же уровню по высоте соответствует и наибольшая средняя разность  $\Delta t$  между моделью и наблюдениями. Как и в случае приземных температур средние значения  $t_o$  и  $t_m$  на этой высоте относительно мало отличаются:  $-11,4\text{ }^\circ\text{C}$  и  $-10,1\text{ }^\circ\text{C}$ , соответственно, причем абсолютная разность температур максимальна  $4,6\text{ }^\circ\text{C}$  в начале расчетов и, испытывая колебания, спустя 12 часов уменьшается до  $0,5\text{ }^\circ\text{C}$ . Выше, на уровнях 264 м и 402 м (см. рис. 3в) размах отклонений  $\Delta t$  на  $2\text{--}3\text{ }^\circ\text{C}$  больше, чем в нижнем слое, причем наименьшие модули  $\Delta t$  наблюдаются на 155 м.

Необходимо заметить, что темп уменьшения ошибки на разных высотах различен, поэтому воспроизводимая моделью температурная стратификация  $t_m(z)$  существенно отличается от наблюдаемой  $t_o(z)$  (см. рис. 4). Так, даже когда средние  $\Delta t$  минимальны, сравнивая утреннюю (07:00) и дневную (14:00) 09.12.2011 стратификации, можно заметить, что модель существенно сглаживает температурный контраст между нижним и верхним уровнем пограничного слоя, т.е. фактически недооценивает интенсивность инверсии. При этом можно заметить, что различия  $t_m(z)$  и  $t_o(z)$  утром и днем более существенны, чем в вечерний период (19:00, 23:00). Возвращаясь к суточному ходу рис. 2а и рис. 3б, можно заметить, что именно в период роста температур наблюдаются максимальные отклонения  $\Delta t$ .



**Рис. 4.** Температурная стратификация по данным МТП-5  $t_o$  и расчетам WRF  $t_m$  в 07, 14, 19 и 23 ч местного времени (BCB+6 ч) 09.12.2011

В целом можно сделать выводы, что при данном пространственном разрешении и выбранных схемах параметризации модель по отношению к наблюдаемым данным занижала значения температуры воздуха на высотах от 150 м до 600 м. И наоборот, на ближайших к поверхности уровнях, расчетные значения слегка превышают измеренные. Рассчитанная по модели температурная стратификация имеет более сглаженный вид. Вместе с тем модель так же регистрирует инверсионную стратификацию в пограничном слое, связанную с оседанием и адиабатическим нагревом воздуха в антициклоне. Однако интенсивность инверсии оказывается заниженной: разница между показаниями МТП-5 и моделью в слое от земной поверхности до высоты 800 м составляет 4,3 °С за период расчета.

### 3.2. Пространственно-временные особенности острова тепла

В работах [4, 11], основываясь на данных измерений температуры воздуха и скорости ветра на постах экологического мониторинга в черте города и двух пригородных метеостанций, было установлено, что в холодный период года остров тепла интенсифицируется. При этом изоплета +2 °С в пределах городской черты повторяет очертания долины реки Миасс, разделяющей остров тепла на западную и восточные части. Тем самым моделируемый остров тепла Челябинска должен иметь черты, характеризующиеся двухкупольной формой. На рис. 5 представлено полученное по результатам моделирования распределение аномалии температуры воздуха на уровне 2 м над землей: разности между значением температуры в каждой точке сетки и средней температуры по области 55,00° ÷ 55,35° с.ш. и 61,20° ÷ 61,65° в.д. Как и ожидалось, в ночные и предутренние часы (рис. 5а), когда температуры минимальны, интенсивность острова тепла максимальна. В нашем случае контраст между температурой в городе и пригородными территориями достигает 3,5 °С и различается по площади города. Наибольшие контрасты соответствуют крупным промышленным и транспортным зонам Metallургического, Советского и Центрального районов. В дневное время (см. рис. 5б), контраст сохраняется, но его интенсивность уменьшается до 2 °С в южной части города.

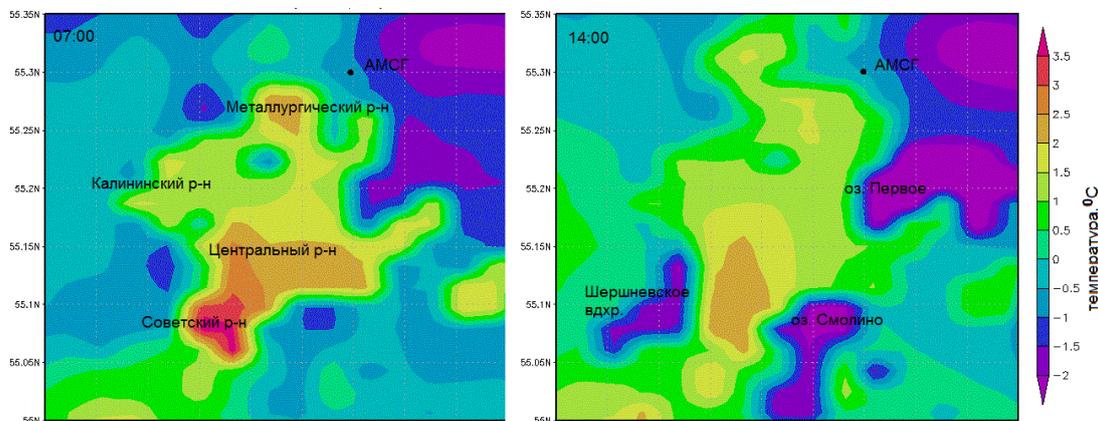
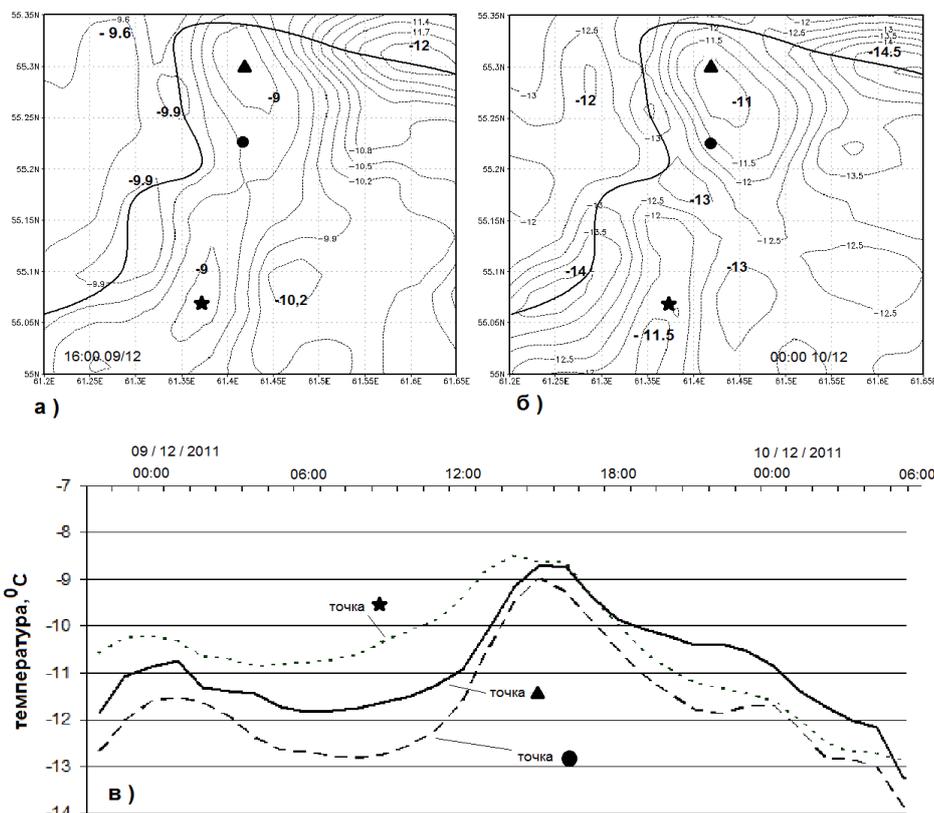


Рис. 5. Распределение аномалии температуры воздуха (см. текст) на уровне 2 м  
а) 07:00 и б) 14:00 местного времени 09.12.2011

Результаты моделирования полей температур на  $\sigma$ -уровнях модели, расположенных в пограничном слое над городом показывают, что в течение двух суток 8–10 декабря 2011 г., суточный ход температуры заметно проявляется только до высоты около 100 м над земной поверхностью. Для выяснения формы и горизонтальной протяженности острова тепла ПСА в этом слое были построены изотермы в период наибольшего прогрева и максимальных антропогенных выбросов тепла в 16 ч. местного времени 9 декабря (рис. 6а), а также в ночное время 00 ч. местного времени 10 декабря (рис. 6б). В целом, в слое до 100 м повторяются очертания острова тепла, как и на рис. 5, выделяются наиболее теплые и возвышенные части города, где расположены Metallurgical и Советский районы; видно также, что вдоль долины реки Миасс, обозначенной сплошной линией на рис. 6, располагается зона более холодного воздуха. Суточный ход температуры на этом уровне в приземном слое ( $\approx 70$  м над поверхностью земли) в трех точках, где согласно распределению температур располагаются относительно холодные и теплые зоны, приведен на рис. 6в.



**Рис. 6.** Поле температуры в приземном слое 70 м над поверхностью земли: а) 09 декабря в 16 ч и б) 10 декабря в 00 ч. местного времени. Сплошная линия указывает положение реки Миасс; в) суточный ход температуры на том же уровне в точках, расположенных в Metallurgical районе ( $\blacktriangle$ ), в Sovetsk районе ( $\star$ ) и в долине реки Миасс ( $\bullet$ )

Ход температуры показывает, что в течение всего времени моделирования приземный слой долины реки остается на 1–2 °С более холодным. В приповерх-

ностном слое на высоте около 2 м, эта зона также остается более холодной, относительно других территорий г. Челябинска (см. рис. 5а, 5б).

Таким образом, результаты моделирования в целом подтверждают, что остров тепла в центральной части города делится рекой на две крупные подобласти. С другой стороны, оказалось, что остров занимает более значительную территорию, а его пространственная конфигурация более сложная, чем это предполагалось ранее. Остров тепла города Челябинска представляет гребень повышенной температуры, вытянутый с юга, юго-запада на север, северо-восток с понижением в пойме реки Миасс, которая протекает через город и огибает его с севера, а также меньшим повышением температуры над западной территорией города, где в основном располагается жилая застройка.

### 3.3. Система циркуляций

В работах [4, 11] было показано, что приземный ветер ослабевает от наветренной части города к его центру, где движение воздуха приобретает более ме-

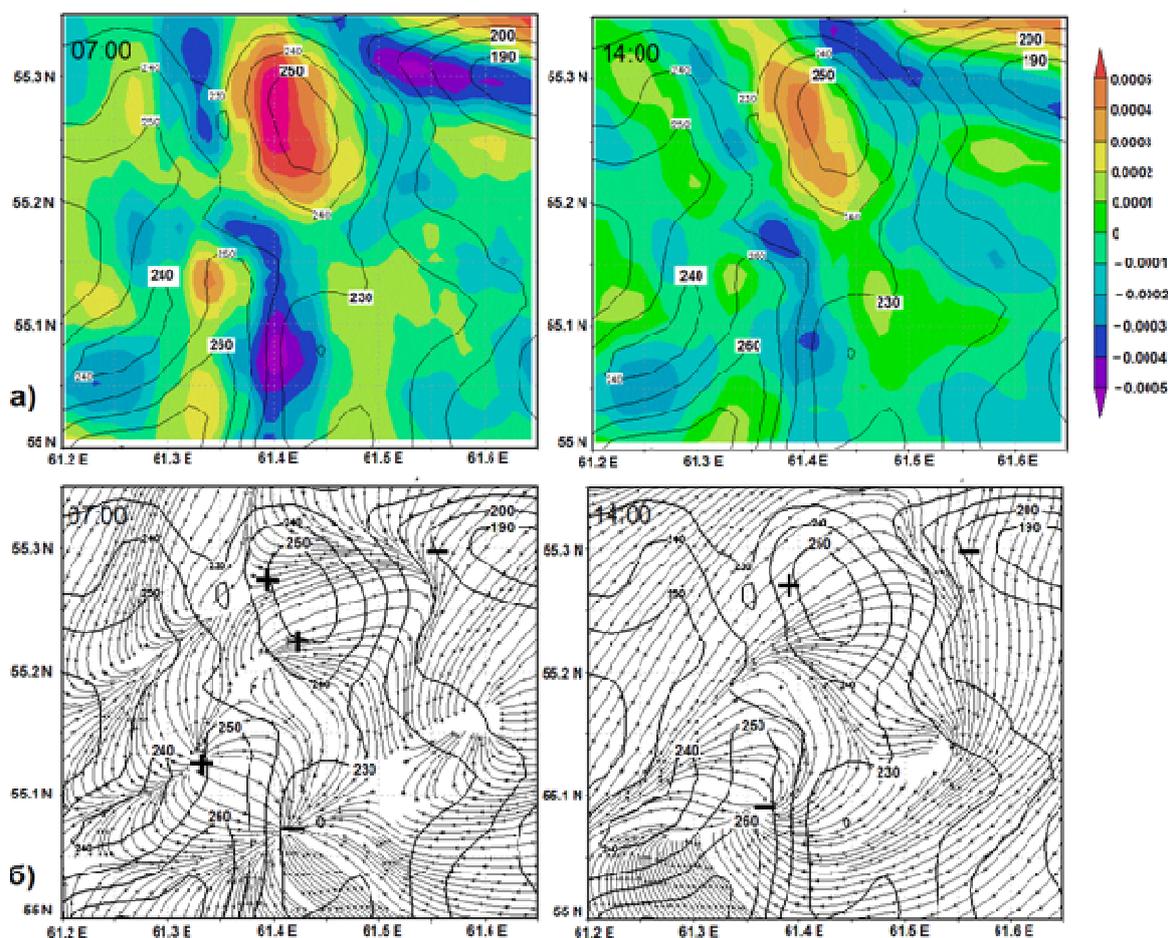


Рис. 7. Поле дивергенции ветра ( $c^{-1}$ ) 09.12.2011

- а) 07:00 и 14:00 местного времени на уровне  $\sim 30$  м над поверхностью;  
 б) линии тока на уровне  $\sim 90$  м над поверхностью. Знаками  $\oplus$  и  $\ominus$  отмечены зоны дивергенции и конвергенции ветра. Сплошные линии – высоты, м над ур.м.

ридиональное направление. Несмотря на отличия в положении и интенсивности, в центре города возникает зона конвергенции величиной более  $10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , напоминающая по конфигурации изотермы острова тепла.

Моделирование атмосферных циркуляций, демонстрирует, что наиболее отчетливые зоны конвергенции приземного ветра со значениями, достигавшими  $6 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , формируются ранним утром примерно в 7 ч. местного времени. Совпадение их с долиной реки Миасс, озером Смолино и другими отрицательными формами рельефа (рис. 7а, слева) можно интерпретировать тем, что в условиях устойчивой антициклональной погоды ночное выхолаживание земной поверхности способствует стоку холодного воздуха с возвышенностей в низины.

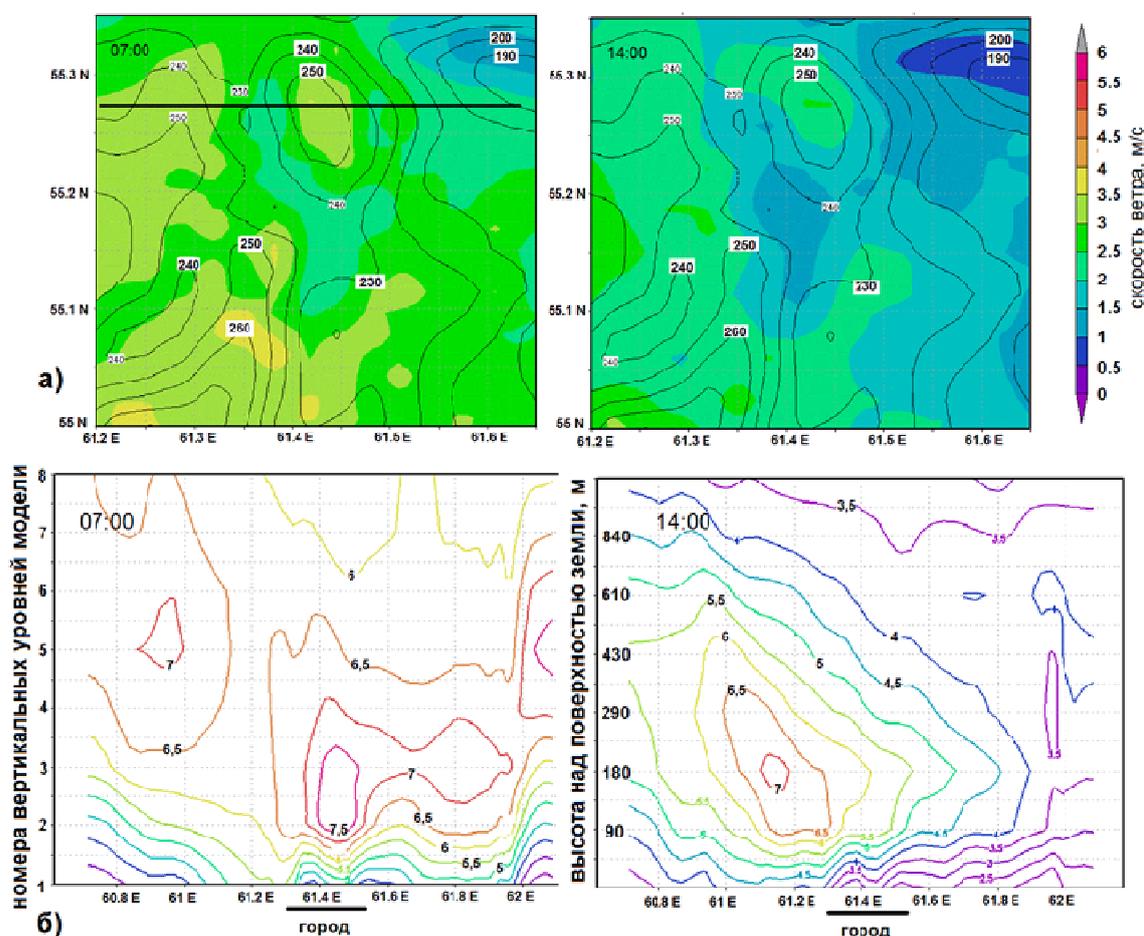
В целом, это не противоречит тому, что над центральной частью города и особенно над возвышенной промышленной территорией Metallургического района возникают области дивергенции ветра, превышающие  $5 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . На высоте 90 м над поверхностью дивергенция уменьшается до  $3 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , и ее положение остается там же. На рис. 7б для этого уровня показаны линии тока и положение зон дивергенции и конвергенции. Линии тока построены таким образом, что из значения скорости ветра в каждой точке рассматриваемой области вычитался средний поток на этом уровне. Прием исключения среднего значения адвекции позволяет в полной мере представить картину влияния орографии в жилительной и промышленной зоне на направление и характер циркуляций. Так, потоки обтекают возвышенную северную часть города в восточном, северо-восточном направлении, опускаясь, способствуют возникновению сходимости  $4 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  в северо-восточной подветренной пониженной части города. Еще более интенсивная дивергентно-конвергентная пара, которая прослеживается до высот около 100 м, вытягивается вдоль западного, более высокого берега озер Смолино и Синеглазово и пониженной на юге городской территории.

В целом особенности распределения зон конвергенции и дивергенции, характерные для ночных и утренних часов, сохраняются и в дневное время, но их интенсивность заметно убывает (14 ч, на рис. 7а, справа). Область наиболее интенсивной дивергенции до  $4 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  продолжает располагаться над территорией Metallургического района. На высотах 90 м по линиям тока, построенным аналогичным образом, хорошо выделяется зона циркуляций над городом, которая как бы «внедрена» в огибающий город с запада и востока атмосферный поток, формирующий мезомасштабный вихрь – своеобразный мезоантициклон.

Таким образом, выделяя атмосферные циркуляции из потока, можно заметить особенности движений воздуха, обусловленные орографией города и распределением его промышленности.

В период, для которого проведено моделирование, над регионом выше приземного слоя наблюдались ветра юго-западного направления. К северо-востоку и востоку от города, в его подветренной части в приземном слое скорости ветра на 1-2 м/с меньше, чем в его наветренной части. Таким образом, в этих условиях городская территорию традиционно можно представить как «мезомасштабную

шероховатость», тормозящую воздушный поток и создающую зону «тени» (рис. 8а). С другой стороны, из анализа градиентов температур, положения зон конвергенции и особенно характера линий тока (см. рис. 5, 6 и 7) в подветренной стороне города возникает некое подобие мезомасштабного стационарного фронта с натеканием теплого воздуха на линзу холодного и значительными приземными градиентами температуры и влажности. Одним из гипотетических элементов циркуляций этого фронта может служить следующее обнаруженное явление. Согласно результатам моделирования (рис. 8б), рано утром скорость в приземном слое в среднем составляла 1 м/с, с ростом до 6–7 м/с на высотах, тогда как над северной возвышенной частью города, где расположена крупная промышленная зона, на высоте около 100 м локализуется воздушная струя со скоростью



**Рис. 8.** Распределение скорости ветра в городе и пригородах 09.12.2011 по результатам моделирования. а) Скорость ветра на уровне флюгера в 07:00 и в 14:00 местного времени. На рисунки нанесены линии абсолютных высот, м. б) Вертикальное распределение скорости ветра над городом вдоль 55,27° с.ш. в те же сроки

в ее центре порядка 7,5 м/с.

Днем горизонтальные размеры увеличиваются, и ее интенсивность слабеет. Вертикальная мощность струи составляет около 200 м.

Очевидно, причины появления такой струи могут быть связаны с обтеканием воздушного препятствия и подъемом теплого воздуха создаваемого мощными тепловыми источниками промышленной зоны.

## Заключение

По ряду причин численное моделирование эволюции городского пограничного слоя атмосферы в зимний период является одной из важнейших и сложных задач региональной метеорологии. В этом плане приведенный выше опыт по использованию системы моделирования WRF для описания городского острова тепла, может служить позитивным примером экспресс-валидации модели в условиях ограниченной метеоинформации, типичной для крупного российского города. Помимо собственно технологических аспектов реализации модели (разделы 1 и 2), мы старались последовательно сопоставить данные приземных наблюдений *in situ* и моделирования в одной точке, перейдя к интерпретации данных дистанционного зондирования термической структуры погранслоя по вертикали. Очевидно, что по мере увеличения размерности тестируемых пространственно-временных полей с одно-, двумерной задачи (раздел 3.1) к трехмерному представлению острова тепла (раздел 3.2) достоверность количественных оценок уменьшается, а четырехмерный анализ циркуляций (раздел 3.3) вообще является чисто опытным обобщением. Тем не менее, мы считаем, что уже на этом этапе удалось показать следующие уникальные свойства атмосферного пограничного слоя г. Челябинска:

1. Даже при относительно небольших перепадах высот положительные и отрицательные формы рельефа существенно влияют на форму острова тепла.
2. Его интенсивность увеличивается в предутренние часы.
3. Обнаружена дипольная структура полей отрицательной и положительной дивергенции приземного ветра. Очевидно, что для детальной оценки влияния локальных циркуляций на урбанизированную окружающую среду Южного Урала потребуются дальнейшие усилия по развитию систем мониторинга и численного моделирования.

*Авторы благодарят магистрантов кафедры вычислительной математики факультета ВМИ ЮУрГУ С.С. Скопина, А.А. Носкова, программистов Суперкомпьютерного центра ЮУрГУ К.В. Бородулина, Ф.М. Мелёхина за техническую помощь в установке и тестировании модели WRF.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение № 14.В37.21.0613).*

## Литература

1. Skamarock, W.C. A Description of the Advanced Research WRF Version 3. – NCAR Tech. Note, June 2008 / W.C. Skamarock. URL: <http://www.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs> (дата обращения: 11.01.2013).
2. Janjic, Z. Scientific Documentation for the NMM Solver. – NCAR Tech. Note, February 2010 / Z. Janjic, R. Gall, M.E. Pyle. URL: <http://nldr.libar.edu/collections/technotes> (дата обращения: 11.01.2013).
3. Исследование производительности суперкомпьютеров семейства «СКИФ Аврора» на промышленных задачах / А.А. Московский, М.П. Перминов, Л.Б. Соколинский и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 35(211). – С. 66–78.
4. Оценка жизненного цикла природно-антропогенных систем / С.М. Абдуллаев, Е.Г. Кораблева, Ю.А. Сапельцева и др. // Вестник Челябинского государственного университета. Серия «Экология и природопользование». – 2008. – Вып. 3. – № 17. – С. 34–45.
5. WRF-ARW V3: User's Guide. / W. Wang, C. Beezley, M. Duda, et al. URL: <http://www.mmm.ucar.edu/wrf/users> (дата обращения: 11.01.2013).
6. Hong, S.-Y. A Revised Approach to Ice Microphysical Processes for the Bulk Parameterization of Clouds and Precipitation / S.-Y. Hong, J. Dudhia, S.-H. Chen // Monthly Weather Review. – 2004. – Vol. 132 – P. 103–120.
7. Mlawer, E.J. Radiative Transfer for Inhomogeneous Atmosphere: RRTM, a Validated Correlated-k-model for the Longwave / E.J. Mlawer, S.J. Taubman, P.D. Brown // Journal of Geophysical Research – 1977. – Vol. 102. – No. D14. – P. 16663–16682.
8. Dudhia, J. Numerical Study of Convection Observed During the Winter Monsoon Experiment Using a Mesoscale Two-dimensional Model / J. Dudhia // Journal of Atmospheric Science – 1989. – Vol. 6. – P. 3077–3107.
9. Hong, S.-Y. A New Vertical Diffusion Package with an Explicit Treatment of Entrainment Processes / S.-Y. Hong, Y. Noh, J. Dudhia // Monthly Weather Review – 2006. – Vol. 134. – P. 2318–2341.
10. The Community Noah Land-Surface Model (LSM): User's Guide. URL: [ftp://ftp.emc.ncep.noaa.gov/gcp/ldas/noahls/ver\\_2.7.1](ftp://ftp.emc.ncep.noaa.gov/gcp/ldas/noahls/ver_2.7.1) (дата обращения: 22.02.2013)
11. Кораблёва, Е.Г. Исследования «острова тепла» г. Челябинска в зимний период / Е.Г. Кораблёва, О.Ю. Ленская // Вестник Челябинского государственного университета. Серия «Экология и природопользование». – 2010. – Вып. 4. – № 8. – С. 15–23.

Ленская Ольга Юрьевна, кандидат географических наук, доцент кафедры вычислительной математики, факультет Вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), [lenskaia\\_olga@mail.ru](mailto:lenskaia_olga@mail.ru).

Абдуллаев Санжар Муталович, доктор географических наук, профессор кафедры вычислительной математики, факультет Вычислительной математики и информатики,

Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), sanjar@mail.ru.

Приказчиков Антон Игоревич, магистрант, кафедра системного программирования, факультет Вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), prikaz08@mail.ru.

Соболев Дмитрий Николаевич, магистрант, кафедра системного программирования, факультет Вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), propp.ds@gmail.com.

---

## MODELING STUDY OF ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER CHARACTERISTICS IN INDUSTRIAL CITY BY THE EXAMPLE OF CHELYABINSK

*O.Yu. Lenskaia*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),

*S.M. Abdullaev*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),

*A.I. Prikazchikov*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),

*D.N. Sobolev*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation).

An applicability of Weather Research Forecasting Model (WRF) with single-layer surface parameterization schema to quantifying urban planetary boundary layer (PBL) structure and evolution is evaluated by comparing model-derived results versus conventional thermal profiler, surface and satellite data obtained in Chelyabinsk metropolitan area during typical winter anticyclon. Influence of detailed description of anthropogenic surface processes and landscape inhomogeneities onto urban heat island patterns is discussed also.

WRF relatively well describes the observed vertical PBL structure with temperature inversion in stable surface layer below 150 m, and isothermal well-mixed layer above 300 m, but significantly (more than 4 °C) underestimates subsidence inversion cape intensity. Experiments reveal that an absolute difference between modeling and observed temperatures monotonically decrease with time, and, after 18 hours model runs continuing within  $\pm 1$  °C interval at all levels of PBL. Some inertia in evolution of modeled PBL is observed during sunrise/sunset when rapid temperature change at low levels (less than 150 m) occurs.

As was expected for cold weather temperatures below -15 °C and light winds, model fields are perturbed by presence of pronounced urban heat island (UHI) with two surface temperature anomaly up  $+2 \div +4$  °C separated by cold river valley. Simulated 3D wind flows suggest that highest temperature maxima in industrial park corresponds to surface divergence region and is produced by descending vertical air motion in contrast to valley convergence induced by horizontal "tunnel effects". The interaction of UHI and complex terrain induced flows resulting unusually strong low level jet. It is assumed that such jet development produces wind shift. Overall circulations structure can be considered in term of UHI stationary frontal boundary – one of new object to future mesoscale studies.

*Keywords:* WRF mesoscale simulations, planetary boundary layer, validation of parametrization scheme, urban heat island, natural and anthropogenic landscapes, low level jet.

## References

1. Skamarock, W.C. A Description of the Advanced Research WRF Version 3. – NCAR Tech. Note, June 2008. URL: <http://www.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs> (accessed: 11.01.2013).

2. Janjic Z., Gall R., Pyle M.E. Scientific Documentation for the NMM Solver. – NCAR Tech. Note, February 2010. URL: <http://nldr.libar.edu/collections/technotes> (accessed: 11.01.2013).
3. Moskovskiy A.A., Perminov M.P., Sokolinsky L.B., Cherepennikov V.V., Shamakina A.V. Issledovanie proizvoditelnosti supercomputerov semeistva “SKIF-Aurora” na industrialnyh zadachah [Efficiency Study of “SKIF-Aurora” Supercomputers for Industrial Tasks Solution]. Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria Matematicheskoe modelirovanie i programmipovanie [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming & Computer Software] 2010. No. 35 (211). P. 66–78.
4. Abdullaev S.M., Korableva E.G., Sapeltseva Y.A., Egorova A.V., Babintseva V.A., Neverova E.A. Otsenka zhiznennogo tsikla prirodno-antropogennyh sistem [Life Cycle Assessment of Natural – Anthropogenic Systems]. Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekologiya i Prirodopolzovanie [Bulletin of Chelyabinsk State University. Series: Ecology and Nature management]. 2008. Vol. 3, No. 17. P. 34–35.
5. Wang W., Beezley C., Duda M., et al. WRF-ARW V3: User’s Guide. URL: <http://www.mmm.ucar.edu/wrf/users> (accessed: 11.01.2013).
6. Hong S.-Y., Dudhia J., Chen S.-H. A Revised Approach to Ice Microphysical Processes for the Bulk Parameterization of Clouds and Precipitation // Monthly Weather Review. 2004. Vol. 132. P. 103–120.
7. Mlawer E.J., Taubman S.J., Brown P.D. Radiative Transfer for Inhomogeneous Atmosphere: RRTM, a Validated Correlated-k-model for the Longwave // Journal of Geophysical Research. 1977. Vol. 102, No. D14. P. 16663–16682.
8. Dudhia J. Numerical Study of Convection Observed during the Winter Monsoon Experiment Using a Mesoscale Two-dimensional Model // Journal of Atmospheric Sciences. 1989. Vol. 6. P. 3077–3107.
9. Hong S.-Y., Noh Y., Dudhia J. A New Vertical Diffusion Package with an Explicit Treatment of Entrainment Processes // Monthly Weather Review. 2006. Vol. 134. P. 2318–2341.
10. The Community Noah Land-Surface Model (LSM): User’s Guide. URL: [ftp://ftp.emc.ncep.noaa.gov/gcp/ldas/noahlsm/ver\\_2.7.1](ftp://ftp.emc.ncep.noaa.gov/gcp/ldas/noahlsm/ver_2.7.1) (accessed: 22.02.2013)
11. Korableva E.G., Lenskaia O. Yu. Issledovaniya “ostrova tepla” g. Chelyabinska v zimnii period [Study of Urban Heat Island during Wintertme in Chelyabinsk]. Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekologiya i Prirodopolzovanie [Bulletin of Chelyabinsk State University. Series: Ecology and Nature management]. 2010. Vol. 4, No. 8. P. 15–23.

*Поступила в редакцию 25 февраля 2013 г.*

## ОБЗОР АЛГОРИТМОВ ЛОКАЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДЛЯ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

*Р.М. Миниахметов, А.А. Рогов, М.Л. Цымблер*

Работа содержит обзор алгоритмов локального позиционирования (позиционирования внутри помещений) на основе стандарта беспроводной связи Wi-Fi, в которых в качестве единственного источника информации о местонахождении агента выступает мощность сигнала, принимаемого от точек доступа Wi-Fi сети. Произведен сравнительный анализ рассматриваемых алгоритмов по таким критериям, как базовый или улучшающий, погрешность, вычислительная сложность и независимость от предварительных измерений.

*Ключевые слова:* локальное позиционирование, мощность сигнала, беспроводные сети Wi-Fi.

### Введение

В настоящее время наблюдается рост интереса к возможности получения информации о местоположении того или иного объекта. Информация о местоположении позволяет значительно повысить качество и расширить перечень сервисов (Location-based services), предоставляемых пользователям [6, 7].

Местоположение объекта может быть определено как в глобальных, так и в локальных координатах. На сегодняшний день широкое распространение получили системы глобального позиционирования, такие как GPS и ГЛОНАСС. Основными преимуществами этих технологий является большой охват и достаточная высокая точность определения местоположения вне помещений. К основным недостаткам таких систем можно отнести зависимость от погодных условий и невозможность использования в закрытых помещениях с большим количеством помех от различной аппаратуры внутри здания и корпуса самого здания. Другим недостатком, выступающим против использования систем глобальной навигации для решения задач локального позиционирования, является увеличение стоимости оборудования за счет интеграции, например, GPS-приемника.

Перечисленные недостатки призваны исправить системы локального позиционирования (LPS — *Local Positioning Systems*). Основным предназначением LPS является быстрое позиционирование в закрытых помещениях, кроме того, одним из важных достоинств беспроводных систем позиционирования в помещении является возможность организации системы как дополнительной опции в уже развернутой сети.

С учетом изложенных ограничений, для локального позиционирования был предложен подход, основанный на использовании существующей инфраструктуры локальных беспроводных сетей (WLAN). Такие сети в настоящее время нашли широкое применение и распространены повсеместно. В состав WLAN входят точки доступа и оборудование пользователей. С точки зрения задач позиционирования, важным моментом является то, что точки доступа размещаются стационарно с известными координатами. Актуальной проблемой является разработка методов определения местоположения пользователя на основе совокупности характеристик сигналов от точек доступа.

Локальные системы позиционирования применяются в основном как проводники по торговым центрам и промышленным предприятиям [2, 3, 12]. Проводники для торговых

центров могут использовать информацию о перемещениях пользователя для более точного анализа рыночной корзины [15]. На промышленных предприятиях проводники используются для оптимизации работы складов [6]. LPS используются как технические средства позиционирования на роботизированном производстве, а также в крупных медицинских учреждениях [7].

Возможность определения положения в локальной беспроводной сети позволяет владельцу мобильного устройства обнаружить свое местоположение на карте или плане здания. С другой стороны, позволяет создать точки привязки устройств с модулями беспроводной связи к координатам местности для отображения на ГИС картах, например, для решения задач мониторинга систем инженерных коммуникаций, транспортных систем. Подобные системы широко востребованы в сфере предоставления потребительских услуг, рекламы и торговли [3, 6].

Целью статьи является обзор существующих алгоритмов определения местоположения пользователя внутри помещения с использованием инфраструктуры WLAN технологии Wi-Fi для определения степени их пригодности для решения задач локального позиционирования. Выбор технологии мотивирован тем, что указанный тип WLAN наиболее широко распространен на сегодняшний день. В качестве метрики, применяемой для решения задачи позиционирования, используется мощность сигнала (RSS — *Received Signal Strength*), принимаемого совокупностью точек доступа. Выбор метрики обусловлен тем, что данный метод можно использовать для получения более быстрого отклика системы и адаптации к инфраструктуре уже имеющихся беспроводных сетей.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 посвящен описанию основных обозначений и критериев для сравнительного анализа алгоритмов. В разделе 2 описаны непосредственно алгоритмы позиционирования.

## 1. Методика сравнения

В данном разделе описаны основные обозначения, используемые в работе. Приведены критерии, по которым проводился сравнительный анализ алгоритмов позиционирования.

### 1.1. Основные термины

Позиционируемые объекты, которые могут принимать Wi-Fi сигналы, называются *агентами*. В роли агентов выступают мобильные устройства. Устройства, способные передавать Wi-Fi сигнал, называются *точками доступа*.

*Модель помещения* включает в себя точки доступа, агентов (рис. 1) и параметры среды. Без ограничения общности мы будем рассматривать помещение как плоскую среду, в которой присутствуют помехи от стен – перекрытий, разнородных сигналов и др.

На рис. 1 изображен пример расположения агента и точек доступа на плоскости, где  $AP_i$  —  $i$ -я точка доступа,  $(X_i, Y_i)$  — декартовы координаты  $i$ -й точки доступа,  $P_i$  — мощность сигнала от  $i$ -й точки доступа,  $A$  — агент,  $(X_0, Y_0)$  — декартовы координаты агента,  $N$  — количество точек доступа.

*Позиционирование* осуществляется с помощью алгоритма определения координат местоположения агента в помещении на основе данных о мощности принимаемых агентом сигналов.

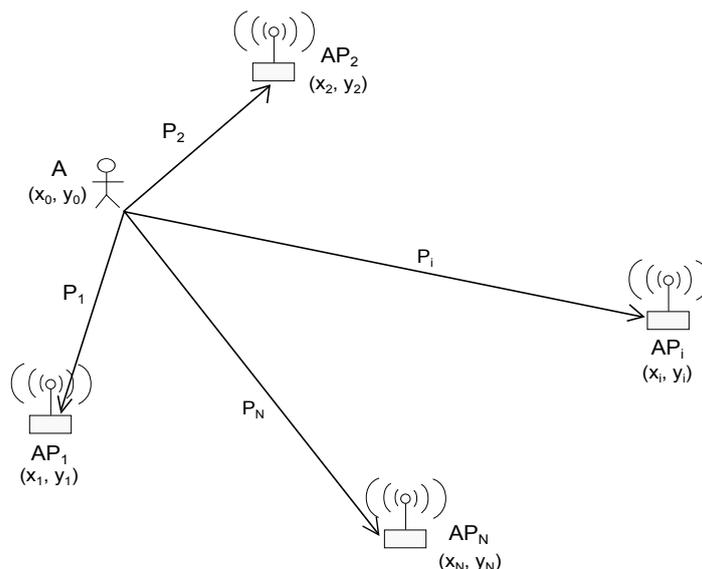


Рис. 1. Модель помещения

## 1.2. Критерии сравнительного анализа

Одним из критериев, обозначенных в данной статье, является тип алгоритма позиционирования — *базовый* или *улучшающий*. Под базовым алгоритмом следует понимать то, что алгоритм может работать индивидуально с заданной точностью или может использоваться в качестве начального приближения для работы другого алгоритма. Тогда, улучшающий алгоритм предназначен для оптимизации некоторого начального приближения, полученного базовым алгоритмом.

Другим критерием является *независимость от предварительных измерений*. Для корректного функционирования некоторых алгоритмов позиционирования необходимы предварительные измерения характеристик среды или формирование базы данных, что значительно усложняет эксплуатацию в динамической среде.

Важнейшим критерием для сравнения является *погрешность* работы алгоритма. Под погрешностью следует понимать оценку отклонения результата работы алгоритма от истинного значения.

Ввиду того, что вычисления производятся на мобильном устройстве, важным критерием является *вычислительная сложность* — зависимость объема работы, выполняемой алгоритмом, от размера входных данных.

## 2. Алгоритмы определения местоположения

Алгоритмы определения местоположения представляют собой подходы к решению задачи определения местоположения агента на основе мощностей сигналов, излучаемых несколькими точками доступа. В данном разделе приводится обзор основных алгоритмов позиционирования.

### 2.1. Ближайшая точка доступа (Proximity)

В алгоритме *Proximity* [7, 12] агенту приписываются координаты той точки доступа, которая излучает сигнал наибольшей мощности. Этот алгоритм можно считать наиболее

простым с вычислительной точки зрения. Так, если в комнате находится четыре точки доступа  $AP_1$ - $AP_4$  (рис. 1), и сигнал наибольшей мощности  $P_1$  принят от  $AP_1$ , тогда агенту присваиваются координаты  $AP_1$ .

К преимуществам данного алгоритма можно отнести простоту реализации ввиду низкой вычислительной сложности ( $O(N)$ ) и необходимость знать только месторасположения точек доступа. Явным недостатком является очень низкая точность, погрешность может достигать дальности трансляции сигнала точкой доступа (в помещении до 100 метров). Данный алгоритм может быть приемлемым для решения определенного рода задач (например, в сотовой связи, данный подход применяется для определения с какой станцией необходимо ассоциировать сотовый телефон) или может быть применим в качестве начального приближения для работы другого алгоритма. Данный алгоритм можно отнести к базовым, не требующим предварительных измерений.

## 2.2. Центроид (Centroid)

Алгоритм *Centroid*, описанный в [6], представляет собой вычисление геометрического центра плоской фигуры, образованной несколькими точками доступа. В таком случае, координаты агента вычисляются как линейная комбинация координат точек доступа [6]. Этот алгоритм является достаточно простым с вычислительной точки зрения (сложность  $O(N)$ ). Положение агента определяется по следующим формулам:

$$\begin{cases} X_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \\ Y_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \end{cases} \quad (1)$$

К преимуществам данного алгоритма можно отнести простоту реализации и необходимость знать только месторасположения точек доступа. Явным недостатком является низкая точность. Так как информация о мощности сигналов никак не учитывается, следовательно погрешность может достигать дальности трансляции сигнала точкой доступа (в помещении до 100 метров). Данный алгоритм может быть приемлемым для решения определенного рода задач (например, определение в какой части здания находится агент) или может быть применим в качестве начального приближения для работы другого алгоритма. Алгоритм можно характеризовать как базовый и не требующий предварительных измерений.

## 2.3. Центр масс (Weighted centroid)

Алгоритм *Weighted centroid* является улучшенной версией предыдущего алгоритма [12], в результате добавления в рассмотрение мощностей принимаемых сигналов. Тогда координаты агента могут быть вычислены как линейная комбинация координат точек доступа с учетом мощности сигналов, в качестве характеристики веса. Этот алгоритм является достаточно простым с вычислительной точки зрения (сложность  $O(N)$ ). Положение агента

определяется по следующим формулам:

$$\begin{cases} X_0 = \sum_{i=1}^N \mu_i X_i & Y_0 = \sum_{i=1}^N \mu_i Y_i \\ \mu_i = \left( P_i^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{P_j^2} \right)^{-1}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mu_i$  — характеристика веса.

К преимуществам данного алгоритма можно отнести простоту реализации и необходимость знать только месторасположения точек доступа. К недостаткам можно отнести зависимость от числа точек доступа одновременно доступных агенту. Чем больше сигналов от известных точек доступа принимает агент, тем выше будет точность вычисления его местоположения. Данный алгоритм демонстрирует более высокую точность по сравнению с предыдущими, однако, для высокоточного позиционирования внутри помещений таких результатов недостаточно. Алгоритм можно отнести к базовым, не требующим предварительных измерений.

## 2.4. Сопоставление с образцом (Fingerprinting)

Алгоритм *Fingerprinting* представляет собой подход, основанный на дифференциации пространственных сигнатур сигнала [2, 9]. Местоположение агента определяется путем сравнения измеренных в данный момент сигнатур мощностей сигналов от всех доступных точек доступа с сигнатурами, хранящимися в, заранее сформированной, базе данных.

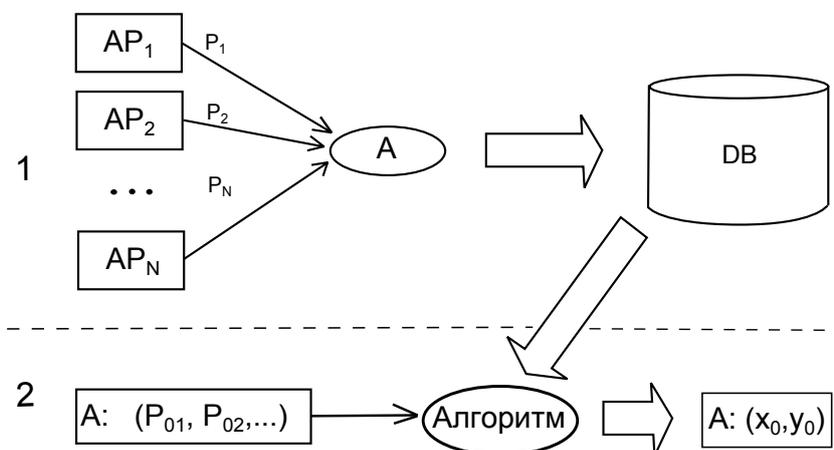


Рис. 2. Стадии алгоритма Fingerprinting

На рис. 2 изображены две стадии работы алгоритма:

1. *Стадия конфигурации среды.* На данном этапе осуществляются измерения мощностей сигналов в заранее запланированных известных метках от всех активных точек доступа. Собранная информация сохраняется в базе данных с привязкой к локальным или глобальным координатам помещения.
2. *Стадия определения местоположения.* На данном этапе измерения мощностей сигналов, произведенные над агентом, сравниваются с информацией, хранящейся в базе данных, по средствам некоторого алгоритма (ближайший сосед [3],  $k$  ближайших сосе-

дей [9, 13], *Fuzzy c-Means* [14], нейронная сеть [13], вероятностные подходы [3, 6, 9] и др.). Результатом работы данного этапа являются координаты местоположения агента.

Явным преимуществом данного алгоритма является высокая точность. При высокой плотности покрытия помещения измерениями, погрешность может быть сведена практически до нуля. Отсюда вытекает ряд недостатков: необходимость большого количества времени для конфигурации базы данных; постоянная переконфигурация, связанная с изменениями в среде (например, добавление/удаление точек доступа/препятствий); высокая вычислительная сложность —  $O(N \cdot M)$ , где  $M$  — количество записей в базе данных. Наилучшим вариантом является применение данного алгоритма в статичной среде, а также в качестве базы для работы другого алгоритма. Алгоритм можно отнести к базовым с необходимостью предварительных измерений.

## 2.5. Латерация (Lateration)

Алгоритм *Lateration* представляет собой геометрический подход к решению поставленной задачи. Он основан на вычислении расстояний между искомой точкой и как минимум тремя точками доступа с дальнейшим решением системы из  $N$  нелинейных уравнений [4, 7]. При  $N=3$  данный метод также известен как трилатерация.

Для нахождения расстояний используется модель распространения радиоволн [8, 11], требующий калибровки некоторых параметров, зависящих от особенностей среды:

$$PL(d) = P_t - P(d) = PL(d_0) + n10 \lg \frac{d}{d_0}, \quad (3)$$

где  $d$  — расстояние до агента,  $PL(d)$  — потеря мощности сигнала на расстоянии  $d$ ,  $P_t$  — мощность передатчика,  $P(d)$  — мощность сигнала на приемнике на расстоянии  $d$ ,  $d_0$  — расстояние 1 метр,  $n$  — коэффициент распространения сигнала в среде.

На рис. 3 изображены геометрические подходы к решению задачи позиционирования, где,  $r_i$  — расстояние до  $i$ -й точки доступа от агента.

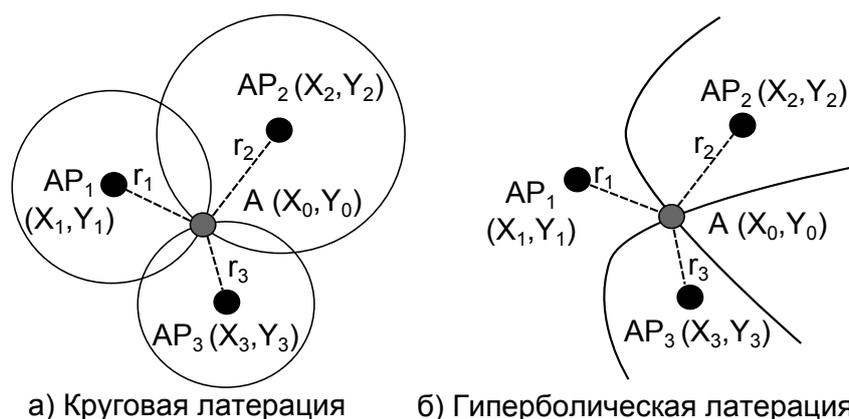


Рис. 3. Геометрический подход к позиционированию

*Круговая латерация* (рис. 3) основана на расстоянии между искомой точкой и точками доступа. Для вычисления координат агента, необходимо решить систему из уравнений вида:

$$r_i = \sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2}. \quad (4)$$

Гиперболическая латерация (рис. 3) основана на разнице расстояний между агентом и точками доступа. Для вычисления координат агента, необходимо решить систему из уравнений вида:

$$d_{ij} = r_i - r_j = \sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2} - \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2}. \quad (5)$$

Достоинством алгоритма является достаточно высокая точность, при соответствующих параметрах среды. Недостатком алгоритма является необходимость тщательного построения модели распространения сигнала в каждой конкретной среде, для каждой отдельной точки доступа, что в конечном итоге не гарантирует очень высокую точность, в результате возникновения в помещении таких эффектов как, затухание и отражение сигнала, моделирование которых является весьма проблемной задачей. Данный алгоритм является одним из базовых, нашел применение в GPS и сотовых сетях, где данные высокочастотные эффекты не возникают и построение модели распространения сигнала не является настолько трудоемкой задачей.

## 2.6. Дифференциальная латерация (Differential lateration)

Данный алгоритм является альтернативой предыдущего и представляет собой метод аппроксимации, основанный на переборе возможных координат агента, с целью нахождения ближайшей точки к месту пересечения окружностей [4, 12]. Преимуществом данного алгоритма является отсутствие необходимости калибровки параметров в модели распространения сигнала. Алгоритм представлен в следующих вариантах реализации:

*Вариант 1.* Координаты агента вычисляются через минимизацию функционала, ядром которого является отношение затуханий сигнала от 1 и  $i$ -й точек доступа до произвольной точки с координатами  $(x, y)$  [12]. Будем считать, что коэффициент затухания сигнала, выраженный в децибелах, соответствует формуле [8, 11, 12]:

$$P(d) = P_0 - n10 \lg d, \quad (6)$$

где  $d$  — расстояние до агента,  $P_0$  — значение мощности сигнала на расстоянии одного метра и  $n$  — коэффициент распространения сигнала. Значения  $P_0$  и  $n$  неизвестны. Для того, чтобы избавиться от этих неопределенных параметров, необходимо оценить положение агента через минимизацию следующего функционала:

$$\begin{cases} (X_0, Y_0) = \operatorname{argmin}[\gamma(x, y)] \\ \gamma(x, y) = \sum_{i=2}^N \left| \frac{P_i}{P_1} - \frac{\lg[d_i(x, y)]}{\lg[d_1(x, y)]} \right|^2, \end{cases} \quad (7)$$

где  $d_1$  и  $d_i$  — расстояния соответственно от 1 и  $i$ -й точки доступа до текущей точки с координатами  $(x, y)$ .

*Вариант 2.* Координаты агента также вычисляются через минимизацию функционала, ядром которого является отношение затуханий сигнала от 1 и  $i$ -й точек доступа. Однако перед этим происходит оценка параметров в модели распространения сигнала путем мини-

минимизации среднеквадратической ошибки [12]:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ n \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T P, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -10 \lg d_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -10 \lg d_T \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_K \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Тогда координаты агента могут быть оценены через минимизацию нового функционала:

$$\begin{cases} (X_0, Y_0) = \operatorname{argmin}[\gamma(x, y)] \\ \gamma(x, y) = \sum_{i=2}^N \left| \frac{P_i}{P_1} - \frac{P_0 - n10 \lg[d_i(x, y)]}{P_0 - n10 \lg[d_1(x, y)]} \right|^2. \end{cases} \quad (9)$$

*Вариант 3.* Координаты агента вычисляются через минимизацию функционала, ядром которого является разность затуханий сигнала от 1 и  $i$ -й точек доступа. Этот алгоритм является модификацией варианта 2. Функционал для минимизации определяется следующим выражением:

$$\begin{cases} (X_0, Y_0) = \operatorname{argmin}[\gamma(x, y)], \\ \gamma(x, y) = \sum_{i=2}^N |(P_i - P_1) - ((P_0 - n10 \lg[d_i(x, y)]) - (P_0 - n10 \lg[d_1(x, y)]))|^2. \end{cases} \quad (10)$$

Преимуществами являются простота реализации и достаточно высокая точность. Варианты алгоритма 2 и 3 демонстрируют еще более высокую точность, так как производится оценка параметров для модели распространения сигнала. К недостаткам можно отнести повышенную вычислительную сложность  $O(N \cdot K)$ , где  $K$  — количество точек для перебора. Для повышения качества работы алгоритма необходимо начальное приближение, что позволит уменьшить вычислительную сложность. Данный алгоритм можно отнести как к базовым, так и к улучшающим, причем, не требуются предварительные измерения.

## 2.7. Навигационное счисление (Deduced reckoning)

Алгоритм *навигационного счисления* — один из старейших алгоритмов позиционирования, представляет собой вычисление или экстраполяцию текущей позиции агента на основе предыдущей позиции, направления движения и скорости агента или преодоленной им дистанции [7].

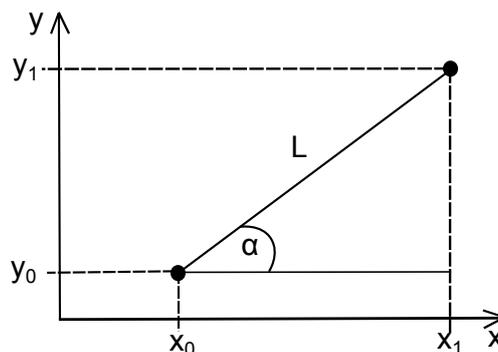


Рис. 4. Принцип алгоритма навигационного счисления

Принцип данного подхода изображен на рис. 4, где  $(x_0, y_0)$  — последняя известная позиция агента,  $\alpha$  — направление движения,  $L$  — преодоленная дистанция,  $(x_1, y_1)$  — текущая позиция агента.

Координаты текущей позиции агента могут быть определены по формуле:

$$x_1 = x_0 + L \cos \alpha, \quad y_1 = y_0 + L \sin \alpha. \quad (11)$$

Если дистанция неизвестна, то она может быть вычислена по формуле:

$$L = v \Delta t, \quad (12)$$

где  $v$  — скорость объекта,  $\Delta t$  — время движения.

К преимуществам можно отнести низкую вычислительную сложность и использование такой информации как скорость, направление движения и др. Недостатками являются необходимость получения начальной позиции и сложность сбора информации о направлении движения, скорости и преодолённом расстоянии. Навигационное счисление не является отдельной техникой позиционирования. Данный алгоритм всегда используется в совокупности с другими методами с целью улучшения результата.

## 2.8. Алгоритм Handover

Алгоритм *Handover*, предложенный в [1], представляет собой надстройку, предназначенную для повышения точности определения местоположения агента. В основе данного алгоритма лежит принцип определения направления движения агента по изменяющимся мощностям сигналов от разных точек доступа.

Для работы алгоритма, сначала необходимо получить начальное местоположение агента ( $A_0$ ) сторонним алгоритмом, затем покрыть область поиска регулярной сетью (рис. 5),

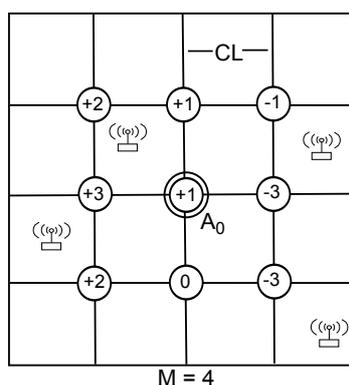


Рис. 5. Регулярная сеть на области поиска и начальное приближение  $A_0$

параметры которой, рассчитываются по следующим формулам:

$$CL = \frac{2 \cdot d_{\min}}{N_{\min}}, \quad (13)$$

где  $CL$  — размер ячейки регулярной сети,  $d_{\min}$  — расстояние для  $P_{\max}$ ,  $N_{\min}$  — количество точек доступа в области ограниченной  $d_{\min}$ ;

$$M = 2 \cdot \text{roundup} \left( \frac{d_{\max}}{CL} \right), \quad (14)$$

где  $M$  — размерность регулярной сети,  $d_{\max}$  — расстояние для  $P_{\min}$ . Расстояния рассчитываются на основе модели распространения радиоволн [8, 11].

Центром наложения регулярной сети является начальное положение агента  $A_0$ . Завершающей частью подготовки к работе алгоритма является размещение всех точек доступа в соответствующие ячейки сети.

Работа алгоритма начинается со следующего сканирования сигналов. Целью является определение направления движения и приближение местоположения агента к одному из узлов регулярной сети.

Выделяются следующие шаги алгоритма:

1. Рассчитать веса для всех узлов регулярной сети.
2. Найти узлы с максимальным весом.
3. Рассчитать местоположение агента, используя стороннюю систему позиционирования, исходя из данных о клетках, окружающих выбранные узлы.

К преимуществам данного улучшающего алгоритма можно отнести простоту реализации. К недостаткам можно отнести необходимость использования сторонних систем позиционирования. Алгоритм является эффективным для позиционирования агентов, перемещающихся с невысокой скоростью, однако, необходимо значительное число итераций для повышения точности позиционирования.

## 2.9. Тестирование

Для тестирования алгоритмов была смоделирована среда (рис. 6), представляющая собой квадратное помещение размером  $50 \times 50$  м<sup>2</sup>. По углам помещения расположено четыре одинаковые точки доступа со следующими локальными координатами:  $AP_1(0; 0)$ ,  $AP_2(0; 50)$ ,  $AP_3(50; 50)$  и  $AP_4(50; 0)$ . Работа алгоритма проверяется в следующих точках:  $A_0(25; 25)$ ,  $A_1(8; 8)$ ,  $A_2(8; 42)$ ,  $A_3(42; 42)$  и  $A_4(42; 8)$ .

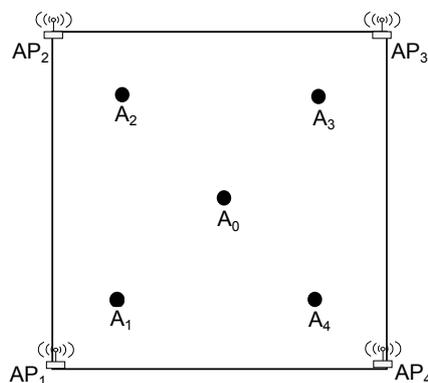


Рис. 6. Смоделированная среда для тестирования

Мощность сигнала от каждой точки доступа в помещении изменяется согласно модели распространения радиоволн (формула (3)), для которого были подобраны следующие параметры:

$$n = 3,5, P_t = 20 \text{ dBm}, PL(d_0) = 40 \text{ dB}.$$

В тестировании принимали участие только базовые алгоритмы. Улучшающие алгоритмы не рассматривались из соображений необходимости использования дополнительных средств (систем позиционирования и навигации) для их реализации.

Таблица

## Результаты тестирования

| Алгоритм                       | AP's | Калибровка                                      | Погрешность(м) |
|--------------------------------|------|---|----------------|
| Proximity                      | 3    | Нет   | 30,2           |
|                                | 4    |   | 25             |
| Centroid                       | 3    | Нет   | 25,3           |
|                                | 4    |   | 17             |
| Weighted centroid              | 3    | Нет   | 24,6           |
|                                | 4    |   | 12             |
| Fingerprint (nearest neighbor) | 4    | (25;25)   | 17             |
|                                | 4    | (10;25),(25;40),<br>(40;25),(25;10),<br>(25;25) | 12,1           |
|                                | 4    | (5;5),(5;45),<br>(45;45),(45;5),<br>(25;25)     | 3              |
|                                | 4    | (10;10),(10;40),<br>(40;40),(40;10),<br>(25;25) | 2              |
| Lateration                     | 4    | n=3,3   | 9,7            |
|                                |      | n=3,4   | 4              |
|                                |      | n=3,5   | 0,2            |
|                                |      | n=4   | 10,6           |
| Differencial lateration        | 3    | Нет   | 8,7            |
|                                | 4    |   | 3,1            |

Из результатов тестирования (см. таблицу) видно, что алгоритм сопоставления с образцом напрямую зависит от числа и местоположения проделанных измерений в помещении, то есть, чем выше плотность покрытия помещения измерениями, тем более высокую точность демонстрирует данный алгоритм. Алгоритм латерации с откалиброванной моделью распространения сигнала демонстрирует высокую точность только при идеально подобранном значении параметра среды, однако в реальных условиях подбор данного параметра является весьма трудоемкой задачей, ввиду географии среды и возникающих помех. На точность работы алгоритмов не требующих предварительных измерений в первую очередь оказывает влияние количество активных точек доступа, чем их больше, тем лучше будет результат.

## Заключение

В статье произведен сравнительный анализ существующих алгоритмов локального позиционирования для мобильных устройств, основанных на технологии беспроводной связи Wi-Fi.

В табл. 1 представлена сводная информация о рассмотренных алгоритмах, на основании которой можно сделать вывод, что для достижения приемлемой точности в решении

задачи локального позиционирования необходимо использовать не отдельные алгоритмы, а их комбинации. Алгоритмы, у которых отсутствует стадия предварительных измерений, демонстрируют более низкую точность относительно алгоритмов, у которых она есть. В свою очередь, алгоритмы, требующие предварительных измерений, являются более трудоемкими на стадии настройки (калибровки) и достаточно простыми с вычислительной точки зрения. Базовые алгоритмы могут выступать, как в качестве начального приближения для работы других алгоритмов, так и в качестве улучшающих механизмов.

Для мобильных устройств критичными являются такие характеристики, как память и вычислительные ресурсы, следовательно, для достижения оптимальных результатов следует использовать комбинированные алгоритмы, позволяющие использовать приемлемое количество памяти при невысокой вычислительной сложности. Комбинирование различных алгоритмов позиционирования позволит значительно улучшить точность расчетов и сбалансировать нагрузку между этапами настройки алгоритма и непосредственно вычислениями. В качестве вспомогательных алгоритмов широко используются алгоритмы интеллектуального анализа данных [3, 9] и нейронных сетей [13], которые при сравнительно простой реализации демонстрируют достаточно высокую скорость работы.

Как показывает обзор, для решения задачи локального позиционирования наиболее перспективным является алгоритм сопоставления с образцом (Fingerprint). Однако данный алгоритм является все же не вполне адекватным, поскольку стадия настройки требует большого количества калибровочных измерений и, как следствие, хранения всей собранной информации. Составленная карта мощностей сигналов предполагает, что среда является статичной, следовательно, любые изменения в среде могут в значительной степени влиять на качество позиционирования. Наши будущие исследования будут направлены на разработку нового алгоритма, свободного от указанных недостатков.

*Работа выполнена при поддержке гранта фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере по программе “У.М.Н.И.К.”-2011 № 9927р/14262.*

## Литература

1. Improving Indoor Positioning Accuracy through a Wi-Fi Handover Algorithm / F. Alsehly, R. Mohd Sabri, Z. Svak et al. // International Technical Meeting — Sep. 2010. — P. 131–139.
2. Bahl, P. RADAR: An In-Building RF-based User Location and Tracking System / P. Bahl, V. Padmanabhan // IEEE INFOCOM, Tel-Aviv, Israel, Mar. 2000. — P. 775–784.
3. Bensusky, A. Wireless Positioning Technologies and Applications / A. Bensusky — Artech House, 2008. — 297 p.
4. WiFi-Based Indoor Positioning: Basic Techniques, Hybrid Algorithms and Open Software Platform / M. Cypriani, F. Lassabe, F. Canalda et al. // Research Report, Theme 4 — LIFC, 2011. — P. 10–22.
5. Jonge, M. Benchmarking Various Untrained Localization Algorithms / M. Jonge // 3rd Twente Student Conference on IT — Jun. 2005. — P. 59–65.
6. Kolodziej, K.W. Local Positioning Systems: LBS Applications and Services / K.W. Kolodziej, J. Hjelm — CRC Press, 2006. — 445 p.
7. Kupper, A. Location-Based Services / A. Kupper — John Wiley & Sons Ltd, 2005. — 365 p.

8. A Friis-Based Calibrated Model for WiFi Terminals Positioning / F. Lassabe, O. Baala, P. Canalda et al. // Proceedings of IEEE International Symposium on a World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks — Jun. 2005. — P. 382–387.
9. Molteni, R. WhAC: a WiFi-Based Application for Indoor Customer Localization / R. Molteni, F. Perini — Politecnico di Milano, 2011. — 110 p.
10. Position Location Techniques and Applications / D. Munoz, F. Bouchereau, C. Vargas et al. — Academic Press, 2009. — 275 p.
11. Roberts, B.J. Site-specific RSS Signature Modeling for WiFi Localization / B.J. Roberts — Worcester Polytechnic Institute, 2009. — 111 p.
12. Аверин, И.М. Позиционирование пользователей с использованием инфраструктуры локальных беспроводных сетей / И.М. Аверин, В.Ю. Семенов // IV Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь» (ИРЭ РАН, 29 ноября – 3 декабря 2010 г.). — М., 2010. — С. 475–479.
13. Дудник, В.В. Алгоритмы определения положения в локальных беспроводных сетях / В.В. Дудник, А.Н. Алфимцев // Молодежный научно-технический вестник МГТУ им. Баумана. — 2012. — № 4. — С. 20–26.
14. Минахметов, Р.М. Интеграция алгоритма кластеризации Fuzzy c-Means в PostgreSQL / Р.М. Минахметов // Труды Института системного программирования РАН. — 2011. — Т. 21. — С. 263–276.
15. Пан, К.С. Параллельный алгоритм решения задачи анализа рыночной корзины на процессорах Cell / К.С. Пан, М.Л. Цымблер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2010. — №16(192), Вып. 5. — С. 48–57.

Михаил Леонидович Цымблер, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zymbler@gmail.com.

Руслан Марсович Минахметов, аспирант кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), tavein@gmail.com.

Александр Александрович Рогов, магистрант 2 года, кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), rogovalex@yandex.ru.

---

## THE SURVEY OF INDOOR POSITIONING ALGORITHMS FOR MOBILE DEVICES

*R.M. Miniakhmetov*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),  
*A.A. Rogov*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),  
*M.L. Zymbler*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

This paper provides an overview of algorithms for local (indoor) positioning on the basis of Wi-Fi standard and the method of RSS (received signal strength), in which the only source of information on the location of the user performs the signal strength received from access points of Wi-Fi network. Comparative analysis of algorithms being executed on criteria such as basic or

improving, error, computational complexity and independence from preliminary measurements. Also covers basic filters used to obtain estimates of the strength level of the received signal.

*Keywords: local positioning, signal strength, Wi-Fi, wireless networks.*

## References

1. Alsehly F., Mohd Sabri R., Sevak Z., Arslan T. Improving Indoor Positioning Accuracy through a Wi-Fi Handover Algorithm // International Technical Meeting, The University of Edinburgh, Scotland, UK, 2010, P. 131–139.
2. Averin I.M., Semenov V.U. Pozicionirovanie pol'zovatelei s ispol'zovaniem infrastruktury lokal'nykh besprovodnykh setei [User Positioning using Infrastructure of Local Wireless Networks] // IV Russian conference of «Radiolocation and Radio Communication», The Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 29 Nov. – 3 Dec. 2010, P. 475–479.
3. Bahl P., Padmanabhan V. RADAR: An In-Building RF-based User Location and Tracking System // IEEE INFOCOM, Tel-Aviv, Israel, Mar. 2000, P. 775–784.
4. Bensky A. Wireless Positioning Technologies and Applications, Artech House, Norwood, MA, USA, 2008, 297 p.
5. Cypriani M., Lassabe F., Canalda F., Spies F. WiFi-Based Indoor Positioning: Basic Techniques, Hybrid Algorithms and Open Software Platform // Research Report, Theme 4, LIFC, Montbeliard, France, Jan. 2011, P. 10–22.
6. Dudnik V.V. Algoritmy opredeleniya polozeniya v lokal'nykh besprovodnykh setyakh [Algorithms for Determining the Position in a Local Wireless Networks] // Youth Science and Technology Journal, Bauman Moscow State Technical University, 2011, P. 20–26.
7. Jonge M. Benchmarking Various Untrained Localization Algorithms, 3rd Twente Student Conference on IT, University of Twente, Netherlands, Jun. 2005, P. 59–65.
8. Kolodziej K.W., Hjelm J. Local Positioning Systems: LBS Applications and Services, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2006, 445 p.
9. Kupper A. Location-Based Services, John Wiley & Sons Ltd, England, 2005, 365 p.
10. Lassabe F., Baala O., Canalda P., Chatonnay P., Spies F. A Friis-Based Calibrated Model for WiFi Terminals Positioning // Proceedings of IEEE International Symposium on a World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks, Taormina, Italy, Jun. 2005, P. 382–387.
11. Miniakhmetov R.M. Integraciya algoritma klasterizacii Fuzzy c-Means v PostgreSQL // Works of Institute for System Programming of Russian Academy of Science. 2011. Vol. 21. P. 263–276.
12. Molteni R., Perini F. WhAC: a WiFi-Based Application for Indoor Customer Localization, Politecnico di Milano, Milan, Italy, 2011, 110 p.
13. Munoz D., Bouchereau F., Vargas C., Enriquez-Caldera R. Position Location Techniques and Applications, Academic Press, Burlington, Canada, 2009, 275 p.
14. Pan K.S., Zymbler M.L. Parallel'nyi algoritm resheniya zadachi analiza rynochnoi korzini na processorakh Cell [Parallel Algorithm for Solving the Problem of Market Basket Analysis on Cell Processors] // SUSU Messenger. Series "Mathematical Modelling and Programming", 2010, №16(192), Ed. 5, P. 48–57.
15. Roberts B.J. Site-specific RSS Signature Modeling for WiFi Localization, Worcester Polytechnic Institute, MA, USA, May 2009, 111 p.

*Поступила в редакцию 20 апреля 2013 г.*

# Краткие сообщения

УДК 378.146

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ COMPETENTUM

*О.Н. Иванова*

Описаны преимущества использования систем компьютерного тестирования для решения задач оценки уровня знаний и умений студентов по различным дисциплинам. Представлены методические рекомендации по организации тестирования в системе электронного обучения Competentum. Разработана детальная инструкция по настройке, организации хода и мониторингу результатов тестирования. Обоснована целесообразность применения системы в рамках виртуального образовательного пространства, предоставляемого студентам реализуемой технологией обучения «Персональный виртуальный компьютер».

*Ключевые слова: тестирование, контроль знаний, системы электронного обучения, персональный виртуальный компьютер.*

### Введение

Одним из наиболее важных показателей эффективности работы профессорско-преподавательского коллектива при обучении студентов является объективная оценка уровня знаний и компетентностных навыков, которыми должны обладать слушатели [5].

Контроль уровня сформированности универсальных учебных действий, достигнутых в процессе обучения студентов, может осуществляться с применением современных технологий, предоставляемых системами электронного обучения [1, 5]. Одним из примеров такой системы электронного обучения является линейка программных продуктов компании Competentum.

Целью работы является формирование методических рекомендаций по организации контроля знаний студентов в системе электронного обучения компании Competentum.

### Методические рекомендации

Образовательные цели, поставленные перед студентами при изучении каждой конкретной дисциплины, должны быть легко диагностируемыми и обладать объективным уровнем сложности, чтобы иметь возможность отделить обязательный минимум содержания образования, задаваемый требованиями Федерального государственного образовательного стандарта и рабочей программой по дисциплине, составленной в соответствии с основной образовательной программой вуза по направлению, от требований к уровню подготовки студентов по окончании изучения курса [2].

Основным преимуществом применения систем электронной системы тестирования являются критериально-ориентированный подход к оценке образовательных достижений

обучаемых. Особенность данного подхода заключается в оценке соответствия уровня достижений каждого отдельного обучающегося некоторым нормам, задаваемым стандартом или образовательной программой. При этом неважным становится начальный, стартовый уровень владения материалом, так как формируется индивидуальная траектория обучения студента и определяются его индивидуальные нормы развития. Принцип дифференцированного обучения тесно связан с индивидуализацией процесса обучения, консолидация данных об учебных достижениях студента по дисциплине позволяет преподавателю спрогнозировать динамику его дальнейшего развития, в конечном счете, на практике осуществлять интегрированный подход продвижения студента из зоны актуального в зону ближайшего развития.

В то же время критериально-ориентированный подход при электронном тестировании позволяет избежать субъективной ориентации преподавателя на статистические нормы усвоения знаний, определяемые для конкретной группы учащихся.

Методика применения системы электронного обучения компании Competentum при организации контроля знаний строится на одной из базовых форм проведения компьютерных тестов – автоматизированной генерации вариантов тестов. Это предполагает динамическое создание вариантов теста лично для каждого назначенного пользователя системы в момент его первого обращения к тесту. Считается, что база тестовых вопросов, разрабатываемая преподавателем, обладает устойчивыми статистическими характеристиками, сложность и разнородность вопросов откалибрована в соответствии с педагогико-эргономическими требованиями к тестам. Содержательная валидность и параллельность вариантов обеспечиваются за счет строго регламентированного отбора заданий каждого варианта в соответствии со спецификацией теста.

Каждый преподаватель при формировании банка тестовых заданий в программной системе Competentum.ABTOP формирует набор разделов теста, соответствующих тематическому содержанию учебного материала и предполагаемой сложностью тестовых заданий, указывая для каждого раздела количество выводимых студенту при тестировании вопросов.

Наличие большого количества типов тестовых вопросов в рассматриваемой системе позволяет расширить спектр измеряемых умений и навыков при тестировании.

Типовыми видами тестовых заданий, используемых преподавателями в системах электронного обучения, являются вопросы на выбор единственного или нескольких правильных вариантов ответов, вопросы на установление соответствия и порядка. Иногда к таким видам заданий относят также вопросы на категоризацию и заполнение пропусков, матричный выбор и ранжирование.

Типовые вопросы знакомы студентам, не вызывают затруднений при тестировании, как в плане понимания, что нужно сделать, так и при реализации интерфейса вопросов. В то же время дидактически целесообразно применять другие типы вопросов для организации контроля универсального характера знаний студентов. Широкие возможности для написания комплексных вопросов представляет тип «Заполнение пропусков DND», который позволяет оставить в предложении несколько пропусков и организовать выбор вариантов ответов для каждого из них (как вариант – тип вопроса «Заполнение пропусков с выбором»). Множество вариантов вопросов с использованием матриц также позволяет создавать интересные и сложные вопросы, требующие больше времени на ответ, но при

этом стимулирующие интерес к изучаемой дисциплине и мотивирующие к применению нестандартных алгоритмов обработки и осмысления изученной информации.

Конечно, процент включения нетипичных вопросов в тест должен обосновываться уровнем подготовки студентов, временем, отводимым на тестирование, достаточным опытом работы с оболочкой и другими факторами.

После разработки базы тестовых вопросов для входного, промежуточного, текущего или итогового контроля по дисциплине и некоторой настройки будущего теста (указание численных параметров теста – количество вопросов, длительность, а также других характеристик) преподаватель начинает работать с системой «Магистр» (последние версии данной программной системы называются ShareKnowledge), где непосредственно настраивает планируемый сеанс тестирования студентов и позже отслеживает ход и результаты тестирования.

Далее приводятся методические рекомендации по использованию программной системы «Магистр». В ходе своих действий преподаватель должен загрузить в систему тест и настроить его для прохождения, учитывая специфику организации контрольных мероприятий в учебном заведении и по конкретной дисциплине.

**Шаг 1.** Импорт подготовленного в программе «АВТОР» теста в систему «Магистр». Особенностью экспорта подготовленного в программе «АВТОР» теста является наличие возможности выбрать желаемый стандарт экспортирования. Наиболее целесообразным для применения является стандарт SCORM 2004, т.к. он позволяет использовать данный курс в различных системах дистанционного обучения и является одним из самых распространенных наборов спецификаций.

**Шаг 2.** Публикация импортированного теста осуществляется с указанием предустановленных правил назначения теста и его кода.

**Шаг 3.** Определение параметров тестирования. На этом шаге необходимо задать дату и время сдачи, выбрать шкалу оценок, указать количество попыток прохождения теста.

**Шаг 4.** Назначение теста студентам на контрольном мероприятии может происходить по мере заполняемости компьютерного класса, с назначением каждого конкретного студента или целой академической группе.

**Шаг 5.** Контроль и проверка результатов – один из разделов узла «Управление обучением», в котором для каждого теста можно просмотреть состояние тестирования каждого пользователя, вплоть до просмотра вопросов, которые у него были отобраны системой из общей базы вопросов, а также динамически изменяющиеся результаты в ходе тестирования и итоговый результат и отчет об ошибках после завершения сеанса.

Наиболее значительное число применений электронной системы тестирования происходит в момент заранее закрепленной в семестре контрольной точки (промежуточный тест, зачет, экзамен) и в синхронном режиме, т.к., как правило, академическая группа студентов одновременно проходит тестирование по дисциплине. Тем не менее, имеет место и асинхронное проведение тестирования, когда преподаватель публикует тест и назначает его группе студентов на определенный период (например, месяц), в течение которого они должны изучить некоторый материал и затем пройти тестирование для подтверждения усвоения знаний, возможно, за несколько попыток. Обычно такие возможности системы используются для организации тестирования по дополнительным, не обязательным, разделам курса, а также разделам, имеющим высокий уровень сложности и большую тестовую

вую базу вопросов. Рассмотренную систему можно применять для организации самоконтроля знаний студентами, получаемых в рамках внеаудиторной самостоятельной работы, что существенно расширяет возможности и в целом роль самоконтроля как формы организации обучения.

Система электронного обучения «Магистр» развернута на виртуальной сетевой инфраструктуре «Персональный виртуальный компьютер», действующей в ЮУрГУ в аудиториях, подключенных в сети Internet. Данная технология позволяет осуществить доступ из любой точки мира к виртуальному рабочему столу с установленным программным обеспечением и необходимыми образовательными сервисами [4].

Система «Магистр» позволяет организовать прохождение тестирования у больших потоков студентов, где в различных академических группах ведут занятия разные преподаватели. В таком случае лектор или держатель теста, публикует учебный тестовый материал с назначением преподавателей. У назначенных преподавателей появляется возможность осуществлять контроль и проверку результатов тестирования всех студентов, а не только той академической группы, в которой он ведет занятия, что можно обозначить как некоторый недостаток системы. Обычно, проведение текущего тестирования по разделу учебной дисциплины у потоков, состоящих из большого количества академических групп студентов, не удается организовать одновременно. Поэтому тестирование проводится в синхронном режиме (все студенты одной группы должны пройти тестирование одновременно, на одном занятии), но для каждой академической группы выделяется собственный период сдачи, чтобы избежать возможности удаленного тестирования отсутствующими студентами. При этом преподаватель, держатель теста, может опубликовать учебный материал несколько раз с назначением различных ведущих преподавателей и различных академических групп.

Система электронного обучения Competentum предоставляет преподавателю готовый шаблон сценария диалога со студентами, предустановленные классификации (шкалы) уровня знаний и умений студентов в зависимости от цели тестирования. Вместе с этим администратор системы может, исходя из потребностей конкретного учебного заведения, подразделения или даже преподавателя, создать новую шкалу оценок. Так, на ряде факультетов Южно-Уральского государственного университета внедрена балльно-рейтинговая система оценки успеваемости студентов по дисциплине, которая предполагает использование шкалы соответствия традиционных оценок некоторому набору чисел, соответствующих баллам, полученным студентом в течение семестра и на итоговых контрольных мероприятиях. В предустановленный набор шкал оценок были добавлены такие шкалы как «Экзамен» (от 50 % – «удовл.», от 65 % – «хор.», от 75 % – «отл.»), «Пересдача» (от 65 % – «удовл.», от 75 % – «хор.», от 85 % – «отл.»), «Вторая пересдача» (от 75 % – «удовл.», от 85 % – «хор.», от 95 % – «отл.»), «Зачет» (от 60 % – «зачтено»).

Тесты как структурные единицы электронного учебного материала могут быть опубликованными как постоянно, так и ограниченное время, и изыматься из учебных планов студентов, отображаемых на узле «Мое обучение». При этом результаты пройденных тестов сохраняются и могут быть доступны студенту наравне с преподавателем, в зависимости от выбранного статуса публикации: «Разрабатывается» (не доступен в каталоге новых учебных курсов у студентов; если студент успел ранее начать сеанс тестирования, до перевода в состояние разработки, тест будет доступен, результаты будут сохранены), «Изъят из каталога» (тест не доступен в каталоге новых и пройденных учебных курсов

у студентов, но доступен для всех преподавателей, назначенных для данного курса, все результаты доступны) или «В архиве» (тест не доступен в каталоге новых и пройденных учебных курсов в студентов, не доступен для преподавателей, назначенных для данного курса, но результаты тестирования доступны держателю теста).

Особенностью изъятия теста из системы или помещения его в архив является сохранение в полном объеме результатов тестирования каждого теста, включая протоколы тестирования для каждого студента.

Удаление учебного материала не приводит к изменению в статусе ранее опубликованного теста, так же как и его обновление: преподавателю нужно иметь в виду, что если студент начал тестирование, то обновление учебного материала и его повторная публикация с новыми настройками не приведет к автоматическому обновлению начатого сеанса тестирования. Поэтому при создании теста нужно остерегаться возможных ошибок в содержании или настройках электронного учебного материала.

Методическое описание этапа контроля уровня усвоения содержания образования отражено в представленных рекомендациях полностью и указывает на возможность циклического возврата к определенным этапам процесса настройки, организации хода и мониторинга результатов тестирования.

## Заключение

Исходными данными к началу разработки методических рекомендаций по организации контроля знаний в электронной системе обучения компании Competentum являлись требования, которые выдвигаются к тестам на проверку уровня обученности, формы компьютерных тестов, особенности компьютерного тестирования с применением рассматриваемой программной системы.

Разработанные методические рекомендации детально отражают процесс настройки и мониторинга результатов тестирования студентов в системе электронного обучения компании Competentum, применяющейся на факультете Вычислительной математики и информатики Южно-Уральского государственного университета.

Опыт применения данной системы выявил необходимость в проведении репетиционного тестирования для студентов, впервые работающих в данной системе, а также возможность и оправданную необходимость ее развертывания и использования в виртуальном пространстве, предоставляемом студентам Южно-Уральского государственного университета программной реализацией технологии обучения «Персональный виртуальный компьютер» [3].

## Литература

1. Жигальская, Н.С. Моделирование дидактической структуры электронных учебных комплексов / Н.С. Жигальская // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27(127). Вып. 2. – С. 4–9.
2. Иванова, О.Н. Разработка рейтинговой системы оценивания научно-исследовательской работы студентов в вузах России / О.Н. Иванова // Вузовское преподавание:

- стратегия инновационного развития в условиях модернизации высшего профессионального образования: Материалы 9-й международной научно-практической конференции, часть 1. – Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2009. – С. 137–139.
3. Козырев, В.И. Опыт использования VDI-системы «Персональный виртуальный компьютер» в ЮУрГУ / В.И. Козырев, П.С. Костенецкий // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений: Труды Международной суперкомпьютерной конференции (17–22 сентября 2012 г., г. Новороссийск). – М.: Изд-во МГУ, 2012. С. 285–286.
  4. Костенецкий, П.С. Создание образовательной платформы «Персональный виртуальный компьютер» на базе облачных вычислений / П.С. Костенецкий, А.И. Семёнов, Л.Б. Соколинский // Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее: Труды международной научной конференции (19–24 сентября 2011 г., г. Новороссийск). – М.: Изд-во МГУ, 2011. – С. 374–377.
  5. Силкина, Н.С. Модель образовательного стандарта третьего поколения на основе компетентностного подхода для систем электронного обучения / Н.С. Силкина, А.С. Евдокимова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 37(254). Вып. 10. – С. 90–98.
  6. Силкина, Н.С. Система UniCST - универсальная среда электронного обучения / Н.С. Силкина, Л.Б. Соколинский // Системы управления и информационные технологии. – 2010. – № 2. – С. 81–86.

Иванова Ольга Николаевна, к.п.н., доцент кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), ivanovaon@list.ru.

---

## METHODICAL RECOMMENDATIONS ON THE ORGANIZATION OF THE ESTIMATION OF KNOWLEDGE IN E-LEARNING SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF THE INSTRUMENTS OF COMPANY COMPETENTUM

*O.N. Ivanova*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

There are described the advantages of the use of systems of computer testing for the decision of problems of an estimation of level of knowledge and skills of students in various disciplines. There are presented methodological recommendations on organization of testing in e-learning system by Competentum. There is developed a detailed instruction for setting up, organizing the implementation and monitoring of the results of the testing. The article substantiates the expediency of application of the system in the framework of the virtual educational space provided for the students by the implemented technology of training «Personal virtual computer».

*Keywords:* testing, control of knowledge, e-learning systems, personal virtual computer.

### References

1. Zhigalskaja N.S. Modelirovanie didakticheskoy struktury jelektronnyh uchebnyh kompleksov [Modeling of the didactic structure of electronic educational complexes]. // Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie

- i programirovanie» [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming & Computer Software]. 2008. No. 27(127). Vol. 2. P. 4–9.
2. Ivanova O.N. Razrabotka rejtingovoj sistemy ocenivaniya nauchno-issledovatel'skoj raboty studentov v vuzah Rossii [The development of a rating system of estimation of students' scientific-research work in higher educational institutions of Russia] // Vuzovskoe prepodavanie: strategija innovacionnogo razvitija v uslovijah modernizacii vysshego professional'nogo obrazovaniya: Materialy 9-j mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, chast' 1. [University Education: the Strategy of Innovative Development in the Conditions of Modernization of Higher Professional Education: Proceedings of the 9th International Scientific-Practical Conference, Part 1] – Chelyabinsk: Publishing of Chelyabinsk State Pedagogical University, 2009. P. 137–139.
  3. Kozyrev V.I., Kosteneckij P.S. Opyt ispol'zovaniya VDI-sistemy «Personal'nyj virtual'nyj komp'yuter» v JuUrGU [The Experience of Using VDI-system «Personal Virtual Computer» in SUSU] // Nauchnyj servis v seti Internet: poisk novyh re-shenij: Trudy Mezhdunarodnoj superkomp'yuternoj konferencii (17–22 sentjabrja 2012, Novorossiysk). [Scientific Service in Network Internet: Search of New Solutions: Proceedings of the International Supercomputer Conference (17–22 September 2012. Novorossiysk)] M.: Publishing of MSU, 2012. P. 285–286.
  4. Kosteneckij P.S., Semjonov A.I., Sokolinskij L.B. Sozdanie obrazovatel'noj platformy «Personal'nyj virtual'nyj komp'yuter» na baze oblachnyh vychislenij [Creation of the Educational Platform «Personal Virtual Computer» on the Basis of Cloud Computing] // Nauchnyj servis v seti Internet: jekzaflopsnoe budushhee: Trudy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii (19-24 sentjabrja 2011, Novorossiysk). [Scientific Service in Network Internet: Search of New Solutions: Proceedings of the International Supercomputer Conference (19-24 September 2011. Novorossiysk)] M.: Publishing of MSU, 2011. P. 374–377.
  5. Silkina N.S., Evdokimova A.S. Model' obrazovatel'nogo standarta tretiego pokolenija na osnove kompetentnostnogo podhoda dlja sistem jelektronno obuchenija. [A Model of Educational Standards of the Third Generation on the Basis of Competence Approach to E-learning Systems] // Vestnik JuUrGU. Serija «Matematicheskoe modelirovanie i programirovanie». [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming & Computer Software]. 2011. No. 37(254). Vol. 10. P. 90–98.
  6. Silkina N.S., Sokolinskij L.B. Sistema UniCST - universal'naja sreda jelektronno obuchenija. [System UniCST - General Environment of E-learning] // Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii. [Management Systems and Information Technologies] 2010. No. 2. P. 81–86.

*Поступила в редакцию 14 января 2013 г.*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА

*В.И. Ухоботов, В.С. Величко*

Рассматривается задача о моделировании совместного со связями заданного пятизвенового механизма, у которого точки опоры шарнирно связаны с плоскостью. Управлениями являются моменты сил в шарнирных соединениях механизма. Для упрощенной модели на основе анализа уравнений движения излагается схема построения требуемых уравнений.

*Ключевые слова:* пятизвеновый механизм, движение, нечеткая логика, управление.

## Введение

Исследованию движения многозвённых механизмов посвящено большое количество литературы [1, 2, 3]. Актуальной является задача моделирования заданного движения механизма.

В данной работе излагается подход моделирования заданного движения пятизвённого механизма с привлечением нечетких алгоритмов. Рассматривается задача о компьютерном моделировании пятизвённого механизма с помощью пакета программ моделирования физических законов и задача управления моделью с помощью системы нечетких правил [4, 5].

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим пятизвённый механизм, изображенный на рис. 1.

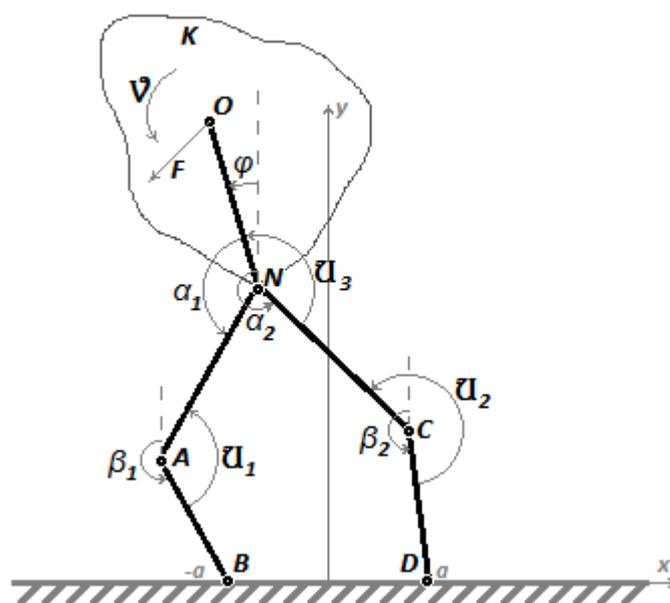


Рис. 1. Пятизвённый механизм

На этом рисунке точки А, N, С – точки шарнирного соединения невесомых стержней ВА, АN, DC и CN. Центром масс тела К является точка О.

Внешние силы, приложенные к телу К, приведены к одной силе  $F = (X, Y)$ , приложенной в центре масс, и к паре сил с моментом  $V$ . Посредством  $U_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) обозначены управляющие моменты в шарнирах. Посредством  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  обозначены углы, которые образуют стержни с вертикальной осью. Длины этих стержней обозначим  $AN=CN=l, BA=DC=L$ . Угол, который образует отрезок  $ON$  с вертикальной осью, обозначим буквой  $\varphi$ . Точки  $B$  и  $D$  неподвижны и их координаты равны соответственно  $(-a, 0), (a, 0)$ . Здесь число  $a > 0$ .

В качестве обобщенных координат возьмем координаты точки  $N$ . Тогда из условия неподвижности точек  $B$  и  $D$  получим уравнения связей

$$\begin{aligned} x - l \sin \alpha_1 - L \sin \beta_1 &= -a, & y + l \cos \alpha_1 + L \cos \beta_1 &= 0, \\ x - l \sin \alpha_2 - L \sin \beta_2 &= a, & y + l \cos \alpha_2 + L \cos \beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Кинетическая энергия тела  $K$  равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m\rho\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

Здесь обозначено  $m$  – масса тела  $K$ ,  $J=J_0+m\rho^2$ ,  $\rho$  – длина отрезка  $NO$ ,  $J_0$  – момент инерции тела  $K$  относительно центра масс.

Используя равенства

$$x_0 = x - \rho \sin \varphi, \quad y_0 = y + \rho \cos \varphi,$$

запишем элементарную работу сил на возможных перемещениях

$$\begin{aligned} \delta A &= X\delta x + Y\delta y + (V + U_3 - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi)\delta\varphi + \\ &+ (U_1 - U_3)\delta\alpha_1 + (U_2 - U_3)\delta\alpha_2 - U_1\delta\beta_1 - U_2\delta\beta_2. \end{aligned}$$

Выразим возможные изменения  $\delta\alpha_i$  и  $\delta\beta_i$  через  $\delta x$  и  $\delta y$  с помощью формул (1). Получим

$$\delta A = Q_x\delta x + Q_y\delta y + Q_\varphi\delta\varphi,$$

где обобщенные силы равны

$$\begin{aligned} Q_x &= X - U_1 \frac{x+a}{lL \sin(\alpha_1 - \beta_1)} - U_2 \frac{x-a}{lL \sin(\alpha_2 - \beta_2)} + U_3 \frac{\sin \beta_2}{l \sin(\alpha_2 - \beta_2)}, \\ Q_y &= Y - U_1 \frac{y}{lL \sin(\alpha_1 - \beta_1)} - U_2 \frac{y}{lL \sin(\alpha_2 - \beta_2)} - U_3 \frac{\cos \beta_2}{l \sin(\alpha_2 - \beta_2)}, \\ Q_\varphi &= V + U_3 - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя формулы (2) и (3), запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q, \quad q = x, y, \varphi.$$

Они принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \rho\ddot{\varphi} \cos \varphi + \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= \frac{1}{m} Q_x, \\ \ddot{y} - \rho\ddot{\varphi} \sin \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= \frac{1}{m} Q_y, \\ \ddot{\varphi} - \frac{m\rho}{J} (\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi) &= \frac{1}{J} Q_\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Из первых двух уравнений выразим величину  $\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi$  и подставим в третье уравнение. Получим

$$\ddot{\varphi} = \frac{Q_\varphi + \rho(Q_x \cos \varphi + Q_y \sin \varphi)}{J_0}. \quad (5)$$

Подставим эту формулу в первые два уравнения (4). Получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= \left( \frac{\rho^2}{J_0} \cos^2 \varphi + \frac{1}{m} \right) Q_x + \frac{\rho^2}{J_0} \sin \varphi \cos \varphi Q_y + \frac{\rho}{J_0} \cos \varphi Q_\varphi, \\ \ddot{y} - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= \frac{\rho^2}{J_0} \sin \varphi \cos \varphi Q_x + \left( \frac{\rho^2}{J_0} \sin^2 \varphi + \frac{1}{m} \right) Q_y + \frac{\rho}{J_0} \sin \varphi Q_\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. Моделирование заданного совместного со связями движения

### 2.1. Описание алгоритма построения управления

Пусть заданы функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ , которые совместны со связями (1). Подставляя третью формулу (3) в третье уравнение (4) получим, что

$$\ddot{\varphi} = \frac{m\rho}{J} (\ddot{x}(t) \cos \varphi + \ddot{y}(t) \sin \varphi) + \frac{1}{J} (V + U_3 - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi). \quad (7)$$

Допустим, что мы построили управление  $U_3(t, \varphi, \dot{\varphi})$ , которое обеспечивает заданный закон  $\varphi(t)$  изменения угла  $\varphi$ . Определитель матрицы, составленной из коэффициентов, стоящих в формулах (6) перед  $Q_x$  и  $Q_y$ , равен  $\frac{\rho^2}{J_0 m} + \frac{1}{m^2} > 0$ . Поэтому из формул (6) находим  $Q_x(t, \varphi, \dot{\varphi})$  и  $Q_y(t, \varphi, \dot{\varphi})$ . Подставляя эти выражения в формулы (3), находим моменты  $U_i(t, \varphi, \dot{\varphi})$ ,  $i=1, 2, 3$ . Отметим, что определитель матрицы, составленной из коэффициентов, стоящих в формулах (3) при переменных  $U_1$  и  $U_2$ , равен  $2a \frac{y}{\sin(\alpha_1 - \beta_1) \sin(\alpha_2 - \beta_2)} \neq 0$  при  $y \neq 0$ ,  $\alpha_i \neq \beta_i$ .

### 2.2. Моделирование прямолинейного и равномерного движения точки N

Рассмотрим случай, когда  $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = 0$ . Из формул (6) и из третьей формулы (3) получим, что

$$Q_x = \rho m \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{\rho^2 m}{J} (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \cos \varphi - \frac{\rho m}{J} (V + U_3) \cos \varphi,$$

$$Q_y = -\rho m \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \frac{\rho^2 m}{J} (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \sin \varphi - \frac{\rho m}{J} (V + U_3) \sin \varphi.$$

Подставим эти выражения в формулы (3). Найдем управляющие моменты

$$\begin{aligned} U_1 &= LL(A_1 + B_1 U_3) \sin(\alpha_1 - \beta_1), \\ U_2 &= LL(A_2 + B_2 U_3) \sin(\alpha_2 - \beta_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2ay} \left[ yX - (x-a)Y - (y \sin \varphi + (x-a) \cos \varphi) \rho m \dot{\varphi}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x-a) \sin \varphi) (V - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi) \right], \\ A_2 &= \frac{1}{2ay} \left[ -yX + (x+a)Y - (y \sin \varphi + (x+a) \cos \varphi) \rho m \dot{\varphi}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x+a) \sin \varphi) (V - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi) \right], \\ B_1 &= \frac{y \sin \beta_2 + (x-a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} + \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x-a) \sin \varphi), \\ B_2 &= -\frac{y \sin \beta_2 + (x+a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} - \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x+a) \sin \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J} (V - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi) + \frac{1}{J} U_3. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда  $X=0$ ,  $Y=-mg$ ,  $V=0$ . Тогда уравнение (10) записываем в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\rho mg}{J} \sin \varphi + \frac{1}{J} U_3.$$

Если моделируем  $\varphi(t) = 0$ , то в формулах (9) можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ ,  $\sin^2 \varphi \approx 0$ . Они примут вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2ay} \left[ (x-a)mg - (y\varphi + x-a)\rho m \dot{\varphi}^2 + \frac{\rho^2 m^2}{J} g y \varphi \right], \\ A_2 &= \frac{1}{2ay} \left[ -(x+a)mg - (y\varphi + x+a)\rho m \dot{\varphi}^2 - \frac{\rho^2 m^2}{J} g y \varphi \right], \\ B_1 &= \frac{y \sin \beta_2 + (x-a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} + \frac{\rho m}{J} (y - (x-a)\varphi), \\ B_2 &= -\frac{y \sin \beta_2 + (x+a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} - \frac{\rho m}{J} (y - (x+a)\varphi). \end{aligned}$$

### 3. Создание системы управления

#### 3.1. Среда для физического моделирования

В работе была создана среда для физического моделирования поведения механизма и визуализации работы системы. Для этого был использован пакет компьютерного моделирования физических законов реального мира Vox2D. Этот пакет также имеет средства графического отображения объектов.

#### 3.2. Принципы управления

Для начала рассмотрим перемещение точки  $N$ . Для изменения положения точки  $N$  достаточно использовать  $U_1$  и  $U_2$ . Все возможные положения точки  $N$  будут находиться в заштрихованной зоне на рис. 2.

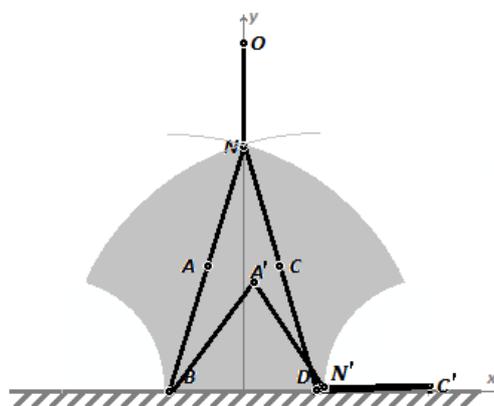


Рис. 2. Возможные положения точки  $N$

Верхние граничные положения достигаются, когда  $\angle BAN = \angle DCN = 180^\circ$  и лежат на соответствующих дугах с радиусом  $|BA| + |AN|$ . При условии, что звенья не могут проходить сквозь опору и сквозь друг друга, нижние границы также будут образованы дугами, когда точка  $C$  либо точка  $A$  лежит на оси абсцисс. Радиус дуг будет соответственно  $|CN|$ .

Для уменьшения координаты  $y$  точки  $N$  необходимо, чтобы  $U_1 < 0$  и  $U_2 > 0$ . Если  $N$  находится не дальше  $a$  по оси  $x$ , то для отклонения в сторону положительных  $x$  необходимо  $N$  приближать к точке  $D$ . Это достигается при  $U_2 > 0$ .

Так как точку  $N$  можно переместить в любую соседнюю точку внутри области, то мы можем перемещать ее по любой траектории внутри области.

Возможное положение точки  $O$  относительно точки  $N$  задается простой окружностью с радиусом  $|ON|$ . Углы  $\alpha$  можно изменить при помощи  $U_3$ .

#### 3.3. Построение системы управления

В ходе работы изначально была создана пробная системы управления звеньями механизма, обеспечивающая грубое управление. Впоследствии при анализе поведения построенной системы управления и выявлении недостатков управления, вносились изменения в нечеткие правила для того, чтобы траектория была максимально приближена к заданной.

В математической модели звенья не имели толщины и массы, но для большей реалистичности модели звенья были заданы тонкими прямоугольниками с малым весом. В точке О было добавлено жестко закрепленное тело с заданной массой. На каждом шаге моделирования для каждой пары объектов обрабатываются столкновения и силы взаимодействия.

В качестве среды программирования использована Embarcadero Delphi XE2.

Система управления, построенная на основе нечеткой логики, создавалась на экспериментальных данных, получаемых в ходе исследования движения модели.

Нечеткие правила и функции принадлежности составлены в системе FuzzyTECH 5.54 [6]. При фазсификации использован стандартный метод фазсификации (Compute MBF). Он предполагает использование функций принадлежности стандартного типа – треугольных, трапециевидных и кусочно-линейных кривых. Для агрегирования подусловий правил нечетких продукций использовано правило минимума.

Для дефазсификации выходных переменных  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  используем стандартный метод (Center\_of\_Maximum или сокращенно CoM), который, по мнению разработчиков FuzzyTECH, представляется методом наилучшего компромисса для получения окончательного значения выходных переменных.

Программа составлена таким образом, что в процессе работы можно с помощью клавиатуры или мыши вносить дополнительные помехи. При этом система управления адекватно реагирует на все изменения и корректирует траекторию движения.

## Заключение

Реализованная в работе модель, как, впрочем, и система управления – это лишь приближения к реальности. При реализации реальной системы управления реальным механизмом необходимо будет учесть еще ряд различных особенностей, условий и ограничений. Например, здесь предполагалось, что скорость поворота конечности можно изменять мгновенно, устанавливая ее равной заданной, но так, чтобы она не превышала максимальную. Это лишь приближение, на самом же деле, для любого реального привода, каков бы он ни был, существует более сложная зависимость его ускорения от скорости, внешнего сопротивления и внутреннего воздействия.

Однако, несмотря на неизбежные отличия модели от реального объекта, данная работа продемонстрировала возможность создания системы управления и показала путь к созданию такой системы – исследование поведения модели, накопление опыта управления, и изменение системы управления на основе полученного опыта.

В дальнейшем, возможно, будет попытка реализации модели пятизвенного механизма с незакрепленными к поверхности нижними звеньями. Это позволит реализовать походку пятизвенного механизма.

## Литература

1. Формальский, А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. / А.М. Формальский – М.: Наука – 1982. – 368 с.
2. Мартыненко, Ю.Г. Маятник на подвижном основании. / Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 439. – № 6. – С. 746–751.

3. Коренев, Г.В. Введение в механику человека. / Г. В. Коренев – М.: Наука. – 1977. – 264 с.
4. Заде, Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. / Л.А. Заде. – М.: Мир, 1976. – 161 с.
5. Ухоботов, В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учеб. пособие. / В.И. Ухоботов. – Изд-во ЧелГУ, 2011. – 245 с.
6. Леоненко, А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. / А.В. Леоненко – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.

Ухоботов Виктор Иванович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация, [ukh@csu.ru](mailto:ukh@csu.ru).

Величко Владислав Станиславович, аспирант, математик УНЛ методов оптимизации и моделирования игровых ситуаций кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, [124816@list.ru](mailto:124816@list.ru).

---

## SIMULATION OF THE 5-MEMBERED MECHANISM'S GIVEN MOVEMENT

*V.I. Ukhobotov*, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russian Federation),  
*V.S. Velichko*, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

This paper considers the simulation problem of the given consistent with constraints five-link mechanism, whose fulcrums are pivotally connected to the plane. Torques in the joints are the ways of controlling the mechanism. The scheme based on the analysis of the motion equations is presented constructing the required equations.

*Keywords: 5-membered mechanism, movement, fuzzy logic, control.*

## References

1. Formal'sky A.M. Peremeshenie antropomorfnykh mekhanizmov. [Movement of Anthropomorphic Mechanisms]. М.: Nauka [M.: Science]. 1982. 368 p.
2. Martynenko Y.G. Majatnik na podvizhnom osnovanii. [Pendulum on a Movable Base] Doklady akademii nauk [Reports of the Academy of Sciences]. 2011. Vol 439. No. 6. P. 746–751.
3. Korenev G.V. Vvedenie v mekhaniku cheloveka [Introduction to the Mechanics of Human]. М.: Nauka [M.: Science]. 1977. 264 p.
4. Zadeh L.A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. American Elsevier Publishing Company. New York. 1973.
5. Ukhobotov V.I. Izbrannie glavi teorii nechetkikh mnozhestv. [Selected chapters of the theory of fuzzy sets]. ChelGU [CSU]. 2011. 245 p.
6. Leonenko A.V. Nechetkoe modelirovanie v srede MATLAB i fuzzyTECH. [Fuzzy Simulation in MATLAB and fuzzyTECH Environment]. SPb.: BKhV-Peterburg. 2005. 736 p.

*Поступила в редакцию 13 марта 2013 г.*

# ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОКРЫТИЯ С УПОРЯДОЧЕННЫМ ОХВАТЫВАНИЕМ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

*Т.А. Панюкова, Е.А. Савицкий*

Задачи нахождения маршрутов, удовлетворяющих определенным ограничениям, появились из конкретных практических ситуаций. Например, в задачах раскроя листового материала плоский граф является моделью раскройного плана, а маршрут, покрывающий все ребра, определяет траекторию режущего инструмента. В статье рассматривается алгоритм построения оптимального покрытия произвольного плоского (возможно, многосвязного) графа цепями с упорядоченным охватыванием, позволяющий построить такую траекторию движения режущего инструмента, при которой отрезанная от листа часть не требует дополнительных разрезов. Показано, что алгоритм имеет полиномиальную сложность.

*Ключевые слова:* маршрут, упорядоченное охватывание, плоский граф.

## Введение

Задачи нахождения маршрутов, удовлетворяющих определенным ограничениям, появились из конкретных практических ситуаций. Например, в задачах раскроя листового материала плоский граф является моделью раскройного плана, а маршрут, покрывающий все ребра, определяет траекторию режущего инструмента.

Одной из работ по специальным вопросам эйлеровых графов является монография Г. Фляйшнера «Эйлеровы графы и смежные вопросы» [2, 3], где систематизировано и достаточно подробно рассмотрены некоторые виды эйлеровых цепей, например, цепи, не содержащие запрещенных переходов, попарно-совместимые эйлеровы цепи,  $A$ -цепи в графах.

Имеется ряд журнальных публикаций других авторов, в которых также рассматриваются задачи, посвященные эйлеровым цепям специального вида, например, расширение класса запрещенных переходов [10], самонепересекающиеся и непересекающиеся цепи, бинаправленные двойные обходы [3], маршруты Петри [11], прямолинейные маршруты [9], реберно-упорядоченные маршруты [1] и др.

Моделью раскройного листа будем считать плоскость  $S$ , моделью раскройного плана – плоский граф  $G$  с внешней гранью  $f_0$  на плоскости  $S$ . Для любой части графа  $J \subset G$  (части траектории движения режущего инструмента) обозначим через  $\text{Int}(J)$  теоретико-множественное объединение его внутренних граней (объединение всех связных компонент множества  $S \setminus J$ , не содержащих внешней грани). Тогда  $\text{Int}(J)$  можно интерпретировать как отрезанную от листа часть. Множества вершин, ребер и граней графа  $J$  будем обозначать через  $V(J)$ ,  $E(J)$  и  $F(J)$  соответственно, а число элементов множества  $M$  – через  $|M|$ . При этом требуется, чтобы отрезанная от листа часть не требовала дополнительных разрезов. В общем случае раскройный план представляет многосвязный граф, состоящий из вложенных компонент связности.

Задача состоит в построении покрытия графа ребрами, учитывающего ограничения, наложенные практической задачей. Авторами разработаны алгоритмы построения такого покрытия для связного графа [4, 5], а также алгоритмы нахождения допустимого эйлерова покрытия с упорядоченным охватыванием для многосвязного графа [6]. В данной работе

мы модифицируем алгоритмы, изложенные в [4, 5], для случая многосвязного графа с вложенными компонентами связности.

## 1. Основные понятия и определения

**Определение 1.** В соответствии с [4] будем говорить, что цепь  $C = v_1e_1v_2e_2\dots v_k$  в плоском графе  $G$  имеет упорядоченное охватывание, если для любой его начальной части  $C_l = v_1e_1v_2e_2\dots e_l$ ,  $l \leq |E|$  выполнено условие  $\text{Int}(C_l) \cap E = \emptyset$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что последовательность реберно-непересекающихся цепей

$$C^0 = v^0e_1^0v_1^0e_2^0\dots e_{k_0}^0v_{k_0}^0, C^1 = v^1e_1^1v_1^1e_2^1\dots e_{k_1}^1v_{k_1}^1, \dots, C^{n-1} = v^{n-1}e_1^{n-1}v_1^{n-1}e_2^{n-1}\dots e_{k_{n-1}}^{n-1}v_{k_{n-1}}^{n-1}$$

с упорядоченным охватыванием, покрывающая граф  $G$ , и такая, что

$$(\forall m : m < n), \quad \left( \bigcup_{l=0}^{m-1} \text{Int}(C^l) \right) \cap \left( \bigcup_{l=m}^{n-1} C^l \right) = \emptyset,$$

является покрытием с упорядоченным охватыванием.

Построение покрытия графа с упорядоченным охватыванием решает поставленную задачу раскроя. Наибольший интерес представляют покрытия с минимальным числом цепей, поскольку переход от одной цепи к другой соответствует холостому проходу режущего инструмента.

**Определение 3.** Минимальную по мощности последовательность реберно-непересекающихся цепей с упорядоченным охватыванием в плоском графе  $G$  будем называть эйлеровым покрытием с упорядоченным охватыванием.

Существование эйлеровых циклов с упорядоченным охватыванием в плоских эйлеровых графах доказано в работе [7]. В работе [8] предложен эффективный алгоритм построения циклов с упорядоченным охватыванием в плоских эйлеровых графах, имеющий вычислительную сложность  $O(|E| \cdot \log_2|V|)$ . В [5] доказана теорема, дающая возможность построения последовательности цепей с упорядоченным охватыванием с любым наперед заданным множеством дополнительных ребер  $M$ , образующим паросочетание на множестве вершин нечетной степени  $V_{odd}$ . Разработан алгоритм **M-Cover** построения допустимого эйлерова покрытия графа цепями с упорядоченным охватыванием. Вычислительная сложность алгоритма не превосходит величины  $O(|E| \cdot \log_2|V|)$ . Показано, что для построения оптимального покрытия достаточно в качестве  $M$  взять кратчайшее паросочетание на множестве  $V_{odd}$  (на этом основана работа алгоритма **OptimalCover**) [5]. Сложность алгоритма **OptimalCover** не превосходит величины  $O(|V^3|)$  (т.е. сложности построения паросочетания).

Для построения оптимального покрытия многосвязного графа, необходимо упорядочить его компоненты связности не только по уровням вложенности их ребер, но и подразделить компоненты связности на так называемые «вложенные объединения».

**Определение 4.** Вложенным объединением  $n$  будем называть семейство компонент связности  $S_n$  плоского графа, в котором компонента связности с уровнем вложенности  $k$  содержит в себе (охватывает) компоненты связности с уровнем вложенности больше  $k$ .

**Определение 5.** Под **уровнем вложенности компоненты связности** будем понимать минимальный уровень вложенности ребер этой компоненты связности.

**Определение 6.** **Уровнем вложенности ребра**  $e$  плоского топологического графа будем называть значение функции  $kmark(e)$  определяемой рекурсивно:

- все ребра, инцидентные внешней грани  $f_0$  графа  $G(V, E)$ , образуют множество ребер  $E_1 = \{e \in E : e \subset f_0\}$  с уровнем вложенности  $\forall e \in E_1 kmark(e) = 1$ ;
- ребра с уровнем вложенности 1 в графе

$$G_k \left( V, E \setminus \left( \bigcup_{l=1}^{k-1} E_l \right) \right), k \geq 2$$

составляют множество  $E_k$  ребер с уровнем вложенности  $k$  в исходном графе  $G$ , т.е.  $\forall e \in E_k kmark(e) = k$ .

Например, на 1 изображено четыре компоненты связности, образующих два вложенных объединения.

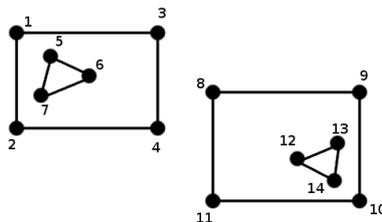


Рис. 1. Пример вложенных объединений

## 2. Алгоритм OptimalMultiComponent

Введем ограничение: невозможно переключиться на построение покрытия в другом вложенном объединении, пока имеются еще не пройденные ребра в текущем.

Для задачи построения оптимального покрытия с упорядоченным охватыванием в плоском графе возможно построить нерекурсивный алгоритм, который находит решение за полиномиальное время.

**Алгоритм OptimalMultiComponent**

**Входные данные:**

плоский граф  $G$ .

**Выходные данные:**  $C_j^s, j = 1, \dots, |V_{odd}|/2$ , – покрытие графа  $G$  цепями с упорядоченным охватыванием,  $s = 1, 2, \dots$  – номер компоненты связности.

**Шаг 1.** Выявить множество  $S$  всех компонент связности графа  $G$  и для каждой компоненты связности  $s \in S$  найти уровень вложенности  $K(s)$ .

**Шаг 2.** Построить полный абстрактный граф  $\mathfrak{S}$ , вершинами которого являются компоненты связности  $S$  графа  $G$ , а длины ребер равны расстоянию между ближайшими вершинами компонент связности.

**Шаг 3.** Найти остовное дерево минимального веса  $T(\mathfrak{S})$  в  $\mathfrak{S}$ .

**Шаг 4.** Добавить ребра найденного остовного дерева в граф  $G$ :  $G_{\mathfrak{S}} = G \cup T(\mathfrak{S})$ .

**Шаг 5.** Выполнить алгоритм OptimalCover [5] для графа  $G_{\mathfrak{S}}$ .

Предложенный алгоритм строит покрытие цепями с упорядоченным охватыванием за полиномиальное время.

Для графа, приведенного на 2, такое покрытие будет следующим (приведена последовательность цепей, состоящих из ребер исходного графа, в порядке их обхода, здесь верхний индекс – номер компоненты связности, нижний индекс – номер цепи для данной компоненты связности):

$$C_1^1 = \{5, 6, 7, 5\}, C_1^2 = \{1, 3\}, C_1^3 = \{8, 9, 10\}, C_1^4 = \{14, 13, 12, 14\},$$

$$C_2^3 = \{10, 11, 8\}, C_2^2 = \{3, 4, 2\}.$$

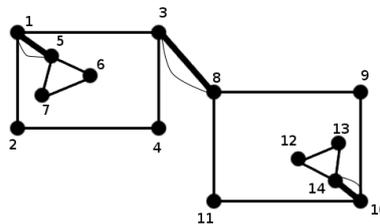


Рис. 2. Добавление ребер, соединяющих компоненты связности, и ребер, делающих граф эйлеровым

Шаг 1 алгоритма представляет собой волновой алгоритм, который решает свою задачу за время  $O(|V|^2)$ . Действия, выполняемые на шаге 2, могут быть выполнены также за время  $O(|V|^2)$ . Известно, что решение задачи на шаге 3 алгоритма может быть получено также за полиномиальное время  $O(|V|^2)$ , либо при использовании логарифмических сортировок эту величину можно уменьшить до  $O(|V| \cdot \log_2 |V|)$ . Шаг 4 имеет сложность  $O(1)$ . Выше упоминалось, что сложность алгоритма `OptimalCover` (шаг 5) не превосходит величины  $O(|V|^3)$ . Таким образом, суммарная сложность алгоритма `OptimalMultiComponent` представляет величину  $O(|V|^3)$ .

Алгоритм `OptimalMultiComponent` позволяет получить не большую длину дополнительных построений, по сравнению с разработанным ранее алгоритмом `MultiComponentCover` [6] (где переход по дополнительному ребру осуществлялся к ближайшей компоненте связности с внешними ребрами того же уровня вложенности). Это объясняется тем, что в данном алгоритме переход осуществляется к ближайшей возможной компоненте связности, а не к ближайшей возможной компоненте связности максимального уровня вложенности.

### 3. Программное обеспечение

На основе описанного в предыдущем разделе алгоритма `OptimalMultiComponent` разработана программа «Graph Editor». Она представляет собой простейший графический редактор, позволяющий изображать планарные графы, сохранять информацию о нарисованном графе в файле, загружать и отображать сохраненные программой графы, масштабировать их.

Данная программа разрабатывалась с целью отладки алгоритма построения оптимального покрытия с упорядоченным охватыванием для произвольного плоского графа. Поль-

зователь может как решить задачу за один этап (выбрав в главном меню соответствующую команду), так и разбить процесс решения задачи на несколько этапов:

- добавлять и удалять дополнительные ребра;
- помечать компоненты связности;
- находить дополнительные построения минимальной длины между компонентами связности (для этого используется алгоритм Краскала);
- находить покрытие с упорядоченным охватыванием для изображенного в рабочей области экрана графа.

При построении покрытия можно либо использовать оптимизацию (искать решение с помощью алгоритма `OptimalMultiComponent`), либо ограничиться поиском решения без оптимизации длины дополнительных построений (в этом случае будут построены дополнительные ребра оптимальной длины между компонентами связности, а для полученного односвязного графа используется алгоритм лексикографического упорядочения дополнительных построений).

Пользователь имеет возможность анимировать полученное решение и просмотреть процесс обхода ребер.

## Заключение

В статье рассмотрены алгоритмы и предложено программное обеспечение, которые позволяют эффективно решить задачу определения оптимальной траектории реза для любого раскройного плана.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.В37.21.0395.*

## Литература

1. Chebikin, D. On k-edge-ordered graphs / D. Chebikin // Discrete Mathematics. 2004. № 281. – P. 115–128.
2. Fleischner, H. Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol.1 / H. Fleischner. Ann. Discrete Mathematics. 1990. № 45. – 450 p.
3. Fleischner, H. Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol.2 / H. Fleischner. Ann. Discrete Mathematics. 1991. № 50. – 325 p.
4. Panyukova, T. Eulerian Cover with Ordered Enclosing for Flat Graphs / T. Panyukova // Electronic Notes in Discrete Mathematics. – 2007. – Vol. 28. – P. 17–24.
5. Панюкова, Т.А. Оптимальные эйлеровы покрытия для плоских графов / Т.А. Панюкова // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. – Т. 18, № 2. – С. 64–74.
6. Панюкова, Т.А. Эйлерово покрытие с упорядоченным охватыванием для многосвязного графа / Т.А. Панюкова // Материалы 3-й международной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». – Кишинёв: Euvica, 2012. – С. 429–438.
7. Panioukova, T.A. Algorithms for Construction of Ordered Enclosing Traces in Planar Eulerian Graphs / T.A. Panioukova, A.V. Panyukov // The International Workshop on Computer Science and Information Technologies 2003, Proceedings of Workshop, Ufa, September 16–18, 2003. Vol. 1, Ufa State Technical University, 2003. – P. 134–138.

8. Panyukov, A.V. The Algorithm for Tracing of Flat Euler Cycles with Ordered Enclosing / A.V. Panyukov, T.A. Panioukova // Proceedings of Chelyabinsk Scientific Center, 2000. – № 4(9). – P. 18–22.
9. Pisanski, T. Straight-ahead walks in Eulerian graphs / T. Pisanski, T.W. Tucker, A. Zitnik // Discrete Mathematics. – 2004. – Vol. 281. – P. 237–246.
10. Szeider, S. Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions / S. Szeider // Discrete Applied Mathematics. – 2003. – № 126. – P. 261–273.
11. Zitnik, A. Plane graphs with Eulerian Petrie walks / A. Zitnik // Discrete Mathematics. – 2002. – Vol. 244. – P. 539–549.

Татьяна Анатольевна Панюкова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономико-математических методов и статистики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), kwark@mail.ru.

Егор Александрович Савицкий, студент, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), egor88@inbox.ru.

---

## THE SOFTWARE FOR CONSTRUCTING A GRAPH COVERING WITH ORDERED ENCLOSING FOR MULTICONNECTED PLANAR GRAPHS

*T.A. Panyukova*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),  
*E.A. Savitskiy*, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

The problems of constructing such paths that correspond to definite restrictions have practical roots. For example, graph can present a cutting plan for cutting problem. A path covering all the edges of this graph determines the trajectory of cutting tool moving. The paper concerns the algorithm for constructing the optimal cover for any (may be multiconnected) graph by trails with ordered enclosing. This algorithm allows to find such a trajectory of cutting tool moving that a part cut off from a sheet does not require additional cuttings. It is shown that the considered algorithm has polynomial complexity.

*Keywords: path, ordered enclosing, plane graph.*

## References

1. Chebikin D. On k-edge-ordered graphs // Discrete Mathematics. 2004. № 281. P. 115–128.
2. Fleischner H. Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol. 1. Ann. Discrete Mathematics. 1990. № 45. 450 p.
3. Fleischner H. Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1, Vol. 2. Ann. Discrete Mathematics. 1991. № 50. 325 p.
4. Panyukova T. Eulerian Cover with Ordered Enclosing for Flat Graphs // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2007. Vol. 28. P. 17–24.
5. Panyukova, T.A. Optimal'nye Eulerovy pokrytiya dlya ploskih graphov [Optimal Eulerian Covers for Planar Graphs] Diskretnyi analiz i issledovaniye operatziy [Discrete Analysis and Operation Research]. 2011. № 2, Vol. 18. P. 64–74.

6. Panyukova T.A. Eulerovo pokrytiye s uporyadochennym ohvatyvaniem dlya mnogosvyaznogo grapha [Eulerian Cover with Ordered Enclosing for a Multiconnected Graph] Materialy 3-y mezhdunarodnoy konferentsii Matematicheskoe modelirovanie, optimizatsiya i IT [Materials of Third International Conference "Mathematical Modelling, Optimization and IT"] Kishinev, Evrica, 2012. P. 429–438.
7. Panioukova T.A., Panyukov A.V. Algorithms for Construction of Ordered Enclosing Traces in Planar Eulerian Graphs. The International Workshop on Computer Science and Information Technologies' 2003, Proceedings of Workshop, Ufa, September 16–18, 2003. Vol. 1, Ufa State Technical University, 2003. P. 134–138.
8. Panyukov A.V., T.A. Panioukova The Algorithm for Tracing of Flat Euler Cycles with Ordered Enclosing. Proceedings of Chelyabinsk Scientific Center, 2000. №4(9). P.18–22.
9. Pisanski T., Tucker T.W., Zitnik A. Straight-ahead walks in Eulerian graphs. Discrete Mathematics. 2004. Vol. 281. P. 237–246.
10. Szeider S. Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions. Discrete Applied Mathematics. 2003. № 126. P. 261–273.
11. Zitnik A. Plane graphs with Eulerian Petrie walks. Discrete Mathematics. 2002. Vol. 244. P. 539–549.

*Поступила в редакцию 10 апреля 2013 г.*

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНКУРЕНТНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ПРЕДПРИЯТИЙ СОТОВОЙ СВЯЗИ

*И.П. Болодурин, Т.А. Огурцова, Е.П. Маас*

В работе предложена динамическая модель конкурентного поведения предприятий сотовой связи в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Реализованы численные методы и алгоритмы для решения задачи оптимального управления поведением операторов сотовой связи в условиях конкурентной борьбы за потребителей услуг связи. Сформулирована и решена задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи с постоянным запаздыванием с использованием принципа максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием. Получены условия оптимальности для решения задачи управления динамикой развития абонентской базы фирмы № 1. Реализован метод линеаризации системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и проведен поиск оптимального решения задачи посредством операций улучшения управления, повторяемых в итерационной процедуре, на примере метода Шатровского.

*Ключевые слова:* математическая модель, запаздывание, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, улучшение управления.

### Введение

Телекоммуникационная отрасль относится к важнейшим секторам, обеспечивающим функционирование и согласованную работу всех отраслей экономики. Для описания конкуренции и взаимодействия нескольких фирм на рынке телекоммуникационных услуг, а также общей динамики развития абонентской базы двух конкурирующих экономических агентов в работе предложено использование логистической модели Лотки–Вольтерра с запаздыванием во времени. Решению задач, касающихся вопросов управления в компаниях сотовой связи посвящено значительное количество работ. В частности, в работе [4] построена модель, описывающая поведение предприятий сотовой связи на рынке в условиях неопределенности и предложен алгоритм управления поведением предприятия сотовой связи, реализованный по принципу обратной связи. В работе [9] исследованы модели рынка, описывающие поведение потребителей в отношении нескольких участников рынка, решена задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи линейно-квадратичного критерия оптимальности. Однако не решены задачи определения оптимального управления развитием предприятий сотовой связи для динамических моделей, имеющих запаздывание в фазовых переменных, что по большей части и определяет научную новизну работы.

Математические модели большинства экономических объектов и процессов являются нелинейными. При решении задач анализа и синтеза систем хорошо обоснованы только методы классической линейной теории, поэтому применяют различные методы линеаризации, при которых нелинейные зависимости заменяются эквивалентными линейными моделями. При решении многих оптимизационных задач для описания объектов и систем применяют модели на основе линейного приближения ряда Тейлора. Одним из направлений использования дифференциальной линеаризации являются числен-

ные методы, которые используются при синтезе систем управления и обработки информации, а также в идентификации параметров модели.

В первом разделе статьи рассматривается задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи с использованием принципа максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием. Во втором разделе предлагается метод линеаризации системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. В заключении сформулированы основные выводы и результаты работы.

## 1. Численное решение задачи оптимального управления поведением предприятия сотовой связи с учетом запаздывания

В настоящее время в России действуют три крупнейших оператора сотовой связи: МТС, Билайн, Мегафон и множество других менее развитых компаний, также предоставляющих услуги сотовой связи. Для описания конкурентного взаимодействия операторов сотовой связи на рынке телекоммуникационных услуг, а также общей динамики развития абонентской базы двух конкурирующих экономических агентов рассмотрим логистическую модель (1) Лотки–Вольтерра с запаздыванием во времени [3],

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t-\tau) - \gamma_{12}x_2(t-\tau)] - p_{11}u_1(t) - p_{12}u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t-\tau) - \gamma_{22}x_2(t-\tau)] - p_{21}u_1(t) - p_{22}u_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_i(t)$  – число абонентов  $i$ -го оператора сотовой связи в момент времени  $t$ ;

$\varepsilon_i, i = 1, 2$  – коэффициент прироста абонентской базы  $i$ -го оператора сотовой связи;

$\gamma_{ik}, i, k = 1, 2$  – коэффициент взаимного влияния  $i$ -го и  $k$ -го предприятий, предоставляющих услуги сотовой связи;

$p_{ik}, i, k = 1, 2$  – коэффициент влияния средней стоимости минуты на прирост числа абонентов  $i$ -го оператора сотовой связи;

$\tau$  – временной лаг (запаздывание), связанный с разницей во времени между изменениями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений с целью реагирования на эти изменения;

$u_i(t)$  – средняя стоимость минуты пользования услугами связи  $i$ -го оператора в момент времени  $t$ , удовлетворяющий ограничению (2)

$$\alpha \leq u_i(t) \leq \beta, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

Число абонентов  $i$ -го оператора сотовой связи на начальном интервале  $[-\tau, 0]$  задано функциями  $\varphi_i(t), i = 1, 2$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (3)$$

Фазовые ограничения описаны неравенствами (4).

$$\mu_i \leq x_i(t) \leq \eta_i, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

Задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи состоит в оптимизации ценовой политики  $u_1(t)$  первого экономического агента, с целью максимизации числа его абонентов.

$$J(u_1) = \int_0^T bx_1(t)dt \rightarrow \max \quad (5)$$

Поставленная задача относится к классу задач оптимального управления с постоянным запаздыванием [1]. Поэтому для ее решения применим принцип максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием в предположении, что значение стоимости минуты связи фирм конкурентов  $u_2 = const$ . Для этого построим функцию Понтрягина (6), где  $y_i = x_i(t - \tau)$ .

$$H(t, x, y, u_1, \psi, \lambda_0) = -\lambda_0 bx_1 + \psi_1 (\varepsilon_1 x_1 - \gamma_{11} x_1 y_1 - \gamma_{12} x_1 y_2 - p_{11} u_1 - p_{12} u_2) + \psi_2 (\varepsilon_2 x_2 - \gamma_{21} x_2 y_1 - \gamma_{22} x_2 y_2 - p_{21} u_1 - p_{22} u_2) \quad (6)$$

Пусть  $(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t))$  – локально оптимальный процесс в поставленной задаче. Тогда с необходимостью существуют множитель  $\lambda_0 > 0$  и абсолютно непрерывная вектор-функция  $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ ,  $t \in [0, T]$  такие, что выполняются следующие условия:

– условие максимума  $H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}_1, \psi, \lambda_0) = \max_{u_1 \in U} H(t, \bar{x}, \bar{y}, u_1, \psi, \lambda_0)$

или  $\bar{u}_1(t)(p_{11}\psi_1(t) + p_{21}\psi_2(t)) = \min_{\alpha \leq u_1 \leq \beta} u_1(t)(p_{11}\psi_1(t) + p_{21}\psi_2(t))$ ;

– сопряженные функции  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\psi_1(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_1}(t + \tau) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1}(t) = \psi_1(t + \tau)\gamma_{11}\bar{x}_1(t + \tau) + \psi_2(t + \tau)\gamma_{21}\bar{x}_2(t + \tau) - \lambda_0 b - \psi_1(t)(\varepsilon_1 - \gamma_{11}\bar{y}_1(t) - \gamma_{12}\bar{y}_2(t))$$

$$\psi_2(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_2}(t + \tau) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2}(t) = \psi_1(t + \tau)\gamma_{12}\bar{x}_1(t + \tau) + \psi_2(t + \tau)\gamma_{22}\bar{x}_2(t + \tau) - \psi_2(t)(\varepsilon_2 - \gamma_{21}\bar{y}_1(t) - \gamma_{22}\bar{y}_2(t))$$

на отрезке  $t_0 \leq t \leq T - \tau$ , и  $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t) \equiv 0$  на отрезке  $T - \tau \leq t \leq T$ ;

– условия трансверсальности  $\psi_1(T) = 0$ ,  $\psi_2(T) = 0$ ;

– условия допустимости (1)-(4).

Введем функцию переключения:  $-p_{11}\psi_1 - p_{21}\psi_2 = \rho(t)$ . Для нахождения оптимального управления необходимо решить задачу

$$\bar{u}_1(t)[-p_{11}\psi_1 - p_{21}\psi_2] \rightarrow \max_{u_1 \in U}, \text{ где } U = \{u_1 \in R : \alpha \leq u_1 \leq \beta, \alpha > 0, \beta > 0\}.$$

Из условия максимума функции Понтрягина находим оптимальное управление (7)

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} \beta, & \rho(t) > 0, \\ \alpha, & \rho(t) < 0, \\ \in (\alpha, \beta), & \rho(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Наличие фазовых ограничений (4) учтем в функционале (5) путем введения штрафных слагаемых.

Для построения численной схемы приближённого решения поставленной задачи оптимального управления динамикой развития абонентской базы, проведем дискретную аппроксимацию непрерывной задачи с точностью первого порядка. Дискретная задача оптимального управления, аппроксимирующая непрерывную задачу (1)-(5), состоит в нахождении минимума функции (9) при ограничениях (10)-(12).

$$I(u_1) = - \sum_{i=0}^{q-1} b x_1^i \Delta t + \bar{A}_k \sum_{i=0}^q \left[ \sum_{j=1}^2 \max^2 \{ h_j^i(x^i), 0 \} \right] \Delta t + \bar{B}_k \sum_{i=0}^q \left[ \sum_{j=1}^2 \max^2 \{ g_j^i(x^i), 0 \} \right] \Delta t \rightarrow \inf \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = x_1^i + \varepsilon_1 x_1^i \Delta t - \gamma_{11} x_1^i x_1^{i-\nu} \Delta t - \gamma_{12} x_1^i x_2^{i-\nu} \Delta t - p_{11} u_1^i \Delta t - p_{12} u_2^i \Delta t \\ x_2^{i+1} = x_2^i + \varepsilon_2 x_2^i \Delta t - \gamma_{21} x_2^i x_1^{i-\nu} \Delta t - \gamma_{22} x_2^i x_2^{i-\nu} \Delta t - p_{21} u_2^i \Delta t - p_{22} u_2^i \Delta t \end{cases} \quad i = \overline{0, q-1} \quad (10)$$

$$x_j^{i(0)} = \varphi_j(i\Delta t), \quad i = \overline{-\nu, 0}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

$$\alpha \leq u_1^i \leq \beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad i = \overline{0, q-1}. \quad (12)$$

где  $h_i(t, x) = \eta_i - x_i(t) \leq 0$ ,  $g_i(t, x) = x_i - \mu_i(t) \leq 0$ .

Параметры задачи подобраны с учетом анализа статистических данных абонентской базы, динамики предыдущей тарифной политики и тенденции развития рынка.

## 2. Поиск оптимального управления поведением предприятий сотовой связи, посредством операций улучшения управления

Один из приближенных методов решения задач оптимального управления нелинейными объектами предложен Л.И. Шатровским [5]. Он относится к методам линеаризации, использующим первую вариацию, и основан на итерационной процедуре, в ходе которой при заданном в виде функции времени начальном приближении управления, на каждом шаге решается линеаризованная задача с использованием рекуррентных вычислений. В ходе итерационной процедуры произвели приближение функции управления  $u_1(t)$  к оптимальному управлению  $\bar{u}_1(t)$ . Достаточное количество итераций определили неравенством (13), где  $u_1^k(t)$  – функция управления, найденная на  $k$ -ом шаге,  $\chi$  – точность минимизации функционала.

$$J(u^{k-1}) - J(u^k) \leq \chi \quad (13)$$

Начальное приближение управления выбрали равным  $u_0(t)$ .

После аппроксимации дифференциальных уравнений отрезком ряда Тейлора с учетом вторых производных, задача улучшения управления  $u_1^k(t)$  сводится к задаче поиска такой вариации  $v^k(t)$ , которая минимизировала бы приращение функционала (14)

$$J(u) = y_3(T) \rightarrow \min \quad (14)$$

на решениях линеаризованной системы (15)

$$\begin{cases} y_1^{i+1} = y_1^i + (a_{11}y_1^i + a_{12}y_2^i + a_{13}y_3^i - p_{11}v^i)\Delta t \\ y_2^{i+1} = y_2^i + (a_{21}y_1^i + a_{22}y_2^i + a_{23}y_3^i - p_{21}v^i)\Delta t \\ y_3^{i+1} = y_3^i + (a_{31}y_1^i + a_{32}y_2^i + a_{33}y_3^i)\Delta t \end{cases} \quad (15)$$

С целью определения оптимальных динамических траекторий и оптимального управления в среде Borland Delphi 7.0 разработан программный комплекс, реализующий численное решение поставленной задачи оптимального управления конкурентным поведением предприятий сотовой связи, в основе которого лежит метод проекции градиента и метод улучшения управления (метод Шатровского).

По имеющимся статистическим данным абонентской базы, динамики предыдущей тарифной политики и тенденции развития рынка созданный программный комплекс позволяет находить оптимальные управленческие сценарии для различных предприятий, предоставляющих услуги связи. Значения функционала качества показаны в таблице.

**Таблица**

Значения функционала качества  $J(u_1)$ , характеризующего прирост числа абонентов фирмы № 1 за период в 10 кварталов (млн. чел.)

|                                       | Метод проекции градиента | Метод Шатровского |
|---------------------------------------|--------------------------|-------------------|
| Неуправляемая модель без запаздывания | 91.23                    | 91.03             |
| Неуправляемая модель с запаздыванием  | 99.35                    | 99.12             |
| Управляемая модель без запаздывания   | 115.09                   | 98.17             |
| Управляемая модель с запаздыванием    | 127.002                  | 108.79            |

## Заключение

В работе решена задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи с использованием принципа максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием, а также методом последовательной линеаризации для поиска оптимального управления, посредством операций улучшения управления (методом Шатровского). В результате проведенного анализа решений установлено, что при использовании метода Шатровского не удалось улучшить функционал качества поставленной задачи по сравнению с методом проекции градиентов. Прирост числа абонентов фирмы № 1 при численном решении на основе принципа максимума Понтрягина на 16,71 % больше, чем при управлении, найденным по методу Шатровского. Таким образом, методы численного решения, базирующиеся на принципе максимума Понтрягина, являются более эффек-

тивным инструментом для наращивания абонентской базы предприятия в условиях конкурентной борьбы на рынке сотовой связи.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 12-01-31325.*

## Литература

1. Андреева, Е.А. Управление системами с последствием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 336 с.
2. Болодурина, И.П. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и их приложения: учебное пособие / И.П. Болодурина – Оренбург: Оренбург. гос. ун-т, 2006. – 101 с.
3. Болодурина, И.П. Управление ценой на предоставляемые услуги предприятий телекоммуникационной отрасли / И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова // Проблемы управления. – 2011. – № 3. – С. 30–35.
4. Коблов, А.И. Модели и алгоритмы управления поведением предприятий сотовой связи в условиях неопределенности: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01: защищена 15.11.2007 / А.И. Коблов – ЮУрГУ, 2007. – 136 с.
5. Когут, А.Т. Модификация метода Шатровского решения нелинейных задач оптимального управления. / А.Т. Когут, А.А. Лаврухин // Омский научный Вестник. – Омск, 2005. – № 3. – С. 81–85.
6. Когут, А.Т. Применение алгоритмов линеаризации для идентификации и адаптивного управления в нелинейных динамических системах: монография / А.Т. Когут, Н.А. Тихонова. Омский гос. ун-т путей сообщения. – Омск, 2008. – 126 с.
7. Прасолов, А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии / А.В. Прасолов – СПб.: Лань, 2010. – 192 с.
8. Шатровский, Л.И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления / Л.И. Шатровский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2:3 (1962). – С. 488–491.
9. Модели прогнозирования развития региональных рынков и оптимальное управление поведением фирмы / В.И. Ширяев, И.Г. Гришин, А.И. Коблов // Вестник Пермского университета. Математика, механика, информатика. – 2007. – Выпуск 7(12). – С. 149–164.

Болодурина Ирина Павловна, д.т.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики, Оренбургский государственный университет (Оренбург, Российская Федерация), prmat@mail.osu.ru.

Огурцова Татьяна Александровна, ст. преподаватель кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет (Оренбург, Российская Федерация), ogurtsovat.a@yandex.ru.

Маас Елена Петровна, студент кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет (Оренбург, Российская Федерация), prmat@mail.osu.ru.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL THE BEHAVIOR OF ECONOMIC AGENTS IN THE CONDITIONS OF COMPETITIVENESS

*Bolodurina I.P.*, Orenburg State University (Orenburg, Russian Federation)

*Ogurtsova T.A.*, Orenburg State University (Orenburg, Russian Federation)

*Maas E.P.*, Orenburg State University (Orenburg, Russian Federation)

In work the dynamic model of competitive behavior of the enterprises of cellular communication in the form of system of the differential equations with delay is offered. Numerical methods and algorithms for the solution of a problem of optimum control by behavior of mobile operators in the conditions of competitive fight for consumers of communication services are realized. The problem of optimum control by behavior of the enterprises of cellular communication with continuous delay with use of the principle of a maximum of Pontryagin for systems with continuous delay is formulated and solved. Conditions of an optimality for the solution of a problem of management are received by dynamics of development of subscriber base of firm No. 1. The method of linearization of system of the nonlinear differential equations with delay is realized and search of the optimum solution of a task by means of operations of improvement of the management, repeated in iterative procedure, on the example of modification of a method Shatrovsky is carried out.

*Keywords: mathematical model, delay, optimum control, management improvement.*

### References

1. Andreeva E.A. Upravleniye sistemami s posledeystviem [the management of systems with aftereffect]. Moscow, Nauka. The main editorial office of physico-mathematical literature, 1992. 336 p.
2. Bolodurina I.P. Differentsialnye uravneniya s zapazdivausim argumentum i ih prilozheniya [Differential equations with retarded argument and their applications]. Orenburg. The state. un-t, 2006. 101 p.
3. Bolodurina I.P., Ogurtsova T.A. Upravlenie cenoy na predostavlyaemie uslugi predpriyatiy telekommunikacionnoy otrasli [The management of the price for the provided services of the enterprises of the telecommunications industry]. Problemi Upravleniya [Problems of management]. 2011. No. 3. P. 30–35.
4. Koblov A.I. Modeli i algoritmi upravleniya povedeniem predpriyatiy sotovoy svyazi v usloviyah neopredelennosti [Models and algorithms for behavior management of the enterprises of cellular communication in the conditions of uncertainty]: the Dissertation of candidate of technical Sciences. SUSU, 2007. 136 p.
5. Kogut A.T. Modificaciya metoda Shatrovskogo resheniya nelineynih zadach optimalnogo upravleniya [Modified method of Shatrovsky solution of nonlinear problems of optimal control]. Omskiy nauchniy Vestnik [Omsk scientific bulletin]. 2005. No. 3. P. 81–85.
6. Kogut A.T. Primeneniye algoritmov lianerizacii dlya identifikacii i adaptivnogo upravleniya v nelineynih dinamicheskikh sistemah [Application of algorithms of linearization for identification and adaptive control for nonlinear dynamic systems]. Omsk, The Omsk state. un-t of communication, 2008. 126 p.

7. Prasolov A.V. Dinamicheskiye modeli s zapazdivaniem i ih prilozheniya v ekonomike i ingenerii [Dynamic models with delay and their applications in Economics and engineering]. St. Petersburg, Fallow deer, 2010. 192 p.
8. Shatrovsky L.I. Ob odnom chislennom metode resheniya zadach optimalnogo upravleniya [About one numerical method of the solution of problems of optimum control]. Zurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki [computational mathematics and mathematical physics]. 2:3 (1962), P. 488–491.
9. Shiryayev V.I., Grishin I.G., Koblov A.I. Jars B.M. Modeli prognozirovaniya razvitiya regionalnih rynkov i optimalnoe upravlenie povedeniem firmi [Models of forecasting the development of regional markets and optimal control of the behavior of the firm] Bulletin of the University of Perm. Mathematics, mechanics, information. 2007. Issue 7 (12). P. 149–164.

*Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.*

## ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

По техническим причинам при подготовке макета научного журнала «Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика» № 47(306), вып. 2 (2012 г.) была допущена неточность.

В статье Гаязовой А.О., Абдуллаева С.М. «Прогнозирование численности *Microcystis Aeruginosa* на основе правил нечеткой логики и нечетких нейронных сетей» (с. 5–11) аннотацию статьи на английском языке следует читать:

The retrieval of potential predictors of blue-green algae *M. aeruginosa* blooms and bloom prediction using fuzzy logic rules and fuzzy neural networks is discussed. Time series of seasonal dynamics of *M. aeruginosa* quantities and parameter values were obtained through field observations of biotic and abiotic parameters of the water environment held at Lake Smolino (Chelyabinsk) in the warm season of 2009 and 2011. The cross-correlation analysis of the data revealed the potential predictors of *M. aeruginosa* abundance quasi-periodic oscillations with a period of 12-20 days: algae *P. duplex* abundance, water temperature and the concentration of nitrates. According to the results of cross-correlation analysis a number of rules and membership functions in a range of changes from zero to one is set forward. Specially written program was used to train the fuzzy neural network in data on the values of predictant and selected predictors to apply the predictive rules and membership functions automatically. To compare the results additionally performed a linear extrapolation of the predictant abundance. Seasonal development of *M. aeruginosa* was well predicted by the extrapolation forecast only on quasilinear intervals of *M. aeruginosa* abundance evolution, whereas fuzzy logic theory was good to predict the *M. aeruginosa* intense outbreaks.

Приносим извинения за допущенную неточность.

## СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗДАНИИ

*Серия основана в 2012 году.*

*Свидетельство о регистрации ПИ ФС77-26455 выдано 13 декабря 2006 г. Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Правила подготовки рукописей и пример оформления статей можно загрузить с сайта серии <http://vestnikvmi.susu.ru>. **Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются и назад авторам не высылаются.**
2. Адрес редакции научного журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Вычислительная математика и информатика»:  
Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет Вычислительной математики и информатики, кафедра СП, ответственному секретарю, доценту Цымблеру Михаилу Леонидовичу.
3. Адрес электронной почты редакции: [vestnikvmi@gmail.com](mailto:vestnikvmi@gmail.com)
4. **Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.**
5. Подписной индекс научного журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Вычислительная математика и информатика»: 10244, каталог «Пресса России». Периодичность выхода — 4 выпуска в год (февраль, май, август и ноябрь).