

ВЫПИСЫВАНИЕ ФОРМУЛ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИЛ В СОЧЛЕНЕНИЯХ МАНИПУЛЯТОРОВ В СТАТИКЕ

С.Г. Пудовкина, А.И. Телегин

*Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе,
г. Миасс, Россия*

Решается проблема громоздкости математических моделей манипуляционных систем промышленных роботов. Здесь рассматриваются формулы вычисления статических реакций в сочленениях и активных сил, уравновешивающих силы тяжести, действующие на тела манипулятора в его неподвижном состоянии. В этом состоянии манипулятор находится, например, перед захватом объекта манипулирования и его освобождением, при выполнении некоторых сборочных операций, в процессе точечной сварки, в медленных (квазистатических) процессах дуговой сварки и покраски. **Цель исследования.** Вывести общие рекуррентные и конечные формулы вычисления сил реакций в сочленениях, а также их проекций на оси системы координат, жестко связанной с выбранным телом. Формулы проекций сил выразить через направляющие косинусы и обосновать их оптимальность в смысле минимума арифметических операций. Вывести общие обратные рекуррентные формулы для выписывания направляющих косинусов осей, связанных с подвижными телами системы координат относительно неподвижной системы координат. **Методы исследования** относятся к векторной механике и системному анализу, а также алгоритмизации вычислений путем их сведения к использованию рекуррентных формул. **Результаты.** Выполнен системный анализ общих формул, в которых выделены все возможные регулярные выражения, однозначно соответствующие кинематическим параметрам манипуляторов. Эти регулярные выражения используются в программном обеспечении аналитического моделирования манипулятора, в частности, аналитического решения задач статики манипулятора. Описана методика аналитической верификации выписанных формул. Решены задачи выписывания оптимальных формул вычисления проекций сил статических реакций в сочленениях, а также активных сил в поступательных сочленениях универсальных манипуляторов с шестью степенями свободы, работающих в декартовой, цилиндрической, сферической и ангулярной системах координат. Выполнена аналитическая верификация выписанных уравнений статики. Продемонстрированы примеры повторного использования выписанных формул для манипуляторов с совпадающими кинематическими схемами их подсистем. **Заключение.** Выражения уравнений статики манипуляторов через направляющие косинусы осей связанных систем координат их тел позволяют записать эти уравнения через известные параметры ориентации тел. Рекуррентный вид формул вычисления направляющих косинусов позволяет в их программной реализации использовать рекурсивные функции, т. е. повысить вычислительную эффективность ПО.

Ключевые слова: движущие силы, силы реакции, задачи статики, направляющие косинусы, верификация формул, регулярные выражения, оптимизация вычислений.

Введение

Основная проблема механики манипуляционных систем (МС) роботов – громоздкость формул математических моделей МС, что является следствием сложности МС, зависящей от количества её подвижных тел, связей между ними и числа степеней подвижности. К сложным относятся, например, МС универсальных промышленных и специализированных роботов [1]. Такие МС состоят из шести следующих друг за другом тел и имеют шесть степеней подвижности в пространстве. Как правило, первые три управляемых тела переносят захват в нужную точку рабочей области. Последние три управляемых тела обеспечивают необходимую ориентацию в пространстве объекта манипулирования в захвате, например, переносимого груза, горелки сварочного аппарата, краскораспылителя, гаечного ключа и т. д. [2]. По уровню возрастания сложности шести-

степенные МС можно выстроить в следующий ряд: МС с декартовой, цилиндрической, сферической и ангулярной системой координат (СК) [3].

Математические модели МС содержат уравнения кинематики, статики и динамики. Для увеличения быстродействия и точности решения различных задач эти уравнения приводят к аналитическим видам с минимальным числом арифметических операций. Предлагаются новые способы решения прямых и обратных задач кинематики МС промышленных роботов [4], шагающих аппаратов [5], трех и шестиколесных мобильных роботов [6, 7], роботов с параллельной кинематикой [8–10]. Для быстрого решения обратных задач кинематики используются генетические алгоритмы [11], где обратная задача кинематики формулируется как задача оптимизации.

В решении задач статики рассматриваются квазистатические режимы функционирования МС, что упрощает математические модели без существенной потери точности вычислений. Например, при решении задач управления сверхмощным шестиногим шагающим аппаратом в квазистатическом режиме ходьбы потеря точности вычисления движущих моментов сил не превышала пяти процентов, что подтверждено результатами динамического анализа в программной среде ADAMS [12].

Существенную роль в математических моделях МС играют направляющие косинусы (НК) как параметры ориентации тел в пространстве [13]. В классических работах по механике представлены выражения всех известных параметров ориентации тел в пространстве через НК, что позволяет перейти от уравнений в НК к уравнениям в других параметрах ориентации тел [14–16]. Поэтому задача выписывания оптимальных (в смысле быстродействия вычислений) аналитических формул для НК сложных МС и использование их в математических моделях МС является актуальной.

Постановка задачи. Вывести общие векторные и скалярно-координатные формулы вычисления сил реакций и движущих сил в сочленениях МС. Вывести общие рекуррентные формулы вычисления направляющих косинусов осей связанных систем координат тел относительно неподвижных осей. Обосновать вычислительную эффективность полученных формул и продемонстрировать их на примерах основных схем построения промышленных роботов.

1. Используемые понятия и обозначения

Два связанных тела МС образуют кинематическую пару (КП). Неподвижное относительно земли тело, образующее КП с первым телом МС, назовем неподвижным телом отсчета (НТО). Количество подвижных тел МС обозначим буквой N . Следующие друг за другом тела МС занумеруем числами $1, 2, \dots, N$. Для произвольных номеров тел используем обозначения i, j, k . Если номер тела равен i , то это тело и его массу обозначим через m_{oi} . Цифрой 0 (ноль) занумеруем НТО.

Рассмотрим произвольное тело m_{ok} . Если оно образует КП с одним телом МС, то m_{ok} является концевым телом и $k = N$. Если тело m_{ok} образует КП с двумя соседними телами, то тело m_{ok-1} назовем базовым телом (БТ) для тела m_{ok} , а тело m_{ok+1} назовем смежным телом для тела m_{ok} . У единственного концевого тела m_{oN} нет смежного тела. Базу тела m_{ok} обозначим через БТ(k). Тело m_{ok} и его БТ(k) образуют КП(k). Здесь и далее число в скобках после аббревиатуры указывает на номер тела. Номер КП равен номеру ее смежного тела, т. е. тела с большим номером в паре. Поэтому тело m_{o1} и НТО образуют КП(1).

Для описания положений тела m_{oi} введем в обращение точку O_i . Жестко свяжем ее с этим телом. Назовем ее полюсом тела (ПТ) m_{oi} или ПТ(i). С НТО жестко свяжем точку отсчета O . Для каждого тела введем связанную систему координат (ССК) с началом в его полюсе, и орты осей ССК(i) обозначим через $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$. Произвольное положение тела m_{oi} можно описать координатами ПТ(i) и параметрами ориентации ССК(i). Различают относительное и абсолютное положение тела m_{oi} . Положение тела m_{oi} относительно БТ(i) называют относительным. Положение тела m_{oi} относительно НТО называют абсолютным. С НТО жестко свяжем неподвижную систему координат (НСК). В исходном положении тел МС оси всех ССК направим параллельно соответствующим осям НСК с ортами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Ось абсцисс $O\bar{x}$ направим горизонтально вправо, ось ординат $O\bar{y}$ направим вертикально вверх и ось аппликат $O\bar{z}$ направим так, чтобы НСК была правой.

Из уравнений кинематики здесь выписываются формулы вычисления направляющих косинусов (НК) осей КП в НСК. Для сокращения записей таких формул введем в обращение грече-

ские буквы ξ, η, ζ , принимающие значения на множестве символов $\{x, y, z\}$. Тогда, например, девять известных формул скалярных произведений орт осей СК можно коротко записать в виде $\bar{\xi} \cdot \bar{\xi} = 1, \bar{\xi} \cdot \bar{\eta} = 0$, где $\xi \neq \eta$. Для произвольных НК используем обозначение

$$\xi_{ji}^{\eta} = \bar{\xi}_j \cdot \bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i \cdot \bar{\xi}_j = \cos(\bar{\eta}_i, \bar{\xi}_j), \quad (1)$$

где $\xi_{ji}^x, \xi_{ji}^y, \xi_{ji}^z$ – НК орта $\bar{\xi}_j$ в ССК(i) и $i \leq j$.

2. Силы и моменты сил в КП

Мерой взаимодействия двух тел является сила. Для формального описания взаимодействия тел КП(k) приведем к ПТ(k) систему сил, действующих на тело m_{ok} со стороны БТ(k). Получим главный вектор \bar{F}_k и главный момент \bar{M}_k этой системы сил относительно ПТ(k).

Связью для тела m_{ok} в КП(k) является БТ(k), которое ограничивает свободу относительного перемещения тела m_{ok} , т. е. перемещения смежного тела КП(k) относительно БТ(k). Эту связь можно мысленно разорвать. Для описания разрываемой связи используют принцип освобождения от связи, где мысленно разрываемую связь заменяют соответствующей силой и моментом силы относительно выбранной точки. Здесь мысленно разрываемая связь тел КП(k) заменяется силой \bar{F}_k и моментом силы \bar{M}_k относительно ПТ(k).

Из \bar{F}_k и \bar{M}_k можно выделить реакции связей (реактивные составляющие), а также активные составляющие, т. е. силы и/или моменты сил, развиваемые приводами в КП(k). Реактивные составляющие удерживают тело m_{ok} от относительных движений, не допускаемых связями в КП(k). В статике активные составляющие обеспечивают равновесие тела m_{ok} в направлениях, допускаемых связями КП(k). Выделим из \bar{F}_k, \bar{M}_k реактивные и активные составляющие в КП(k) МС, т. е. в поступательных КП (ПКП) и вращательных КП (ВКП).

В ПКП(k) тело m_{ok} может двигаться поступательно относительно БТ(k) вдоль оси $O_k \bar{p}_k$, жестко связанной с БТ(k), где \bar{p}_k – орт оси ПКП(k), указывающий положительное направление возможного относительного поступательного движения, допускаемого связью. Реактивной в ПКП(k) является сила \bar{F}_{rk} , перпендикулярная оси $O_k \bar{p}_k$, и момент силы \bar{M}_k , неизвестный по модулю и направлению. Для \bar{F}_{rk} неизвестны модуль и направление в плоскости, перпендикулярной оси $O_k \bar{p}_k$. К активной в ПКП(k) относится сила $F_k = \bar{p}_k \cdot \bar{F}_k$, включающая силу трения. Проекция вектора \bar{F}_k на плоскость, перпендикулярную оси $O_k \bar{p}_k$, равна \bar{F}_{rk} , т. е. $\bar{F}_k = \bar{F}_{rk} + F_k \bar{p}_k$, где $\bar{p}_k \cdot \bar{F}_{rk} = 0$.

В ВКП(k) тело m_{ok} может вращаться относительно БТ(k) вокруг оси $O_k \bar{q}_k$, где \bar{q}_k – орт оси ВКП(k), неподвижный как в теле m_{ok} , так и в БТ(k). К реактивной в ВКП(k) относится сила \bar{F}_k , неизвестная по модулю и направлению, и момент \bar{M}_{rk} относительно ПТ(k) силы реакции, перпендикулярный оси $O_k \bar{q}_k$. Активным в ВКП(k) является момент силы $M_k = \bar{q}_k \cdot \bar{M}_k$ относительно оси $O_k \bar{q}_k$, т. е. $\bar{M}_k = \bar{M}_{rk} + M_k \bar{q}_k$, где $\bar{q}_k \cdot \bar{M}_{rk} = 0$. M_k содержит момент сил трения в ВКП(k).

Если мысленно разорвать связи тела m_{ok} с БТ(k) с телом m_{ok+1} , то на тело m_{ok} со стороны его смежного тела m_{ok+1} будут действовать сила $(-\bar{F}_{k+1})$ и момент силы $(-\bar{M}_{k+1})$ относительно ПТ($k+1$). Следовательно, с учётом силы тяжести $m_{ok} \bar{g}$, действующей на тело m_{ok} , получим следующее уравнение равновесия сил $m_{ok} \bar{g} + \bar{F}_k - \bar{F}_{k+1} = 0$. Отсюда получим

$$\bar{F}_k = -m_{ok} \bar{g} + \bar{F}_{k+1}. \quad (2)$$

Из обратной рекуррентной формулы $\bar{F}_i = -m_{oi} \bar{g} + \bar{F}_{i+1}$, где $i = N, N-1, \dots, k$ и $\bar{F}_{N+1} = 0$, после рекуррентных вложений получим

$$\bar{F}_k = -\sum_{i=k}^N m_{oi} \bar{g} = -\bar{g} \sum_{i=k}^N m_{oi} = -m_k \bar{g}, \quad (3)$$

где $m_k = \sum_{i=k}^N m_{oi} = m_{ok} + m_{k+1} - \dots - m_{oN}$ – масса и обозначение $-i$ подсистемы, т. е. части МС, состоящей из тел $m_{ok}, m_{ok+1}, \dots, m_{oN}$.

Формулы (2), (3) можно получить из уравнения равновесия подсистемы m_k в поле сил тяжести. Действительно, если мысленно разорвать связь тела m_{ok} с БТ(k), то получим сле-

дующее уравнение статического равновесия $\bar{F}_k + m_k \bar{g} = 0$, т. е. формулу (3). Отсюда имеем $\bar{F}_{k+1} = -m_{k+1} \bar{g} = -(m_k - m_{ok}) \bar{g} = -\bar{F}_k + m_{ok} \bar{g}$, т. е. получаем формулу (2).

Учитывая, что $\bar{g} = -g\bar{y}$, проекцию силы \bar{F}_k на ось $O_i \bar{\eta}_i$ ССК(i) можно вычислять по формуле $F_{ki}^\eta = \bar{F}_k \cdot \bar{\eta}_i = m_k g \bar{y} \cdot \bar{\eta}_i = m_{gk} \eta_{i0}^y$, где $m_{gk} = m_k g$. В случае $i = k$:

$$F_k^\eta = m_{gk} \eta_{k0}^y \quad (4)$$

– проекция силы \bar{F}_k на ось $O_k \bar{\eta}_k$ ССК(k), где $\eta_{k0}^y = \bar{y}_0 \cdot \bar{\eta}_k$, $\bar{y}_0 = \bar{y}$ – орт вертикали.

3. Выписывание НК

В отличие от вывода формул процесс их выписывания не требует выполнения математических операций. Выписывание сводится к подстановке конкретных значений входных параметров МС в общие формулы, что приводит к конкретизации этих формул. Найдем общие формулы связи НК осей ССК(j) в ССК(i) и в ССК($i - 1$), где $i \leq j$.

По обозначению (1) $\eta_{ji}^x, \eta_{ji}^y, \eta_{ji}^z$ – проекции орта $\bar{\eta}_j$ ССК(j) на оси ССК(i), где $i \leq j$. Следовательно, $\bar{\eta}_j = \eta_{ji}^x \bar{x}_i + \eta_{ji}^y \bar{y}_i + \eta_{ji}^z \bar{z}_i$. В ПКП(i) $\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1}$, $\bar{y}_i = \bar{y}_{i-1}$, $\bar{z}_i = \bar{z}_{i-1}$. Следовательно, по определению

$$\eta_{ji-1}^x = \bar{\eta}_j \cdot \bar{x}_{i-1} = \bar{\eta}_j \cdot \bar{x}_i = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{x}_i + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{x}_i + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{x}_i = \eta_{ji}^x.$$

Аналогично

$$\eta_{ji-1}^y = \bar{\eta}_j \cdot \bar{y}_{i-1} = \bar{\eta}_j \cdot \bar{y}_i = \eta_{ji}^y, \quad \eta_{ji-1}^z = \bar{\eta}_j \cdot \bar{z}_i = \eta_{ji}^z.$$

Для ВКП(i) рассмотрим три случая. В случае $\bar{q}_i = \bar{x}_i$ имеем $\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1}$ и $q_i = \angle(O_i \bar{y}_{i-1}, O_i \bar{y}_i) = \angle(O_i \bar{z}_{i-1}, O_i \bar{z}_i)$ – угол между осями $O_i \bar{y}_{i-1}$ и $O_i \bar{y}_i$ или равный ему угол между осями $O_i \bar{z}_{i-1}$ и $O_i \bar{z}_i$. Тогда по определению:

$$\eta_{ji-1}^x = \bar{\eta}_j \cdot \bar{x}_{i-1} = \bar{\eta}_j \cdot \bar{x}_i = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{x}_i + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{x}_i + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{x}_i = \eta_{ji}^x,$$

$$\eta_{ji-1}^y = \bar{\eta}_j \cdot \bar{y}_{i-1} = \eta_{ji}^x \bar{x}_{i-1} \cdot \bar{y}_{i-1} + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{y}_{i-1} + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{y}_{i-1} = \\ = \eta_{ji}^y \cos(q_i) + \eta_{ji}^z \cos(90^\circ + q_i) = c_i \eta_{ji}^y - s_i \eta_{ji}^z,$$

$$\eta_{ji-1}^z = \bar{\eta}_j \cdot \bar{z}_{i-1} = \eta_{ji}^x \bar{x}_{i-1} \cdot \bar{z}_{i-1} + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{z}_{i-1} + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{z}_{i-1} = \\ = \eta_{ji}^y \cos(90^\circ - q_i) + \eta_{ji}^z \cos(q_i) = s_i \eta_{ji}^y + c_i \eta_{ji}^z,$$

где $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$.

В случае $\bar{q}_i = \bar{y}_i$ имеем $\bar{y}_i = \bar{y}_{i-1}$ и $q_i = \angle(O_i \bar{x}_{i-1}, O_i \bar{x}_i) = \angle(O_i \bar{z}_{i-1}, O_i \bar{z}_i)$ – угол между осями $O_i \bar{x}_{i-1}$ и $O_i \bar{x}_i$ или равный ему угол между осями $O_i \bar{z}_{i-1}$ и $O_i \bar{z}_i$. Тогда

$$\eta_{ji-1}^x = \bar{\eta}_j \cdot \bar{x}_{i-1} = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{x}_{i-1} + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{x}_{i-1} + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{x}_{i-1} = \\ = \eta_{ji}^x \cos(q_i) + \eta_{ji}^z \cos(90^\circ - q_i) = c_i \eta_{ji}^x + s_i \eta_{ji}^z,$$

$$\eta_{ji-1}^y = \bar{\eta}_j \cdot \bar{y}_{i-1} = \bar{\eta}_j \cdot \bar{y}_i = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{y}_i + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{y}_i = \eta_{ji}^y,$$

$$\eta_{ji-1}^z = \bar{\eta}_j \cdot \bar{z}_{i-1} = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{z}_{i-1} + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{z}_{i-1} + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{z}_{i-1} = \\ = \eta_{ji}^x \cos(90^\circ + q_i) + \eta_{ji}^z \cos(q_i) = -s_i \eta_{ji}^x + c_i \eta_{ji}^z.$$

В случае $\bar{q}_i = \bar{z}_i$ имеем $\bar{z}_i = \bar{z}_{i-1}$ и $q_i = \angle(O_i \bar{x}_{i-1}, O_i \bar{x}_i) = \angle(O_i \bar{y}_{i-1}, O_i \bar{y}_i)$ – угол между осями $O_i \bar{x}_{i-1}$ и $O_i \bar{x}_i$ или равный ему угол между осями $O_i \bar{y}_{i-1}$ и $O_i \bar{y}_i$. Тогда

$$\eta_{ji-1}^x = \bar{\eta}_j \cdot \bar{x}_{i-1} = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{x}_{i-1} + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{x}_{i-1} + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{x}_{i-1} = \\ = \eta_{ji}^x \cos(q_i) + \eta_{ji}^y \cos(90^\circ + q_i) = c_i \eta_{ji}^x - s_i \eta_{ji}^y,$$

$$\eta_{ji-1}^y = \bar{\eta}_j \cdot \bar{y}_{i-1} = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{y}_{i-1} + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{y}_{i-1} + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{y}_{i-1} = \\ = \eta_{ji}^x \cos(90^\circ - q_i) + \eta_{ji}^y \cos(q_i) = s_i \eta_{ji}^x + c_i \eta_{ji}^y,$$

$$\eta_{ji-1}^z = \bar{\eta}_j \cdot \bar{z}_{i-1} = \bar{\eta}_j \cdot \bar{z}_i = \eta_{ji}^x \bar{x}_i \cdot \bar{z}_i + \eta_{ji}^y \bar{y}_i \cdot \bar{z}_i + \eta_{ji}^z \bar{z}_i \cdot \bar{z}_i = \eta_{ji}^z.$$

Перед практическим использованием полученных общих формул рекомендуется записать выражения орт осей КП(i) через орты осей ССК(i). Для этого можно использовать следующие свойства МС. Для ПКП(i) $\bar{p}_i = \bar{\eta}_i$ и по умолчанию $\bar{q}_i = 0$. Для ВКП(i) $\bar{q}_i = \bar{\eta}_i$ и по умолчанию $\bar{p}_i = 0$. Здесь $\bar{\eta}_i$ для каждого i принимает одно значение из множества символов $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\}$ в зави-

симости от ориентации оси КП(i) в ССК(i). Например, если в ВКП(5) тело m_{05} вращается вокруг оси $O_5\bar{z}_5$, то $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$ и по умолчанию $\bar{p}_5 = 0$.

Таким образом, если использовать обозначение $\bar{\eta}_{ji} = (\eta_{ji}^x, \eta_{ji}^y, \eta_{ji}^z)$, то искомые формулы имеют следующий вид:

$$\bar{q}_i = 0 \Rightarrow \bar{\eta}_{ji-1} = (\eta_{ji-1}^x, \eta_{ji-1}^y, \eta_{ji-1}^z) = (\eta_{ji}^x, \eta_{ji}^y, \eta_{ji}^z) = \bar{\eta}_{ji}; \tag{5}$$

$$\bar{q}_i = \bar{x}_i \Rightarrow \bar{\eta}_{ji-1} = (\eta_{ji}^x, c_i\eta_{ji}^y - s_i\eta_{ji}^z, s_i\eta_{ji}^y + c_i\eta_{ji}^z); \tag{6}$$

$$\bar{q}_i = \bar{y}_i \Rightarrow \bar{\eta}_{ji-1} = (c_i\eta_{ji}^x + s_i\eta_{ji}^z, \eta_{ji}^y, -s_i\eta_{ji}^x + c_i\eta_{ji}^z); \tag{7}$$

$$\bar{q}_i = \bar{z}_i \Rightarrow \bar{\eta}_{ji-1} = (c_i\eta_{ji}^x - s_i\eta_{ji}^y, s_i\eta_{ji}^x + c_i\eta_{ji}^y, \eta_{ji}^z). \tag{8}$$

В приведенных формулах $i = j, j - 1, \dots, 1$; $\bar{\eta}_{jj} = (1,0,0)$ если $\eta = x$; $\bar{\eta}_{jj} = (0,1,0)$ если $\eta = y$; $\bar{\eta}_{jj} = (0,0,1)$ если $\eta = z$.

С целью демонстрации эффективности предлагаемых формализмов аналитического решения задач статики МС и выписывания формул вычисления НК осей ССК тел в ССК их несущих тел рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Портальная МС с декартовой СК на рис. 1, где

$$\bar{p}_1 = \bar{z}_1, \bar{p}_2 = \bar{x}_2, \bar{q}_3 = \bar{y}_3, \bar{p}_4 = -\bar{y}_4, \bar{q}_5 = \bar{z}_5, \bar{q}_6 = \bar{y}_6,$$

находится в состоянии равновесия в поле сил тяжести. Вывести формулы вычисления проекций F_6^x, F_6^y, F_6^z статических реакций в ВКП(6) на оси ССК(6).

По формуле (4) имеем $F_6^x = m_{g6}x_{60}^y, F_6^y = m_{g6}y_{60}^y, F_6^z = m_{g6}z_{60}^y$. Следовательно, для решения задачи необходимо выписать НК осей ССК(6) в НСК. Используем для этого формулы (5)–(8).

Для $j = i = 6$ имеем $\bar{q}_6 = \bar{y}_6$. Тогда по формуле (7), принимающей вид

$$\bar{\eta}_{65} = (c_6\eta_{66}^x + s_6\eta_{66}^z, \eta_{66}^y, -s_6\eta_{66}^x + c_6\eta_{66}^z),$$

где $\eta \in \{x, y, z\}$, с учетом равенств $\bar{x}_{66} = (1,0,0), \bar{y}_{66} = (0,1,0), \bar{z}_{66} = (0,0,1)$, получим:

$$\bar{x}_{65} = (c_6, 0, -s_6); \bar{y}_{65} = (0, 1, 0); \bar{z}_{65} = (s_6, 0, c_6).$$

Значения НК из множества $\{0, 1, c_j, s_j, -s_j\}$ будем называть простыми. Очевидно, что для $i = j$ по формулам (5)–(8) всегда получаются простые значения НК.

Для $i = 5$ имеем $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$ и по формуле (8), принимающей вид

$$\bar{\eta}_{64} = (c_5\eta_{65}^x - s_5\eta_{65}^y, s_5\eta_{65}^x + c_5\eta_{65}^y, \eta_{65}^z),$$

$$\bar{x}_{64} = (c_5c_6, s_5c_6, -s_6), \bar{y}_{64} = (-s_5, c_5, 0),$$

$$\bar{z}_{64} = (c_5s_6, s_5s_6, c_6).$$

В выписываемых формулах вместо текущего обозначения НК подставляется его предшествующее значение, если в формуле вычисления этого значения отсутствуют арифметические операции. Здесь (для $i = 5$) вместо текущих обозначений $x_{65}^x, x_{65}^z, z_{65}^x, z_{65}^z$ подставлены равные им значения $c_6, -s_6, s_6, c_6$, полученные для $i = 6$.

Для $i = 4$ имеем $\bar{q}_4 = 0$. Тогда по формуле (5) $\bar{\eta}_{63} = \bar{\eta}_{64}$, т. е.

$$\bar{x}_{63} = (x_{64}^x, x_{64}^y, -s_6), \bar{y}_{63} = (-s_5, c_5, 0), \bar{z}_{63} = (z_{64}^x, z_{64}^y, c_6).$$

Для $i = 3$ имеем $\bar{q}_3 = \bar{y}_3$ и $\bar{\eta}_{62} = (c_3\eta_{63}^x + s_3\eta_{63}^z, \eta_{63}^y, -s_3\eta_{63}^x + c_3\eta_{63}^z)$. Отсюда

$$\bar{x}_{62} = (c_3x_{63}^x + s_3x_{63}^z, x_{63}^y, -s_3x_{63}^x + c_3x_{63}^z) = (c_3x_{64}^x - s_3s_6, x_{64}^y, -s_3x_{64}^x - c_3s_6).$$

Здесь вместо текущих обозначений $x_{63}^x, x_{63}^y, x_{63}^z$ подставлены их переобозначения x_{64}^x, x_{64}^y и значение $-s_6$, полученные на предшествующем шаге. Аналогично:

$$\bar{y}_{62} = (c_3y_{63}^x + s_3y_{63}^z, y_{63}^y, -s_3y_{63}^x + c_3y_{63}^z) = (-c_3s_5, c_5, s_3s_5),$$

$$\bar{z}_{62} = (c_3z_{63}^x + s_3z_{63}^z, z_{63}^y, -s_3z_{63}^x + c_3z_{63}^z) = (c_3z_{64}^x + s_3c_6, z_{64}^y, -s_3z_{64}^x + c_3c_6).$$

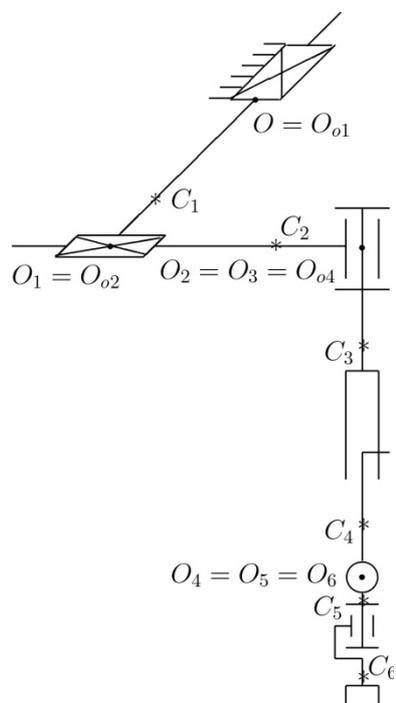


Рис. 1. МС с декартовой СК
Fig. 1. MS with cartesian CS

Так как $\bar{q}_2 = \bar{q}_1 = 0$, получим $\bar{\eta}_{60} = \bar{\eta}_{61} = \bar{\eta}_{62}$.

Таким образом, $F_6^x = m_{g6}x_{60}^y = m_{g6}x_{62}^y = m_{g6}x_{64}^y = m_{g6}s_5c_6$,

$F_6^y = m_{g6}y_{60}^y = m_{g6}y_{64}^y = m_{g6}c_5$, $F_6^z = m_{g6}z_{60}^y = m_{g6}z_{62}^y = m_{g6}z_{64}^y = m_{g6}s_5s_6$.

Выполним аналитическую верификацию выписанных формул.

Общий подход аналитической верификации заключается в доказательстве совпадения известного решения задачи с решением, которое получается из выписанных формул. Например, заметим, что из формулы (2) следует $|\bar{F}_k| = m_k g = m_{gk}$. Используя выписанные формулы, полу-

чим: $|\bar{F}_6| = \sqrt{F_6^{x2} + F_6^{y2} + F_6^{z2}} = \sqrt{m_{g6}^2(s_5^2c_6^2 + c_5^2 + s_5^2s_6^2)} = m_{g6}$. Результаты для $k = 6$ совпали.

Можно рассмотреть конкретные положения тел МС, в которых решение задачи очевидно, и доказать, что аналогичное решение следует из выписанных формул для рассматриваемого положения тел МС. Например, очевидно, что в исходном положении тел МС на рис. 1 $F_6^x = F_6^z = 0$, $F_6^y = m_{gk}$. Выписанные формулы в случае $q_5 = q_6 = 0$ дают такой же результат.

4. Повторное использование формул НК

Если кинематические схемы подсистем двух МС совпадают, то очевидно совпадают НК орт ССК несомых тел относительно орт ССК несущих тел этих подсистем.

Задача 2. МС с цилиндрической СК на рис. 2 имеет следующие выражения орт КП через орты ССК: $\bar{q}_1 = \bar{y}_1$, $\bar{p}_2 = \bar{x}_2$, $\bar{q}_3 = \bar{y}_3$, $\bar{p}_4 = -\bar{y}_4$, $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$, $\bar{q}_6 = \bar{y}_6$.

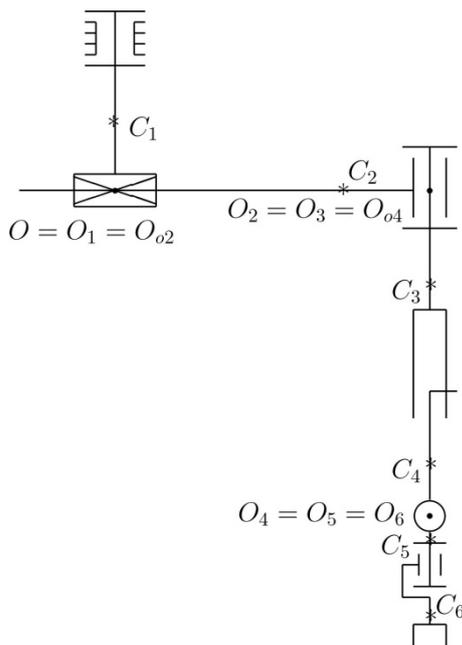


Рис. 2. МС с цилиндрической СК
Fig. 2. MS with cylindrical CS

Выписать проекции орта \bar{y}_6 на оси НСК.

Заметим, что кинематические схемы подсистем m_3 для МС на рис. 1–4 совпадают. Следовательно, для МС на рис. 1–4 формулы вычисления НК $\eta_{6i}^x, \eta_{6i}^y, \eta_{6i}^z$ для $i = 6, 5, 4, 3, 2$ совпадают. В частности, для МС на рис. 2 имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}_{62} &= (c_3x_{64}^x - s_3s_6, x_{64}^y, -s_3x_{64}^x - c_3s_6); \bar{y}_{62} = \\ &= (-c_3s_5, c_5, s_3s_5); \\ \bar{z}_{62} &= (c_3z_{64}^x + s_3c_6, z_{64}^y, -s_3z_{64}^x + c_3c_6), \end{aligned} \quad (9)$$

где $x_{64}^x = c_5c_6$, $x_{64}^y = s_5c_6$, $z_{64}^x = c_5s_6$, $z_{64}^y = s_5s_6$. Здесь повторно использованы выписанные в задаче 1 формулы вычисления НК осей ССК(6) в ССК(2).

Для $i = 2$ имеем $\bar{q}_2 = 0$. Тогда по формуле (5) $\bar{\eta}_{61} = \bar{\eta}_{62}$.

Для $i = 1$ имеем $\bar{q}_1 = \bar{y}_1$ и $\bar{\eta}_{60} = (c_1\eta_{61}^x + s_1\eta_{61}^z, \eta_{61}^y, -s_1\eta_{61}^x + c_1\eta_{61}^z)$, т. е.

$$\begin{aligned} y_{60}^x &= c_1y_{61}^x + s_1y_{61}^z = -c_1c_3s_5 + s_1s_3s_5 = \\ &= -(c_1c_3 - s_1s_3)s_5, y_{60}^y = y_{61}^y = c_5, \\ y_{60}^z &= -s_1y_{61}^x + c_1y_{61}^z = s_1c_3s_5 + c_1s_3s_5 = \\ &= (s_1c_3 + c_1s_3)s_5. \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы двух углов, получим:

$$c_{13} = \cos(q_1 + q_3) = c_1c_3 - s_1s_3, s_{13} = \sin(q_1 + q_3) = s_1c_3 + c_1s_3.$$

Следовательно, $y_{60}^x = -c_{13}s_5$, $y_{60}^y = c_5$, $y_{60}^z = s_{13}s_5$.

Задача 3. МС с ангулярной (в горизонтали) СК на рис. 3 имеет следующие выражения орт КП через орты ССК: $\bar{q}_1 = \bar{y}_1$, $\bar{q}_2 = \bar{y}_2$, $\bar{q}_3 = \bar{y}_3$, $\bar{p}_4 = -\bar{y}_4$, $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$, $\bar{q}_6 = \bar{y}_6$.

Выписать проекции орта \bar{y}_6 на оси НСК.

Повторно используя формулы (9) для МС на рис. 3 получим:

$$\bar{y}_{62} = (y_{62}^x, y_{62}^y, y_{62}^z) = (-c_3s_5, c_5, s_3s_5).$$

Для $i = 2$ имеем $\bar{q}_2 = \bar{y}_2$. Тогда по формуле (7) выпишем:

$$y_{61}^x = c_2y_{62}^x + s_2y_{62}^z = -c_2c_3s_5 + s_2s_3s_5 = -(c_2c_3 - s_2s_3)s_5 = -c_{23}s_5,$$

где $c_{23} = c_2c_3 - s_2s_3 = \cos(q_2 + q_3)$; $y_{61}^y = y_{62}^y = c_5$;
 $y_{61}^z = -s_2y_{62}^x + c_2y_{62}^z = s_2c_3s_5 + c_2s_3s_5 = (s_2c_3 + c_2s_3)s_5 = s_{23}s_5$,
 где $s_{23} = s_2c_3 + c_2s_3 = \sin(q_2 + q_3)$.
 Для $i = 1$ имеем $\bar{q}_1 = \bar{y}_1$. Тогда по формуле (7) выпишем:
 $y_{60}^x = c_1y_{61}^x + s_1y_{61}^z = -c_1c_{23}s_5 + s_1s_{23}s_5 = -(c_1c_{23} - s_1s_{23})s_5 = -c_{123}s_5$,
 где $c_{123} = c_1c_{23} - s_1s_{23} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$; $y_{60}^y = y_{61}^y = c_5$;
 $y_{60}^z = -s_1y_{61}^x + c_1y_{61}^z = s_1c_{23}s_5 + c_1s_{23}s_5 = (s_1c_{23} + c_1s_{23})s_5 = s_{123}s_5$,
 где $s_{123} = s_1c_{23} + c_1s_{23} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$. Таким образом,
 $y_{60}^x = -c_{123}s_5$, $y_{60}^y = c_5$, $y_{60}^z = s_{123}s_5$.

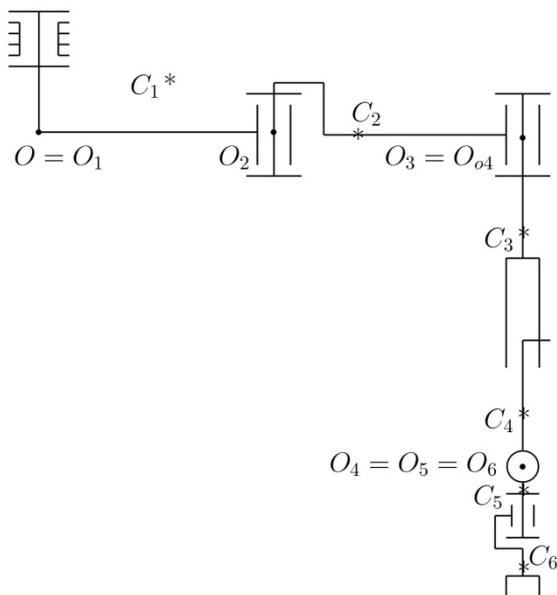


Рис. 3. МС с ангулярной СК (в горизонтали)
 Fig. 3. MS with angular CS (horizontal)

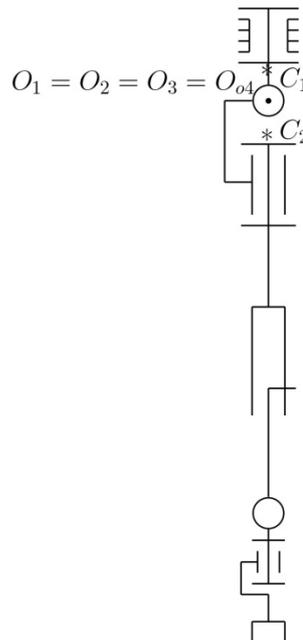


Рис. 4. МС со сферической СК
 Fig. 4. MS with spherical CS

Задача 4. Портальная МС со сферической СК на рис. 4 имеет следующие выражения орт КП через орты ССК: $\bar{q}_1 = \bar{y}_1$, $\bar{q}_2 = \bar{z}_2$, $\bar{q}_3 = \bar{y}_3$, $\bar{p}_4 = -\bar{y}_4$, $\bar{q}_5 = \bar{z}_3$, $\bar{q}_6 = \bar{y}_5$.

Выписать проекции орта \bar{y}_6 на оси НСК.

Повторно используя формулы (9) для МС на рис. 4 получим:

$$\bar{y}_{62} = (y_{62}^x, y_{62}^y, y_{62}^z) = (-c_3s_5, c_5, s_3s_5).$$

Для $i = 2$ имеем $\bar{q}_2 = \bar{z}_2$. Тогда по формуле (8) выпишем:

$$y_{61}^x = c_2y_{62}^x - s_2y_{62}^y = c_2y_{62}^x - s_2c_5,$$

$$y_{61}^y = s_2y_{62}^x + c_2y_{62}^y = s_2y_{62}^x + c_2c_5, y_{61}^z = y_{62}^z = c_5.$$

Для $i = 1$ имеем $\bar{q}_1 = \bar{y}$. Тогда по формуле (7) выпишем:

$$y_{60}^x = c_1y_{61}^x + s_1y_{61}^z = c_1y_{61}^x + s_1c_5, y_{60}^y = y_{61}^y, y_{60}^z = -s_1y_{61}^x + c_1y_{61}^z = -s_1y_{61}^x + c_1c_5.$$

5. Таблицы значений НК

Значения НК осей ССК соседних КП являются простыми, т. е. для ВКП(j) они принадлежат множеству $\{0, 1, c_j, s_j, -s_j\}$. Очевидно, что для ВКП(j) простые значения НК можно взять из табл. 1.

Использование табл. 1 при выписывании формул вычисления НК упрощает выполнение первого шага, на котором всегда получаются простые значения НК. Например, если тело m_{o6} вращается вокруг оси $O_6\bar{y}_6$, то НК осей ССК(6) находятся в блоке $\bar{q}_j = \bar{y}_j$, где $j = 6$, т. е. $x_{65}^x = c_6$, $y_{65}^x = 0$, $z_{65}^x = s_6$ и т. д.

Простые направляющие косинусы

Таблица 1

Table 1

The simple direction cosines

	$\bar{q}_j = \bar{x}_j$			$\bar{q}_j = \bar{y}_j$			$\bar{q}_j = \bar{z}_j$		
	x_j	y_j	z_j	x_j	y_j	z_j	x_j	y_j	z_j
x_{j-1}	1	0	0	c_j	0	s_j	c_j	$-s_j$	0
y_{j-1}	0	c_j	$-s_j$	0	1	0	s_j	c_j	0
z_{j-1}	0	s_j	c_j	$-s_j$	0	c_j	0	0	1

При выписывании НК на втором шаге можно использовать табл. 2, в ячейках которой представлены простые значения НК или простые формулы их вычисления. Простые формулы следуют из общих формул (6)–(8) для $i = j - 1$.

Таблица 2

Направляющие косинусы для двух поворотов

Table 2

The direction cosines for two turns

	$\bar{q}_j = \bar{x}_j$			$\bar{q}_j = \bar{y}_j$			$\bar{q}_j = \bar{z}_j$		
	x_j	y_j	z_j	x_j	y_j	z_j	x_j	y_j	z_j
x_{j-2}	1	0	0	c_j	0	s_j	c_j	$-s_j$	0
y_{j-2}	0	$c_{j-1,j}$	$-s_{j-1,j}$	$s_{j-1}s_j$	c_{j-1}	$-s_{j-1}c_j$	$c_{j-1}s_j$	$c_{j-1}c_j$	$-s_{j-1}$
z_{j-2}	0	$s_{j-1,j}$	$c_{j-1,j}$	$-c_{j-1}s_j$	s_{j-1}	$c_{j-1}c_j$	$s_{j-1}s_j$	$s_{j-1}c_j$	c_{j-1}
x_{j-2}	c_{j-1}	$s_{j-1}s_j$	$s_{j-1}c_j$	$c_{j-1,j}$	0	$s_{j-1,j}$	$c_{j-1}c_j$	$-c_{j-1}s_j$	s_{j-1}
y_{j-2}	0	c_j	$-s_j$	0	1	0	s_j	c_j	0
z_{j-2}	$-s_{j-1}$	$c_{j-1}s_j$	$c_{j-1}c_j$	$-s_{j-1,j}$	0	$c_{j-1,j}$	$-s_{j-1,j}c_j$	$s_{j-1}s_j$	c_{j-1}
x_{j-2}	c_{j-1}	$-s_{j-1}c_j$	$s_{j-1}s_j$	$c_{j-1}c_j$	$-s_{j-1}$	$c_{j-1}s_j$	$c_{j-1,j}$	$-s_{j-1,j}$	0
y_{j-2}	s_{j-1}	$c_{j-1}c_j$	$-c_{j-1}s_j$	$s_{j-1}c_j$	c_{j-1}	$s_{j-1}s_j$	$s_{j-1,j}$	$c_{j-1,j}$	0
z_{j-2}	0	s_j	c_j	$-s_j$	0	c_j	0	0	1

Табл. 2 состоит из девяти блоков (трех колонок с названиями $\bar{q}_j = \bar{x}_j$, $\bar{q}_j = \bar{y}_j$, $\bar{q}_j = \bar{z}_j$ и трех полос). В каждом блоке по девять ячеек, содержащих НК. Блоки отделены друг от друга двойными линиями. Для выбора нужного значения необходимо выбрать блок и в нем ячейку. Например, если тело m_{oj} вращается вокруг оси $O_j\bar{y}_j$, то нужный блок находится среди трех блоков в колонке с заголовком $\bar{q}_j = \bar{y}_j$ таблицы (по вертикали). Если при этом тело m_{oj-1} вращается вокруг оси $O_{j-1}\bar{z}_{j-1}$, то искомым является последний блок этой колонки (блок в третьей полосе). Выбор ячейки в найденном блоке определяется по обозначению НК. Например, значение НК x_{jj-2}^z расположено на пересечении столбца x_j и строки z_{j-2} найденного блока.

В табл. 2 приняты обозначения: $s_{jj-1} = \sin(q_j + q_{j-1})$, $c_{jj-1} = \cos(q_j + q_{j-1})$.

Задача 5. Ангулярная (в вертикали) МС на рис. 5 имеет следующие выражения орт КП через орты ССК: $\bar{q}_1 = \bar{y}_1$, $\bar{q}_2 = \bar{z}_2$, $\bar{q}_3 = \bar{z}_3$, $\bar{q}_4 = \bar{y}_4$, $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$, $\bar{q}_6 = \bar{y}_6$.

Выписать формулы вычисления НК $y_{51}^x, y_{51}^y, y_{51}^z$.
Для $j = 5$ имеем $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$. Следовательно, по табл. 1 получим:
 $y_{54}^x = -s_5, y_{54}^y = c_5, y_{54}^z = 0$.

Для $i = 4$ имеем $\bar{q}_4 = \bar{y}_4$. Следовательно, нужный блок расположен в последней колонке ($\bar{q}_j = \bar{z}_j$) и средней полосе табл. 2. Искомые НК находятся в столбце \bar{y}_j , т. е.

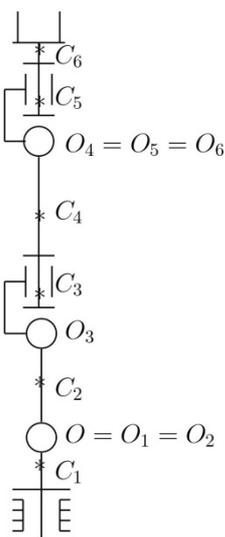


Рис. 5. Ангулярная СК
Fig. 5. Angular CS

$$y_{53}^x = -c_4 s_5, y_{53}^y = c_5, y_{53}^z = s_4 s_5.$$

Для $i = 3$ имеем $\bar{q}_3 = \bar{z}_3$. Тогда по формуле (8) выпишем:

$$y_{52}^x = c_3 y_{53}^x - s_3 y_{53}^y = c_3 y_{53}^x - s_3 c_5, y_{52}^y = s_3 y_{53}^x + c_3 y_{53}^y = s_3 y_{53}^x + c_3 c_5, y_{52}^z = y_{53}^z.$$

Для $i = 2$ имеем $\bar{q}_2 = \bar{z}_2$. Тогда по формуле (8) выпишем:

$$y_{51}^x = c_2 y_{52}^x - s_2 y_{52}^y = c_2 (c_3 y_{53}^x - s_3 c_5) - s_2 (s_3 y_{53}^x + c_3 c_5) =$$

$$= (c_2 c_3 - s_2 s_3) y_{53}^x - (c_2 s_3 + s_2 c_3) c_5 = c_{23} y_{53}^x - s_{23} c_5,$$

$$y_{51}^y = s_2 y_{52}^x + c_2 y_{52}^y = s_2 (c_3 y_{53}^x - s_3 c_5) + c_2 (s_3 y_{53}^x + c_3 c_5) =$$

$$= (s_2 c_3 + c_2 s_3) y_{53}^x + (c_2 c_3 - s_2 s_3) c_5 = s_{23} y_{53}^x + c_{23} c_5, y_{51}^z = y_{52}^z,$$

где $c_{23} = c_2 c_3 - s_2 s_3 = \cos(q_2 + q_3)$; $s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3 = \sin(q_2 + q_3)$.

$$\text{Таким образом, } \bar{y}_{51} = (c_{23} y_{53}^x - s_{23} c_5, c_{23} c_5 - s_{23} y_{53}^x, y_{53}^z).$$

6. Автоматическое выписывание НК

Выписанные НК для различных универсальных МС являются или простыми, как в табл. 1, или вычисляются по простым формулам, как в табл. 2, или представляются суммой произведений двух величин, как в формулах (6)–(8). То есть НК являются регулярными выражениями, содержащими минимальное число арифметических операций. Для автоматического выписывания таких математических выражений можно использовать методику, описанную в статьях [17–19].

Заключение

Предложенный формализм ручного и автоматического выписывания формул вычисления НК осей ССК тел МС используется не только для решения задач статики МС, но в основном в процессах выписывания уравнений динамики МС и решения второй задачи динамики методом построения степенных рядов времени. Следует также отметить, что через НК выражаются известные параметры описания ориентации тела в пространстве, например, углы Эйлера и Брайнта, параметры Родрига – Гамильтона и Кейли – Клейна, кватернионы и бикватернионы [20]. Поэтому запись математических моделей МС в НК позволяет перейти к записи этих моделей в перечисленных параметрах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-41-740019).

Литература

1. Anderson, C. *Makers: The New Industrial Revolution* / C. Anderson. – Publisher: Crown Business, 2016. – 257 p.
2. Jordan, J.M. *Robots*. / J.M. Jordan. – Publisher: The MIT Press, 2016. – 274 p.
3. Miller, R. *Robots and Robotics: Principles, Systems, and Industrial Applications* / Rex Miller, Mark R. Miller. – Publisher: McGraw-Hill Education, 2017 – 400 p.
4. Boschetti, G. *Novel Kinematic Directional Index for Industrial Serial Manipulators*. / Giovanni Boschetti // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10 (17), 5953. DOI: 10/3390/app10175953
5. Alwan, H.M. *Singularity Analysis of Parallel Robot with Six Degrees-Of-Freedom of Six Legs* / H.M. Alwan, H.S. Ahmed // *Eng & Tech. Journal*. – 2014. – Vol. 32, part (A), no. 4. – P. 960–972.
6. Alwan, H.M. *Path Tracking Simulation of a Wheeled Mobile Robot with Three Mecanum Wheels* / H.M. Alwan // *International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E.)*. – 2020. – Vol. 14, no. 8. – P. 516–522.
7. Alwan, H.M. *Solution of Inverse and Forward Kinematics Problems for Mobile Robot with Six Mecanum Wheels* / H.M. Alwan, A.N. Volkov, A. Shbani // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – P. 1–11. DOI: 10.1088/1757-899X/1094/1/012071
8. Trung, T.T. *A Techniques to Downgrade Objective Function in Parallel Robot Kinematics Problem* / T.T. Trung, L.W. Guang, P.T. Long // *International Journal of Robotics and Automation (IJRA)*. – 2015. – Vol. 4, no. 3. –P. 186–195.
9. Seibel, A. *On the Direct Kinematics Problem of Parallel Mechanism* / A. Seibel, S. Schulz, J. Schlattmann // *Hindawi Journal of Robotics*. – 2018. – Article ID 2412608. – 9 p.
10. Faugère, J.-C. *On solving the direct kinematics problem for parallel robots* / J.-C. Faugère, J.-P. Merlet, F. Rouillier // *Research Report RR-5923*. – 2006. – 21 p.

11. Momani, S. *Solution of Inverse Kinematics Problem using Genetic Algorithms* / S. Momani, Z.S. Abo-Hammour, O. Ahmadi // *Applied Mathematics & Information Sciences*. – 2016. – Vol. 10 (1). – P. 1–9.
12. Zhuang, H.-C. *Analysis Method of Articulated Torque of Heavy-Duty Six-Legged Robot under Its Quadrangular Gait* / H.-C. Zhuang, H.-B. Gao, Z.-Q. Deng // *Applied Sciences*. – 2016. – Vol. 6 (11), 323. DOI: 10.3390/app6110323
13. Smeresky, B. *Kinematics: On Direction Cosine Matrices* / B. Smeresky, A. Rizzo // *IntechOpen*. – 2019. – 15 p.
14. Журавлев, В.Ю. *Основы теоретической механики* / В.Ю. Журавлев. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
15. Челноков, Ю.Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения* / Ю.Н. Челноков. – М.: Физматлит, 2006. – 512 с.
16. Лурье, А.И. *Аналитическая механика* / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
17. Телегин, А.И. *Метод автоматического выписывания выражений математической модели системы из общего вида математической модели класса систем* / А.И. Телегин, М.И. Кайгородцев, Д.И. Читалов // *Сборник научных трудов «Ракетодинамика. Энергетика. Информатика»*. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – С. 162–184.
18. Кайгородцев, М.И. *XML-ориентированная программа выписывания математического выражения* / М.И. Кайгородцев // *Сборник научных трудов «Ракетодинамика. Энергетика. Информатика»*. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – С. 191–199.
19. Телегин, А.И. *Программно-методический комплекс для автоматического выписывания математических моделей плоских шарнирных механизмов* / А.И. Телегин, М.И. Кайгородцев // *Сборник научных трудов «Ракетодинамика. Энергетика. Информатика»*. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – С. 200–219.
20. Голубев, Ю.Ф. *Основы теоретической механики* / Ю.Ф. Голубев. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 720 с.

Пудовкина Светлана Геннадьевна, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и ракетодинамики, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, г. Миасс; pudovkinasg@susu.ru.

Телегин Александр Иванович, д-р. физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры автоматки, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, г. Миасс; teleginai@susu.ru.

Поступила в редакцию 28 апреля 2021 г.

DOI: 10.14529/ctcr210305

WRITING OUT OF FORMULAS FOR CALCULATING FORCES IN THE JOINTS OF MANIPULATORS IN STATICS

S.G. Pudovkina, pudovkinasg@susu.ru,

A.I. Telegin, teleginai@susu.ru

South Ural State University, Miass, Russian Federation

The problem of bulkiness of mathematical models of manipulative systems of industrial robots is solved. Here we consider formulas for calculating static reactions in joints and formulas for active forces that balance the forces of gravity acting on the manipulator's bodies in its stationary state. The manipulator can be in such a state when it is before capturing the object of manipulation and releasing it, or when it is performing some assembly operations, or it is during spot welding and

in slow (quasi-static) arc-welding and painting processes. Aim. The aim is to derive general recurrence and finite formulas for calculating the reaction forces in joints and their projections to the axes of the coordinate system rigidly connected with the selected body. Express the formulas of force projections in terms of guiding cosines and justify their optimality in terms of the minimum of arithmetic operations. Derive general inverse recurrence formulas for writing out the guide cosines of the axes associated with the moving bodies of the coordinate system with respect to the stationary coordinate system. **Research methods.** The methods of research relate to vector mechanics and systems analysis, and the algorithmization of calculations by reducing them to the use of recurrent formulas. **Results.** A systematic analysis of general formulas, in which all possible regular expressions are highlighted which are corresponding unambiguously to the kinematic parameters of manipulators, is performed. These regular expressions are used in software for analytical modeling of manipulator, in particular, for the analytical solution of problems of statics of a manipulator. The method of analytical verification of the prescribed formulas is described. The tasks of writing out optimal formulas for calculating the projections of static reaction forces in joints have been solved. And the tasks of writing out optimal formulas for calculating active forces in progressive joints of universal manipulators with six degrees of freedom, operating in Cartesian, cylindrical, spherical and angular coordinate systems, have been solved also. Analytical verification of the derived equations of statics is performed. Examples of the reuse of the derived formulas for manipulators with the same kinematic schemes of their subsystems. **Conclusion.** Expressions of the equations of statics of manipulators through the guide cosines of the axes of the associated coordinate systems of their bodies allow us to write these equations through the known parameters of body orientation. The recurrent formulas for calculating directional cosines allows to use recursive functions in their software implementation, i.e. to increase the computational efficiency of the software.

Keywords: driving forces, forces of reaction, static problems, direction cosines, verification of formulas, regular expressions, optimization of calculations.

References

1. Anderson C. *Makers: The New Industrial Revolution*. Publisher: Crown Business, 2012. 257 p.
2. John M. Jordan. *Robots*. Publisher: The MIT Press, 2016. 274 p.
3. Rex Miller, Mark R. Miller. *Robots and Robotics: Principles, Systems, and Industrial Applications*. Publisher: McGraw-Hill Education, 2017. 400 p.
4. Giovanni Boschetti. Novel Kinematic Directional Index for Industrial Serial Manipulators. *Applied Sciences*, 2020, vol. 10 (17), 5953. DOI: 10/3390/app10175953
5. Hassan M. Alwan, Hyder Sabah Ahmed. Singularity Analysis of Parallel Robot with Six Degrees-Of-Freedom of Six Legs. *Eng. & Tech. Journal*, 2014, vol.32, part (A), no. 4, pp. 960–972.
6. Hassan M. Alwan. Path Tracking Simulation of a Wheeled Mobile Robot with Three Mecanum Wheels. *International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E.)*, 2020, vol. 14, no. 8, pp. 516–522.
7. Hassan M. Alwan, A.N. Volkov, A. Shbani. Solution of Inverse and Forward Kinematics Problems for Mobile Robot with Six Mecanum Wheels. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, pp. 1–11. DOI: 10.1088/1757-899X/1094/1/012071
8. Trang Thanh Trung, Li Wei Guang, Pham Thanh Long. A Techniques to Downgrade Objective Function in Parallel Robot Kinematics Problem. *International Journal of Robotics and Automation (IJRA)*, 2015, vol. 4, no. 3, pp. 186–195.
9. Arthur Seibel, Stefan Schulz, Josef Schlattmann. On the Direct Kinematics Problem of Parallel Mechanism. *Hindawi Journal of Robotics*, 2018, Article ID 2412608, 9 p.
10. Jean-Charles Faugère, Jean-Pierre Merlet, Fabrice Rouillier. On solving the direct kinematics problem for parallel robots. *Research Report RR-5923*, 2006, 21 p.
11. Shaher Momani, Zaer S. Abo-Hammour, Othman MK. Alsmadi. Solution of Inverse Kinematics Problem using Genetic Algorithms. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2016, vol. 10 (1), pp. 1–9.
12. Hong-Chao Zhuang, Hai-Bo Gao, Zong-Quan Deng. Analysis Method of Articulated Torque of Heavy-Duty Six-Legged Robot under Its Quadrangular Gait. *Applied Sciences*, 2016, vol. 6 (11), 323. DOI: 10.3390/app6110323
13. Brendon Smeresky, Alex Rizzo. Kinematics: On Direction Cosine Matrices. *IntechOpen*, 2019, 15 p.

14. Zhuravlev V.U. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Foundations of theoretical mechanics]. 2nd ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 320 p.
15. Chelnokov Y.N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya* [Quaternion and biquaternion models and methods of rigid body mechanics and their applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 512 p.
16. Lurie A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 824 p.
17. Telegin A.I., Kaigorodtsev M.I., Chitalov D.I. [The method of automatic writing out expressions of the mathematical model of a system from the general view of the mathematical model of a class of systems]. *Sbornik nauchnykh trudov "Raketodinamika. Energetika. Informatika"* [Collection of scientific papers "Rocket dynamics. Power engineering. Informatics"]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2012, pp. 162–184. (in Russ)
18. Kaigorodtsev M.I. [XML-oriented program for writing out a mathematical expression]. *Sbornik nauchnykh trudov "Raketodinamika. Energetika. Informatika"* [Collection of scientific papers "Rocket dynamics. Power engineering. Informatics"]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2012, pp. 191–199. (in Russ)
19. Telegin A.I., Kaigorodtsev M.I. [A software-methodical complex for automatic writing out of mathematical models of flat hinged mechanisms]. *Sbornik nauchnykh trudov "Raketodinamika. Energetika. Informatika"* [Collection of scientific papers "Rocket dynamics. Power engineering. Informatics"]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2012, pp. 200–219. (in Russ)
20. Golubev U.F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Foundations of theoretical mechanics]. Publishing house of Moscow State University, 2000. 720 p.

Received 28 April 2021

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Пудовкина, С.Г. Выписывание формул вычисления сил в сочленениях манипуляторов в статике / С.Г. Пудовкина, А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2021. – Т. 21, № 3. – С. 47–58. DOI: 10.14529/ctcr210305

FOR CITATION

Pudovkina S.G., Telegin A.I. Writing out of Formulas for Calculating Forces in the Joints of Manipulators in Statics. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 47–58. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr210305
