

## ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ТЕПЛООВОГО КОНТРОЛЯ ДЕФЕКТОВ МНОГОСЛОЙНЫХ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Лилия Юрьевна Костылева<sup>1</sup>, Олег Витальевич Логиновский<sup>2</sup>,  
Евгения Анатольевна Рец<sup>3</sup>, Игорь Михайлович Ячиков<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

<sup>1</sup> kostylevali@susu.ru

<sup>2</sup> loginovskii@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3582-2795>

<sup>3</sup> retcea@susu.ru

<sup>4</sup> iachikovim@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1562-7506>

**Аннотация.** Выявление дефектов расслоения в изделиях из многослойных биметаллических материалов является актуальной задачей. Для ее решения широко применяют различные методы неразрушающего контроля, в том числе метод активного теплового контроля. Его суть заключается в дистанционной регистрации, визуализации и анализе тепловых (температурных) полей объектов, которые зависят от теплофизических, геометрических характеристик, параметров тепловой нагрузки и особенностей внутренней структуры объекта. Дефекты внутренней структуры вызывают появление аномальных температурных зон на поверхности объекта, анализ которых позволяет судить о наличии изменений в материале в целом или на отдельных участках. Понять, есть ли дефект под аномальным участком и каковы его параметры, можно при наличии адекватной математической модели, описывающей зависимость результатов контроля от свойств объекта и выбранных технологических режимов. Такая модель является неотъемлемой составляющей существующих систем теплового контроля. Для одного и того же объекта или процесса может быть составлено некоторое множество математических моделей, отличающихся числом учитываемых факторов, принятых допущений, полнотой и точностью описания состояния объекта или условий протекания процесса. Набор факторов определяется целью проводимого исследования, при этом для однозначного определения модели теплового состояния необходимо описать геометрические характеристики, теплофизические свойства материала, условия теплообмена и характеристики источников тепла. **Цель исследования:** анализ существующих математических моделей для исследуемого объекта – многослойной биметаллической пластины с дефектами в виде плоских воздушных промежутков между наружными и внутренними слоями, выявление общих подходов к моделированию процессов теплового контроля многослойных объектов. **Материалы и методы.** Определена структура математической модели теплового состояния объекта. Выполнен аналитический обзор существующих математических моделей теплового контроля многослойных объектов. **Результаты.** Сформулированы требования, допущения и ограничения для математической модели теплового контроля многослойной биметаллической пластины с дефектами расслоения. **Заключение.** На основе рассмотренных подходов к математическому моделированию теплового состояния многослойных объектов с идеальным контактом слоев и дефектами расслоения определены необходимые факторы для разработки модели процессов активного теплового контроля исследуемых объектов.

**Ключевые слова:** биметаллы, активный тепловой неразрушающий контроль, математическая модель, дефект соединения между слоями металлов, дефектометрия, дефектоскопия

**Для цитирования:** Возможности использования математических моделей для теплового контроля дефектов многослойных биметаллических пластин / Л.Ю. Костылева, О.В. Логиновский, Е.А. Рец, И.М. Ячиков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22, № 1. С. 53–64. doi: 10.14529/ctcr220104.

## POSSIBILITIES OF USING MATHEMATICAL MODELS FOR THERMAL NONDESTRUCTIVE TESTING OF DEFECTS IN MULTILAYER BIMETALLIC PLATES

Liliya Yu. Kostyleva<sup>1</sup>, Oleg V. Loginovskiy<sup>2</sup>, Evgeniya A. Retc<sup>3</sup>, Igor M. Yachikov<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

<sup>1</sup> kostylevali@susu.ru

<sup>2</sup> loginovskiiiov@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3582-2795>

<sup>3</sup> retcea@susu.ru

<sup>4</sup> iachikovim@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1562-7506>

**Abstract.** There is an actual task of delamination detection in multilayer bimetallic materials. Various methods of nondestructive testing (NDT) are used to solve it, including the method of transient thermal NDT. This method consists in remote registration, visualization and analysis of thermal (temperature) fields, which depend on thermophysical and geometric characteristics, thermal effect capacity and internal structure features of the object. The internal structure defects cause the appearance of abnormal temperature zones on the object surface. Their analysis allows us to judge the presence of changes in the material as a whole or in individual areas. It is possible to understand whether there is a defect under the anomalous site, and what its parameters are, if there is an adequate mathematical model that theoretically describes the dependence of the measuring results on the properties of the object and the selected technological modes. This model is a significant component of thermal NDT systems. For the same object or process, a certain set of mathematical models can be compiled, differing in the number of factors taken into account, the assumptions made, the completeness and accuracy of the description of the state of the object or the conditions of the process. The set of factors is determined by the purpose of the study, and in order to unambiguously determine the model of the thermal state, it is necessary to describe the characteristics of the object (geometric shape and thermophysical characteristics of the material) and the heat exchange process (characteristics of heat sources, initial and boundary conditions). **Aim.** To analyze the existing mathematical models for the research object – a multilayer bimetallic plate with delaminations between the outer and inner layers, and to identify common approaches to modeling the processes of thermal NDT of multilayer objects. **Materials and methods.** The structure of the mathematical model of the thermal state of the object is determined. An analytical review of mathematical models of thermal NDT of multilayer objects is performed. **Results.** The requirements, assumptions and limitations for a mathematical model of thermal NDT of a multilayer bimetallic plate with delamination defects are formulated. **Conclusion.** On the basis of the considered approaches to the mathematical modeling of the thermal state of multilayer objects with ideal layers contact and delamination defects, the necessary factors for the development of a model for the transient thermal NDT processes of the studied objects are determined.

**Keywords:** bimetal, transient thermal non-destructive testing, mathematical model, defect in the connection between metal layers, defectometry, flaw detection

**For citation:** Kostyleva L.Yu., Loginovskiy O.V., Retc E.A., Yachikov I.M. Possibilities of using mathematical models for thermal nondestructive testing of defects in multilayer bimetallic plates. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics.* 2022;22(1):53–64. (In Russ.) doi: 10.14529/ctcr220104.

### Введение

Для многослойных биметаллических материалов актуальной задачей является выявление дефектов расслоения. С этой целью широко применяют различные методы неразрушающего контроля, наименее затратным из которых можно считать сравнительно простой и доступный метод активного теплового контроля. Его суть заключается в дистанционной регистрации, визуализации и анализе тепловых (температурных) полей объектов. Температура поверхности объекта неоднородна под влиянием теплофизических, геометрических характеристик, параметров тепловой нагрузки и особенностей внутренней структуры объекта. Дефекты внутренней структуры вызывают появление аномальных температурных зон на поверхности объекта, анализ которых позволяет судить о наличии неоднородностей в материале в целом или на отдельных участках.

В.П. Вавилов и В.В. Ширяев [1] показали, что экстремумы производных от температуры по любой из поверхностных координат  $dT/dx$  в точности соответствуют проекциям границ внутренних дефектов на контролируруемую поверхность. На рис. 1 показан пример расчетного профиля, полученного для дефекта радиусом  $r_d = 1$  мм на глубине 0,5 мм и высоте дефекта 0,2 мм, в изделии из алюминия при импульсном воздействии теплового потока  $1 \text{ МВт/м}^2$ . Причем для алюминия точные оценки размеров дефекта имеют место при малых временах ( $\tau_1$ ) наблюдения (менее 0,01 с), в то время как при больших временах ( $\tau_2$ ) происходит существенное расплывание температурного отпечатка.

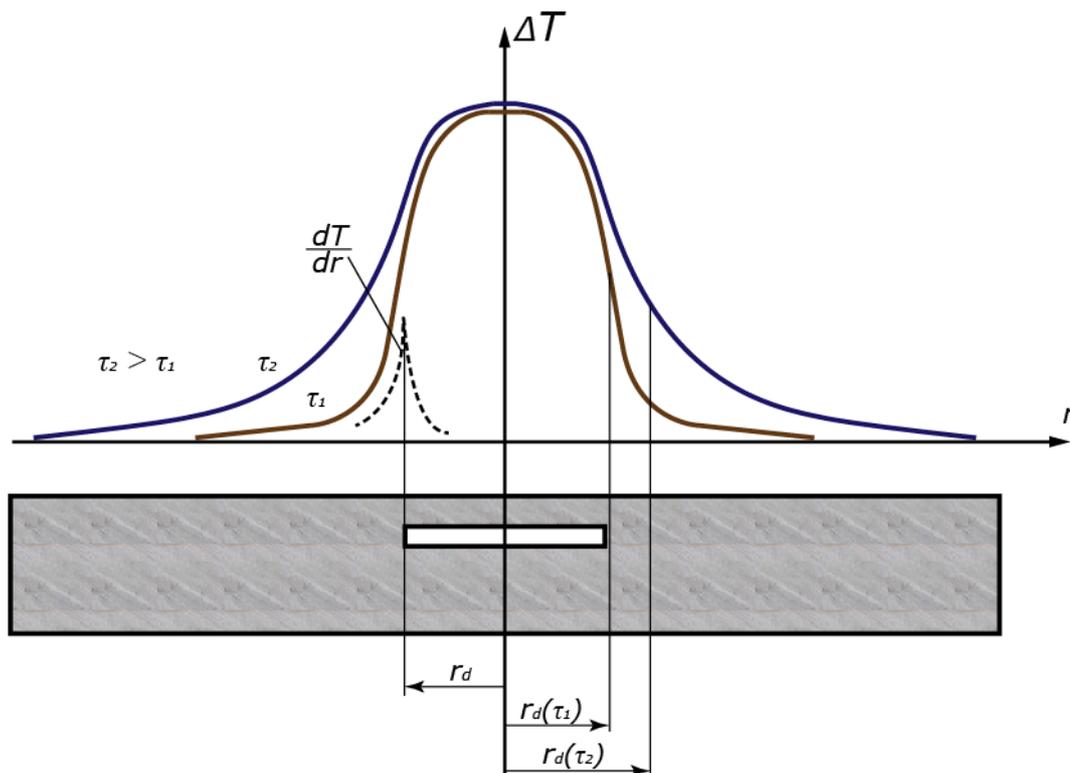


Рис. 1. Нормализованные профили температуры над воздушным дефектом в алюминиевой пластине  
Fig.1. Normalized temperature profiles over an air defect in an aluminum plate

Тепловой контроль (ТК) позволяет выявить различные виды дефектов: трещины, расслоения в местах сварки или склейки, поры, пустоты и раковины, нарушения изоляции, наличие посторонних включений и примесей.

Опыт исследований и практического применения ТК показывает его пригодность для контроля изделий из металлов, пластмасс и полимеров, биметаллов и композитных материалов с различными формами и качеством поверхности. Можно проводить контроль объектов без вывода их из эксплуатации или производственного процесса, используя при этом собственное тепловое излучение объекта или внешний источник тепловой стимуляции [1].

При анализе записи температурного поля (например, в виде термограммы) можно выявить участки объекта, различающиеся по температуре. Однако понять, есть ли дефект под аномальным участком и каковы его параметры, можно лишь при наличии адекватной математической модели, теоретически описывающей зависимость результатов контроля от свойств объекта и выбранных технологических режимов. В ходе построения модели расчетные результаты сравниваются с результатами натуральных экспериментов, полученных при разрушении образцов. В результате обработки накопленной информации о тепловых полях постепенно формируются зависимости, позволяющие по результатам обработки термограмм не только найти дефект, но и определить его тип, геометрические параметры, например глубину залегания и пр. Таким образом, математическая модель объекта теплового контроля является неотъемлемой составляющей систем ТК.

Для одного и того же объекта или процесса может быть составлено некоторое множество математических моделей, отличающихся числом учитываемых факторов, принятых допущений, полнотой и точностью описания состояния объекта или условий протекания процесса. Одно из главных требований к модели состоит в необходимости учета всех основных факторов и взаимосвязей, существенно влияющих на рассматриваемый процесс, и исключения второстепенных факторов и связей. Набор факторов определяется достижением цели проводимого исследования, при этом всегда стремятся к упрощению модели для удобства работы с ней и снижения затрат вычислительного времени при ее практическом применении. При этом простые модели должны быть адекватными поставленной цели и должны быть теоретически обоснованы.

На практике используются стационарные и нестационарные (динамические), линейные и нелинейные, одномерные и многомерные модели. Математические модели теплообмена в сложных технических системах строятся с использованием комбинации моделей теплообмена в отдельных элементах системы. Разбиение системы на элементы (с точки зрения математического моделирования) определяется как способом внешнего воздействия, так и конструктивным исполнением системы [2].

Для однозначного определения модели теплового состояния необходимо описать ряд характеристик объекта и процесса теплообмена. К характеристикам объекта относятся его форма и материал. Геометрическую форму тела сводят к одной из шести стандартных форм (полуограниченное тело, неограниченная пластина, сплошной или полый цилиндр, сплошной или полый шар) или их комбинации. Материал объекта определяется при помощи теплофизических характеристик (ТФХ). К ним относят коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , теплоемкость  $C$  и плотность  $\rho$ . Также используются динамические характеристики – коэффициент температуропроводности  $a = \lambda / (C\rho)$  и коэффициент тепловой активности, или тепловой инерции  $e = \sqrt{\lambda C\rho}$ , являющийся характеристикой теплового контакта.

При решении краевой задачи теплопроводности важным является правильное задание начальных и граничных условий, а также характеристик внешних источников тепла. Для моделируемого объекта иногда приходится учитывать влияние внутренних источников тепла. По характеру действия источники бывают точечные, линейные, плоские и объемные, мгновенного или непрерывного действия, постоянные или переменные во времени, а также подвижные и неподвижные. Чаще всего из условий однозначности требуется определить характеристики теплового состояния, что относится к прямым задачам теплопроводности. Для выявления дефектов внутренней структуры мы анализируем появление аномальной температурной зоны на поверхности тела и по ним оцениваем параметры размеров дефекта, в этом случае решается обратная задача теплопроводности [3].

### 1. Объект исследования

Для разработки модели теплового контроля многослойного биметаллического материала с дефектами опишем свойства объекта и условия проведения измерений.

Рассматриваемый объект представляет собой трехслойную пластину, один из наружных слоев которой изготовлен из аустенитной нержавеющей стали ( $1, h_1$ ), другой – из аустенитной либо ферромагнитной нержавеющей стали ( $3, h_3$ ), а между ними находится теплораспределительный слой ( $2, h_2$ ) из алюминия или меди (рис. 2). Понятно, что основные теплофизические характеристики претерпевают существенные изменения вдоль направления теплового потока  $q_{изл}$  (по нормали к слоям).

Дефекты расслоения могут присутствовать в местах контакта наружных слоев изделия с внутренним теплораспределительным слоем с одной или другой его стороны. Не исключено наличие двух дефектов, расположенных один над другим, различного размера, с частичным или полным перекрытием. Поперечные размеры дефектов ( $d, \delta$ ) ограничены и в несколько раз меньше размера пластин.

При обнаружении скрытых дефектов в большинстве случаев используют процедуры импульсного активного ТК, поскольку в стационарном режиме сигналы от дефектов нивелируются из-за выравнивания температуры по объему тела, а в условиях теплообмена с окружающей средой разность температур среды и тела не позволяет достичь достаточного значения амплитуды сигнала.

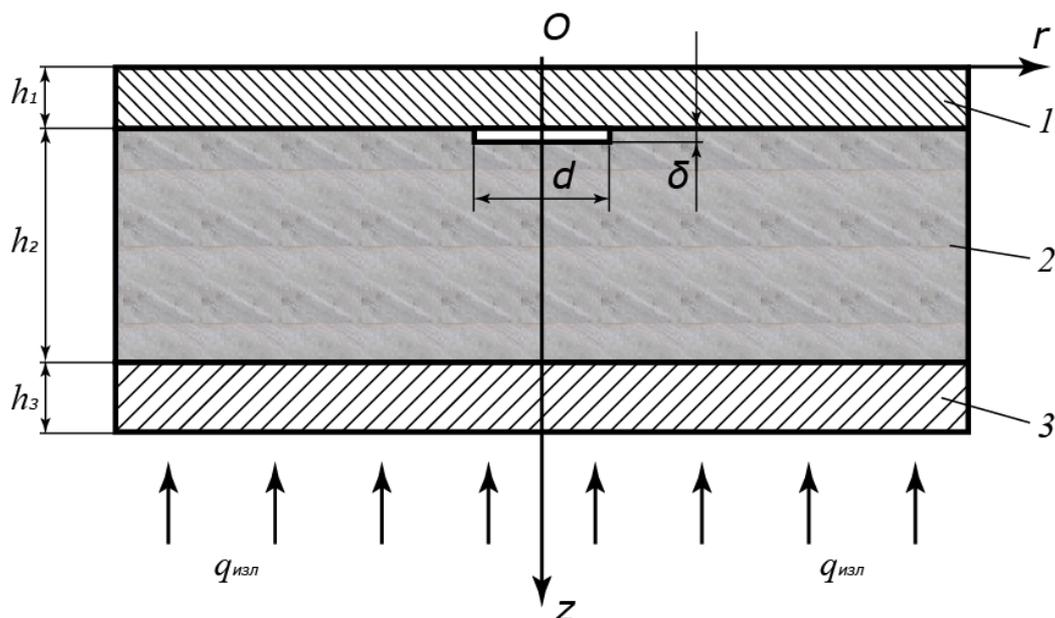


Рис. 2. Многослойная пластина с цилиндрическим дефектом, ее основные размеры  
Fig. 2. Multilayer plate with a cylindrical delamination, its main dimensions

В активных процедурах ТК мощность потока нагрева обычно значительно превышает мощность встречного потока теплоотдачи от тела за счет конвекции и излучения, поэтому теплообмен со стороны источника теплового нагружения можно представить как адиабатический и свести модель к более простому виду [1].

Прямой задачей является определение температурного поля с передней (нагреваемой) и обратной стороны многослойной пластины как в бездефектной области, так и с учетом различных возможных случаев расположения дефектов. При решении обратной задачи необходимо определить размеры дефектов и глубину их залегания, а также толщину и теплофизические характеристики (материал) теплораспределительного слоя.

## 2. Основные допущения и ограничения математической модели теплового состояния многослойной пластины

На основе проведенного анализа можно сформулировать требования и допущения к математической модели исследуемого объекта, показанного на рис. 2.

Для обеспечения возможности определения поперечных размеров дефектов необходимо уходить от одномерной постановки задачи.

В начальный момент времени считаем, что температура во всех точках расчетной области равна температуре окружающей среды.

Процесс нагрева должен соответствовать условиям проведения импульсного активного ТК. При этом влияние конвективной составляющей теплового потока со стороны нагрева можно учитывать только для периода остывания образца. Для выявления дефектов с обеих сторон теплораспределительного слоя модель должна учитывать условия проведения односторонней и двусторонней процедур ТК.

Контакт между отдельными слоями пластины полагаем идеальным, то есть на границе раздела выполняется равенство температур и тепловых потоков. Передачей тепла в цилиндрическом воздушном зазоре можно пренебречь.

Таким образом, при моделировании теплового состояния многослойной пластины был принят ряд допущений и ограничений.

1. Для температурного поля имеет место осевая симметрия ( $dT/d\varphi = 0$ ), считаем, что температурное поле нестационарное и двухмерное –  $T(r, z, \tau)$ .

2. Все пластины имеют форму цилиндра радиуса  $R$ , причем  $R \gg h_i$ .

3. Передачей тепла в цилиндрическом воздушном зазоре можно пренебречь.

4. Отсутствует термическое сопротивление в контакте стальной и алюминиевой пластин. Считаем, что контакт между отдельными слоями является идеальным, то есть на границе раздела выполняется равенство температур и тепловых потоков [4].

Полученные результаты применены авторами при разработке модели для трехслойной стале-алюминиевой пластины с одним дефектом в виде цилиндрического воздушного зазора.

### 3. Выбор математической модели

Большинство моделей теплопроводности твердых тел базируется на дифференциальном уравнении теплопроводности параболического типа различной размерности в декартовых, цилиндрических или сферических координатах [1, 3, 5].

Большое количество аналитических решений одномерных задач нагрева (охлаждения) неограниченной пластины для расчета температур в бездефектных областях можно найти в классической литературе по теории теплопроводности [6, 7].

Одномерные модели используют при разработке систем теплозащиты, основываясь на недопустимости большой глубины прогрева теплозащитной конструкции при взаимодействии с внешней средой [2, 8]. Хорошо систематизированы классические решения для однослойной пластины в различных условиях нагрева (равномерно-распределенным тепловым потоком в виде непрерывного стационарного потока, прямоугольного теплового импульса, мгновенного импульса Дирака, а также тепловых волн) [1, 3]. При переходе к многослойным объектам применяют принцип суперпозиции [2, 3].

Запись граничных условий зависит от применяемой методики теплового контроля. В общем случае при неадиабатическом теплообмене на нагреваемой поверхности объекта контроля имеет место смешанное граничное условие II и III рода, которое выражает условие баланса трех потоков на поверхности изделия: потока нагрева, потока, уходящего в глубину объекта за счет теплопроводности, и потока теплообмена с окружающей средой за счет конвекции и излучения. При отсутствии теплообмена на поверхности (мощность потока конвекции и излучения много меньше падающего на поверхность теплового потока) условия приближаются к адиабатическим. В ТК такие условия возникают при активном тепловом контроле с импульсным нагревом и малыми временами наблюдения [9].

В многослойных объектах при переходе через границу слоев выполняются граничные условия IV рода – условия неразрывности теплового потока и температуры на границе слоев:

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}; \quad T_i = T_{i+1}. \quad (1)$$

Задача усложняется при моделировании многослойных объектов с дефектами расслоения – плоскими воздушными промежутками между слоями. Теплопередача в таких дефектах в общем случае происходит путем теплопроводности, конвекции и излучения. Однако анализ составляющих теплового потока, проведенный в [1], показывает, что в тонких дефектах (до 250 мкм) мощность потока теплопроводности существенно превышает величину потоков конвекции и излучения, тогда как с ростом толщины дефекта при его размерах 5–25 мм в нем может развиваться конвекция (при сохранении низкой мощности потока излучения). Излучение становится существенным при разнице температур между границами дефекта более 500 °С.

На границах раздела слоев рассматривают два типа ГУ. Дополнительные условия неразрывности (ГУ IV рода) формулируют при прохождении границы дефекта и основного материала. При этом распределение температуры зависит в том числе от теплоемкости слоя, поэтому такие дефекты называют емкостными. Если теплоемкостью дефектного слоя ( $i+1$ ) толщиной  $l_{i+1}$  можно пренебречь, то его основной характеристикой становится тепловое сопротивление  $R_{i+1}$ , и соответствующие дефекты называют резистивными. На границах резистивных дефектов температура изменяется скачкообразно, а тепловой поток остается неразрывным:

$$T_{i+1} - T_i = R_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}; \quad R_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{\lambda_{i+1}}; \quad (2)$$

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = -\lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}. \quad (3)$$

Рассмотренные зависимости и допущения реализованы в модели односторонней процедуры теплового контроля трехслойной пластины при нагреве импульсом Дирака [10]. Модель отличается тем, что внутренний слой поочередно рассматривается как слой с идеальным контактом либо как резистивный дефект между двумя слоями. Пренебрежение теплоотдачей на наружных поверхностях пластины позволяет авторам получить аналитическое решение, пригодное для дальнейшего использования в обратных задачах тепловой дефектометрии.

Трехслойная одномерная модель неограниченной пластины в неадиабатических условиях предложена для решения различных задач теплового контроля (многослойное изделие, покрытие на подложке и др.). В данной модели средний слой поочередно рассматривается либо как емкостный дефект, либо в качестве связующего материала. Модель основана на одномерном дифференциальном уравнении теплопроводности параболического типа. Граничные условия учитывают теплоотдачу на нагреваемой и обратной поверхности пластины и неразрывность тепловых потоков и температуры на границах слоев.

Авторы [1] приводят достаточно сложное аналитическое решение задачи нагрева объекта и отмечают, что расчет подобных задач для неадиабатических пластин с числом слоев более трех в аналитическом виде теоретически возможен, но практически весьма трудоемок вследствие громоздкости результатов преобразований, и в этом случае чаще применяют численные методы. При этом аналитические модели можно использовать для оценки точности численных решений в дефектных областях, для которых классические решения [6, 7] не применяют.

Также отмечено, что при наличии в теле нескольких тепловых барьеров (зон контакта различных материалов и дефектов) односторонним методом теплового контроля удастся исследовать не более 2–3 барьеров, наиболее близко расположенных к поверхности нагрева. Для выявления глубоко залегающих дефектов предложено применять двухстороннюю процедуру теплового контроля (расположение источника нагрева и регистрирующих устройств с разных сторон контролируемого объекта) и соответствующим образом модифицировать математическую модель.

Для моделирования нагрева двухслойного биметаллического материала с идеальным контактом между слоями подвижным точечным источником тепла постоянной плотности разработанная одномерная модель температурного поля [4]. На ее основе выполнена оценка требуемых энергетических параметров излучения источника тепла и определены толщины слоев и теплофизические характеристики биметалла.

Одномерная модель ТК многослойного объекта с термическим сопротивлением между слоями применяется для решения задачи контроля пористости металлического каркаса и измерения толщины заполняющего его фторопластового слоя [11].

При использовании одномерных моделей для решения задач дефектометрии можно определить глубину залегания дефекта и величину его раскрытия («толщину»), но невозможно определить поперечные размеры (протяженность). Многомерные модели позволяют учитывать рассеяние тепла в материале объекта вокруг дефектов и более корректно определять температурный сигнал над дефектом. При исследовании двумерной модели объекта с дисковидным дефектом для различных материалов [1] определены критические значения отношения радиуса дефекта к глубине залегания, для которых амплитуда сигнала достигает возможного максимума.

При переходе от одномерной постановки задачи к двумерной усложняются уравнения, описывающие процессы внутри материала. В качестве примера можно привести моделирование процессов активного ТК для определения дефектов в многослойных пластинах из углепластика. В первой части [12] представлена одномерная модель многослойной пластины с дефектами, для которой предложено аналитическое решение. Во второй части [13] выполнен переход к двумерной модели и используется численное решение обратной задачи тепловой дефектометрии (определение размеров и глубины залегания дефекта) с точностью порядка 10 %.

В зависимости от анализируемой задачи дифференциальное уравнение теплопроводности может быть записано в декартовых, цилиндрических или сферических координатах. Разнообразные примеры двумерных и трехмерных моделей для различных объектов ТК приведены в [1, 5].

Для одномерного и двумерного моделирования нагрева многослойных адиабатических пластин разработан метод «теплового четырехполюсника» [14, 15], согласно которому решения

уравнения теплопроводности выражаются в виде линейных матричных связей между векторами температуры и тепловых потоков на границах многослойной системы, что позволяет получить решения, структура которых не зависит от граничных условий.

С применением метода четырехполосника разработана двумерная модель сочетания дефектов, расположенных один над другим в различных слоях углепластика [16]. Показано, что сигнал от двух тонких дефектов ведет себя иным образом, нежели сигнал от одного дефекта двойной толщины. Суммарное температурное распределение  $\Delta T_{\Sigma}(x, y, \tau)$  над группой малоразмерных дефектов может быть представлено как суперпозиция сигналов от каждого дефекта как в пространстве, так и во времени,  $\Delta T_{\Sigma}(x, y, \tau) = \Sigma \Delta T_i(x, y, \tau)$ .

Обобщенная трехмерная модель теплового неразрушающего контроля многослойных объектов с неоднородностями предложена для оценки потерь в ограждающих конструкциях, обнаружения дефектов в металлопрокате в ходе технологического процесса, диагностики состояния изоляционного покрытия, швов и стенок труб [17, 18]. Модель основана на нестационарном уравнении теплопроводности в декартовых координатах и учитывает возможность присутствия внутреннего объемного источника тепла. Дефекты моделируются при помощи условий неидеального теплового контакта. Полученные зависимости применяются для расчета значений теоретических температур. Авторами данного способа разработан также метод решения обратной задачи для определения коэффициентов теплопроводности слоев материала контролируемого объекта и параметров геометрии дефектов [19].

Модели для многослойных пластин с дефектами расслоения весьма разнообразны, но при этом существуют общие подходы к их разработке. Набор факторов, ограничений и допущений определяется главным образом целью проводимого исследования, при этом всегда стремятся к упрощению модели для удобства ее практического применения.

С учетом сформулированных допущений будем полагать, что распределение температуры в двух стальных пластинах и алюминиевой пластине описывается уравнением теплопроводности ( $\tau > 0, 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq (h_1 + h_2 + h_3)$ ) (см. рис. 2):

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = a_i \cdot \left( \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

где  $i = 1, 2, 3$  – номер слоя;  $\tau$  – время;  $T(r, z, \tau)$  – температура,  $a_i = \lambda_i / (c_i \rho_i)$  – коэффициент температуропроводности;  $\lambda_i, \rho_i, c_i$  – соответственно теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость металлов.

Индекс 1 соответствует стали при  $0 \leq z \leq h_1$ ; индекс 2 – алюминию при  $h_1 \leq z \leq (h_1 + h_2)$ ; индекс 3 – стали при  $(h_1 + h_2) \leq z \leq (h_1 + h_2 + h_3)$ .

Для решения дифференциального уравнения (4) его необходимо дополнить краевыми условиями.

В начальный момент времени считаем, что температура во всех точках расчетной области равна температуре окружающей среды (для  $0 \leq z \leq (h_1 + h_2 + h_3), 0 \leq r \leq R$ ):

$$T(r, z, 0) = T_0. \quad (5)$$

#### Граничные условия (ГУ)

На оси цилиндра имеем условие осевой симметрии (для  $r = 0, 0 \leq z \leq (h_1 + h_2 + h_3)$ )

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

На боковой стенке многослойной цилиндрической пластины из допущения 2 имеем (для  $r = R, 0 \leq z \leq (h_1 + h_2 + h_3)$ )

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

На верхней стенке I пластины

Для ( $0 < r = R, z = 0$ ) в период нагрева пластины имеем  $0 < \tau \leq \tau_1$  граничное условие 2-го рода

$$q_{\text{изл}} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad (8)$$

при ее остывании  $\tau_1 < \tau \leq (\tau_1 + \tau_2)$  граничное условие 3-го рода

$$\alpha_{\text{окр}}(T_1 - t_{\text{окр}}) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad (9)$$

где  $q_{\text{изл}}$  – тепловой поток нагрева пластины путем теплового излучения;  $\alpha_{\text{окр}}$  – приведенный коэффициент теплоотдачи (излучением и конвекцией) от внешней поверхности стенки, имеющей температуру  $T_1$ , в окружающую среду с температурой  $t_{\text{окр}}$ .

### Заключение

Рассмотрена структура математической модели теплового состояния объекта ТК. Приведено описание объекта исследования – многослойной биметаллической пластины с дефектами расслоения и процесса проведения теплового контроля. Рассмотрены математические модели подобных объектов, выполнен анализ существующих подходов к их разработке. На основе проведенного анализа сформулированы требования и допущения для математической модели исследуемого объекта и приведена математическая модель импульсного нагрева и остывания многослойной пластины при наличии дефекта расслоения.

### Список литературы

1. Вавилов В.П. Инфракрасная термография и тепловой контроль: науч. изд. М.: ИД Спектр, 2009. 544 с.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Идентификация математических моделей сложного теплообмена: монография. М.: Изд-во МАИ, 1999. 268 с.
3. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1976. 349 с.
4. Пудовкин А.П., Чернышов В.Н., Плужников Ю.В., Колмаков А.В. Метод бесконтактного неразрушающего контроля слоев двухслойных изделий и анализ теплофизических процессов в биметаллах // Вестник ТГТУ. 2002. Т. 8, № 2. С. 190–200.
5. Ячиков И.М., Логунова О.С., Портнова И.В. Математическое моделирование теплофизических процессов. Магнитогорск: МГТУ, 2004. 175 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
7. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 488 с.
8. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009. 298 с.
9. Maldague X. Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing // Wiley series in microwave and optical engineering. New York: John Wiley & Sons, 2001. 682 p.
10. Balageas D., Krapez J.-C., Cielo P. Pulsed Photothermal Modeling of Layered Materials // Journal of Applied Physics. 1986. Vol. 59. P. 348–357. URL: [https://www.researchgate.net/publication/224507624\\_Pulsed\\_Photothermal\\_Modeling\\_of\\_Layered\\_Materials](https://www.researchgate.net/publication/224507624_Pulsed_Photothermal_Modeling_of_Layered_Materials) (дата обращения: 05.12.2021). doi: 10.1063/1.336690.
11. Способ непрерывного контроля толщины слоев и пористости металлического каркаса четырехслойного металлофторопластового ленточного материала: пат. 2290604 Российская Федерация / Ю.В. Плужников, А.В. Колмаков, А.П. Пудовкин [и др.]. № 2005100895/28; заявл. 26.06.2006; опубл. 27.12.2006, Бюл. № 36. 8 с.
12. Krapez J.-C., Cielo P. Thermographic Nondestructive Evaluation: Data Inversion Procedures Part I: 1-D Analysis // Research in Nondestructive Evaluation. 1991. No. 2. P. 81–100. URL: [https://www.researchgate.net/publication/240536138\\_Thermographic\\_Nondestructive\\_Evaluation\\_Data\\_Inversion\\_Procedures\\_Part\\_I\\_1-D\\_Analysis](https://www.researchgate.net/publication/240536138_Thermographic_Nondestructive_Evaluation_Data_Inversion_Procedures_Part_I_1-D_Analysis) (дата обращения: 05.12.2021). doi: 10.1080/09349849109409504.
13. Krapez J.-C., Maldague X., Cielo P. Thermographic Nondestructive Evaluation: Data Inversion Procedures Part II: 2-D Analysis and Experimental Results // Research in Nondestructive Evaluation. 1991. No. 2. P. 101–124. URL: [https://www.researchgate.net/publication/261645355\\_](https://www.researchgate.net/publication/261645355_)

*Thermographic Nondestructive Evaluation Data Inversion Procedures Part II 2-D Analysis and Experimental Results* (дата обращения: 05.12.2021). doi: 10.1080/09349849109409505.

14. Mailliet D., André S., Batsale J.-C., Degiovanni A., Moyne C. *Thermal Quadrupoles. Solving the heat equation through integral transforms*. John Wiley and Sons, 2000. 360 p. URL: [https://www.researchgate.net/publication/265486424\\_Thermal\\_Quadrupoles\\_Solving\\_the\\_heat\\_equation\\_through\\_integral\\_transforms](https://www.researchgate.net/publication/265486424_Thermal_Quadrupoles_Solving_the_heat_equation_through_integral_transforms) (дата обращения: 05.12.2021).

15. Batsale J.C., Mailliet D., Degiovanni A. *Thermal quadrupoles method extended with integral transforms – Calculations of the heat transfer across a two-dimensional plane crack* // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. January 1994. Vol. 37, iss. 1. P. 111–127. URL: [https://www.researchgate.net/publication/259034489\\_Thermal\\_quadrupoles\\_method\\_extended\\_with\\_integral\\_transforms\\_-\\_Calculations\\_of\\_the\\_heat\\_transfer\\_across\\_a\\_two-dimensional\\_plane\\_crack](https://www.researchgate.net/publication/259034489_Thermal_quadrupoles_method_extended_with_integral_transforms_-_Calculations_of_the_heat_transfer_across_a_two-dimensional_plane_crack) (дата обращения: 05.12.2021).

16. Bendada A., Mailliet D., Degiovanni A. *Non destructive transient thermal evaluation of laminated composites: discrimination between delaminations thickness variations and multidelaminations* // *Quantitative Infrared Thermography. Eurotherm Seminar 27, Paris, July 7–9, 1992*. P. 218–223. URL: <http://qirt.org/archives/qirt1992/papers/033.pdf> (дата обращения: 05.12.2021).

17. Способ теплового неразрушающего контроля многослойных объектов: пат. 2219534 Российская Федерация / О.Н. Будадин, Т.Е. Троицкий-Марков, Е.В. Абрамова, В.И. Сучков. № 2002124295/28; заявл. 12.09.2002; опубл. 20.12.2003, Бюл. № 35. 41 с.

18. *Инженерные основы теплового контроля. Опыт практического применения: моногр.* / З.Г. Салихов, О.Н. Будадин, Е.Н. Ишиметьев [и др.]. М.: МИСИС, 2008. 476 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/116623> (дата обращения: 05.12.2021).

19. Будадин О.Н., Абрамова Е.В., Родин М.А., Лебедев О.В. *Тепловой неразрушающий контроль зданий и строительных сооружений* // *Дефектоскопия*. 2003. № 5. С. 77–94.

## References

1. Vavilov V.P. *Infrakrasnaya termografiya i teplovoi kontrol'* [Infrared Thermography and Thermal Nondestructive Testing]. Moscow, ID Spektr; 2009. 544 p. (In Russ.)

2. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. *Identifikatsiya matematicheskikh modelei slozhnogo teploobmena: monografiya* [Identification of complex heat transfer mathematical models]. Moscow, MAI Publ.; 1999. 268 p. (In Russ.)

3. Pekhovich A.I., Zhidkikh V.M. *Raschety teplovogo rezhima tverdykh tel* [Calculations of the solids' thermal mode]. Leningrad, Energiya Publ.; 1976. 349 p. (In Russ.)

4. Pudovkin A.P., Chernyshov V.N., Pluzhnikov Yu.V., Kolmakov A.V. [Method for non-contact non-destructive testing of layers of two-layer products and analysis of thermophysical processes in bi-metals]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transactions of the Tambov State Technical University*. 2002;8(2):190–200. (In Russ.)

5. Yachikov I.M., Logunova O.S., Portnova I.V. *Matematicheskoe modelirovanie teplofizicheskikh protsessov* [Mathematical modeling of thermophysical processes]. Magnitogorsk, MSTU Publ.; 2004. 175 p. (In Russ.)

6. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat conduction theory]. Moscow; 1967. 599 p. (In Russ.)

7. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. *Teploperedacha* [Heat transmission]. Moscow, Energiya Publ.; 1975. 488 p. (In Russ.)

8. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena* [Inverse problems in the study of complex heat transfer]. Moscow, Yanus-K; 2009. 298 p. (In Russ.)

9. Maldague X. *Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing*. Wiley series in microwave and optical engineering. New York: John Wiley & Sons; 2001. 682 p.

10. Balageas D., Krapez J.-C., Cielo P. *Pulsed Photothermal Modeling of Layered Materials*. *Journal of Applied Physics*. 1986;59:348–357. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/224507624\\_Pulsed\\_Photothermal\\_Modeling\\_of\\_Layered\\_Materials](https://www.researchgate.net/publication/224507624_Pulsed_Photothermal_Modeling_of_Layered_Materials) (accessed 05 December 2021). doi: 10.1063/1.336690.

11. Pluzhnikov Yu.V., Kolmakov A.V., Pudovkin A.P. *Sposob nepreryvnogo kontrolya tolshchiny sloev i poristosti metallicheskogo karkasa chetyrekhsloninogo metalloftoroplastovogo lentochного materiala* [Method of permanent control of thickness of layers and porosity of metallic frame of four-layer metallic-fluoroplastic belt material]. Patent RF, no. 2290604, 2006.

12. Krapez J.-C., Cielo P. Thermographic Nondestructive Evaluation: Data Inversion Procedures Part I: 1-D Analysis. *Research in Nondestructive Evaluation*. 1991;(2):81–100. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/240536138\\_Thermographic\\_Nondestructive\\_Evaluation\\_Data\\_Inversion\\_Procedures\\_Part\\_I\\_1-D\\_Analysis](https://www.researchgate.net/publication/240536138_Thermographic_Nondestructive_Evaluation_Data_Inversion_Procedures_Part_I_1-D_Analysis) (accessed 05 December 2021). doi: 10.1080/09349849109409504.

13. Krapez J.-C., Maldague X., Cielo P. Thermographic Nondestructive Evaluation: Data Inversion Procedures Part II: 2-D Analysis and Experimental Results. *Research in Nondestructive Evaluation*. 1991;(2):101–124. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/261645355\\_Thermographic\\_Nondestructive\\_Evaluation\\_Data\\_Inversion\\_Procedures\\_Part\\_II\\_2-D\\_Analysis\\_and\\_Experimental\\_Results](https://www.researchgate.net/publication/261645355_Thermographic_Nondestructive_Evaluation_Data_Inversion_Procedures_Part_II_2-D_Analysis_and_Experimental_Results) (accessed 05 December 2021). doi: 10.1080/09349849109409505.

14. Maillet D., André S., Batsale J.-C., Degiovanni A., Moynes C. Thermal Quadrupoles. Solving the heat equation through integral transforms. John Wiley and Sons; 2000. 360 p. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/265486424\\_Thermal\\_Quadrupoles\\_Solving\\_the\\_heat\\_equation\\_through\\_integral\\_transforms](https://www.researchgate.net/publication/265486424_Thermal_Quadrupoles_Solving_the_heat_equation_through_integral_transforms) (accessed 05 December 2021).

15. Batsale J.C., Maillet D., Degiovanni A. Thermal quadrupoles method extended with integral transforms – Calculations of the heat transfer across a two-dimensional plane crack. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1994;37(1);111–127. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/259034489\\_Thermal\\_quadrupoles\\_method\\_extended\\_with\\_integral\\_transforms\\_-\\_Calculations\\_of\\_the\\_heat\\_transfer\\_across\\_a\\_two-dimensional\\_plane\\_crack](https://www.researchgate.net/publication/259034489_Thermal_quadrupoles_method_extended_with_integral_transforms_-_Calculations_of_the_heat_transfer_across_a_two-dimensional_plane_crack) (accessed 05 December 2021).

16. Bendada A., Maillet D., Degiovanni A. Non destructive transient thermal evaluation of laminated composites: discrimination between delaminations thickness variations and multidelaminations. *Quantitative Infrared Thermography. Eurotherm Seminar 27, Paris, July 7–9; 1992*. P. 218–223. Available at: <http://qirt.org/archives/qirt1992/papers/033.pdf> (accessed 05 December 2021).

17. Budadin O.N., Troitskii-Markov T.E., Abramova E.V., Suchkov V.I. *Sposob teplovogo nerazruchayushchego kontrolya mnogoslonykh ob"ektov* [Process of thermal nondestructive testing of multi-layer objects]. Patent RF, no. 2219534, 2003. (In Russ.)

18. Salikhov Z.G., Budadin O.N., Ishmet'ev E.N. et al. *Inzhenernye osnovy teplovogo kontrolya. Opyt prakticheskogo primeneniya* [Thermal nondestructive testing engineering basics. Practical application experience]. Moscow, MISIS; 2008. 476 p. Available at: <https://e.lanbook.com/book/116623> (accessed 05 December 2021). (In Russ.)

19. Budadin O.N., Abramova E.V., Rodin M.A., Lebedev O.V. [Thermal nondestructive testing of buildings and building structures]. *Defektoskopiya*. 2003;(5):77–94. (In Russ.)

### **Информация об авторах**

**Костылева Лилия Юрьевна**, старший преподаватель кафедры информационно-аналитического обеспечения управления в социальных и экономических системах, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия; [kostylevali@susu.ru](mailto:kostylevali@susu.ru).

**Логиновский Олег Витальевич**, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой информационно-аналитического обеспечения управления в социальных и экономических системах, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия; [loginovskiy@mail.ru](mailto:loginovskiy@mail.ru).

**Рец Евгения Анатольевна**, заведующий лабораторией кафедры информационно-аналитического обеспечения управления в социальных и экономических системах, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия; [retcea@susu.ru](mailto:retcea@susu.ru).

**Ячиков Игорь Михайлович**, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия; [iachikovim@susu.ru](mailto:iachikovim@susu.ru).

*Information about the authors*

**Liliya Yu. Kostyleva**, Senior Lecturer of the Department of Information and Analytical Support of Management in Social and Economic Systems, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; kostylevali@susu.ru.

**Oleg V. Loginovskiy**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Informational and Analytical Support of Control in Social and Economic Systems, School of Electrical Engineering and Computer Science, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; loginovskiiov@susu.ru.

**Evgeniya A. Retc**, Head of the Laboratory of the Department of Information and Analytical Support of Management in Social and Economic Systems, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; retcea@susu.ru.

**Igor M. Yachikov**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Information and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; iachikovim@susu.ru.

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

*Статья поступила в редакцию 15.11.2021; одобрена после рецензирования 29.11.2021; принята к публикации 06.12.2021.*

*The article was submitted 15.11.2021; approved after reviewing 29.11.2021; accepted for publication 06.12.2021.*