Управление в технических системах
Control in technical systems

Научная статья
УДК 681.5
DOI: 10.14529/ctcr220204

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СОЧЛЕНЕНИЯМИ

А.И. Телегин, *teleginai@susu.ru*
Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия

Аннотация. Решается проблема сложности вывода и громоздкого аналитического вида уравнений математических моделей управляемых систем тел с явно выраженными структурными, кинематическими, статическими и динамическими параметрами. В первую очередь это относится к уравнениям динамики, на которых основаны системы управления. Наш практический опыт и теоретические результаты указывают на то, что пути решения этой проблемы нужно искать в двух направлениях. Во-первых, в направлении классификации систем тел и использования особенностей представителей рассматриваемых классов систем тел в части упрощения формализмов вывода их уравнений динамики, а также уменьшения числа математических операций в аналитическом представлении уравнений динамики. Во-вторых, в направлении выбора параметров состояния тел, в которых записываются аналитические скалярно-координатные виды уравнений динамики. В этой связи следует заметить, что подавляющее большинство (более 90 %) промышленных роботов, а также роботов специального назначения имеют структуру одной открытой ветви, в которой тела образуют друг с другом вращательные кинематические пары пятого класса (вращательные сочленения). Если в таких системах полюса тел выбирать на осях их относительного вращения, то межполюсные расстояния будут постоянными, что значительно упрощает решение указанной проблемы. По поводу выбора параметров состояния, явно входящих в уравнения динамики, следует заметить, что квазискорости, т. е. проекции абсолютных угловых скоростей тел на оси их связанных систем координат, являются наиболее подходящими для этих целей. Дело в том, что в уравнениях кинематики, замыкающих уравнения динамики до полного набора уравнений для решения той или иной задачи, всегда можно выразить квазискорости через любые другие параметры, например, относительные углы поворота тел и их производные по времени, направляющие косинусы и их производные, кватернионы и т. д. Если проекции абсолютных угловых скоростей тел на их оси измеряются, например, гироскопами на телах и решается первая задача динамики, то формулы решения содержат минимальное число операций сложения и умножения. Таким образом, **целью исследования** является разработка простого метода вывода аналитического вида уравнений динамики манипуляторов с вращательными сочленениями в квазискоростях, в которых явно выражены геометрические, кинематические, статические и инерционные параметры тел. Используемые **методы исследования** (векторная и аналитическая механика систем тел, векторная алгебра, системный анализ и методы тождественных преобразований) позволили свести вывод уравнений динамики манипуляторов к формальным действиям их выписывания без выполнения сложных математических операций дифференцирования, возведения в степень, вычисления векторных операций и т. д. **Результаты** исследования содержат доказательство общего векторного вида уравнений динамики манипуляторов в квазискоростях с явно выраженными межполюсными расстояниями и параметрами распределения масс тел. Для выписывания моментов движущих сил в сочленениях получены скалярно-координатные формулы и их простой частный вид для случая параллельности осей вращения соседних сочленений. Как частный случай получены формулы выписывания уравнений динамики манипуляторов на плоскости. Для них процесс выписывания уравнений динамики сводится к конкретизации числа тел, их геометрических и инерционных параметров. **Заключение.** Эффективность изложенных методов и полученных формул продемонстрирована на примерах выписывания уравнений динамики тела с одной закрепленной точкой, гироскопа в кардановом подвесе и ангулярного манипулятора с тремя и шестью степенями свободы в пространстве. Эти результаты позволяют нам ожидать, что число пользователей предлагаемых методов будет расти. Положительный опыт использования этих методов в учебном процессе в дисциплинах «Основы механики систем тел», «Электромеханические системы» и «Мехатроника» оправдывает наши ожидания.

Ключевые слова: шарнирный манипулятор, уравнения динамики, квазискорости, выписывание формул, направляющие косинусы, верификация уравнений

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта 20-41-740019.

Для цитирования: Телегин А.И. Аналитическое решение первой задачи динамики манипуляторов с вращательными сочленениями // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22, № 2. С. 41–57. DOI: 10.14529/ctcr220204

Original article
DOI: 10.14529/ctcr220204

ANALYTICAL SOLUTION OF THE FIRST PROBLEM OF DYNAMICS OF MANIPULATORS WITH ROTATIONAL JOINTS

***A.I. Telegin**, teleginai@susu.ru*
South Ural State University, Miass, Russia

Abstract. The problem of complexity of derivation and the cumbersome analytical form of equations of mathematical models of controlled body systems with explicit structural, kinematic, static and dynamic parameters is solved. First of all, this applies to the equations of dynamics on which the control systems are based. Our practical experience and theoretical results indicate that solutions to this problem should be sought in two directions. Firstly, in the direction of classifying body systems and using peculiarities of the representatives of the considered classes of body systems in terms of simplifying formalisms for deriving their equations of dynamics, as well as reducing the number of mathematical operations in the analytical representation of the equations of dynamics. Second, and in the direction of choosing the parameters of the state of bodies in which the analytical scalar-coordinate types of the equations of dynamics are written down. In this connection, it should be noted that the vast majority (more than 90 %) of industrial robots, as well as special-purpose robots, have a single open branch structure in which the bodies form rotational kinematic pairs of the fifth class (rotational articulations) with each other. If in such systems the poles of the bodies are chosen on the axes of their relative rotation, the interpole distances will be constant, which greatly simplifies the solution of the above problem. Regarding the choice of state parameters explicitly included in the equations of dynamics, it should be noted that quasi-velocities, i.e. projections of absolute angular velocities of bodies on the axes of their coupled coordinate systems, are the most suitable for these purposes. The point is that in the equations of kinematics, which close the equations of dynamics to a complete set of equations for solving a problem, one can always express quasi-velocities through any other parameters, for example, relative angles of rotation of bodies and their time derivatives, guiding cosines and their derivatives, quaternions, etc. If projections of absolute angular velocities of bodies on their axes are measured, for example, by gyroscopes on bodies, and the first problem of dynamics is solved, the solution formulas contain a minimum number of addition and multiplication operations. Thus, the **goal of the study** is to develop a simple method for deriving the analytical form of the equations of dynamics of manipulators with rotational joints in quasi-velocity, in which geometric, kinematic, static and inertial parameters of bodies are explicitly expressed. The used **research methods** (vector and analytical mechanics of body systems, vector algebra, system analysis and methods of identity transformations) made it possible to reduce the derivation of the equations of dynamics of manipulators to formal actions of writing them out without performing complex mathematical operations of differentiation, magnification, calculation of vector operations, etc. **The results** of the study contain a proof of the general vector form of the equations of dynamics of manipulators in quasi-velocity with explicitly expressed interpole distances and parameters of mass distribution of bodies. Scalar-coordinate formulas and their simple special formulas for the case of parallel rotation axes of neighboring joints are derived for writing out the moments of driving forces in joints. As a special case, the formulas for writing out the equations of dynamics of manipulators on the plane were obtained. For them, the process of writing out the equations of dynamics is reduced to the specification of the number of bodies, their geometric and inertial parameters. **Conclusion.** The effectiveness of the outlined methods and the obtained formulas have been demonstrated by examples of deriving the equations of dynamics of a body with a single fixed point, a gyroscope in a gimbal, and an angular manipulator with three and six degrees of freedom in space. These results allow us to expect that the number of users of the proposed methods will grow. The positive experience of using these methods in the educational process in the disciplines "Fundamentals of Mechanics of Body Systems", "Electromechanical Systems" and "Mechatronics" justifies our expectations.

Keywords: articulated arm, equations of dynamics, quasi-velocities, writing out the formulas, guiding cosines, equations verification

Acknowledgments: The study was financially supported by the RFBR and the Chelyabinsk Region within the framework of the scientific project 20-41-740019.

For citation: Telegin A.I. Analytical solution of the first problem of dynamics of manipulators with rotational joints. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2022;22(2):41–57. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr220204

Введение

Основной проблемой практического использования уравнений динамики (УД) манипуляторов является их громоздкость. За последние пять лет мы не встречали отечественные и зарубежные научные публикации, в которых так или иначе ставится задача выписывания аналитического вида УД манипуляторов со многими степенями подвижности и явно выраженными геометрическими, кинематическими, статическими и инерционными параметрами тел. Много статей посвящено численному решению задач динамики манипуляторов на ЭВМ в пошагово-алгоритмическом режиме, т. е. без представления УД в явном аналитическом виде. Использование систем аналитических вычислений для выписывания УД манипуляторов по классическим формализмам (Лагранжа, Аппеля, Ньютона – Эйлера и т. д.) не решает проблему их громоздкости. Например, в статье [1] отмечается, что УД ангулярного манипулятора с шестью степенями свободы, выведенные по формализму Лагранжа и записанные в символьном виде, занимают сорок машинописных страниц. Мы считаем, что это следствие неэффективности классических формализмов вывода УД манипуляторов.

Постановка задачи: разработать простой метод вывода аналитического вида УД манипуляторов с вращательными сочленениями и явно выраженными параметры тел. Свести вывод УД к формальным действиям их выписывания без выполнения сложных математических операций и продемонстрировать этот формализм на примерах выписывания УД манипуляторов с тремя и шестью степенями свободы в пространстве.

1. УД манипулятора в квазискоростях

Присвоим неподвижному телу манипулятора (стойке, станине) нулевой номер и свяжем с ним правую систему координат $\boldsymbol{Oxyz}$, где $\boldsymbol{x}$ – орт оси абсцисс, направленной горизонтально вправо, $\boldsymbol{y}$ – орт оси ординат, направленной вертикально вверх. Подвижные тела занумеруем числами 1, 2, …, N, где N – количество подвижных тел. Введем следующие обозначения:

m_{oi} – масса и обозначение i-го тела;

m_i – масса и обозначение i-й подсистемы, т. е. тела m_{oi} и всех следующих за ним тел;

O_i – полюс тела m_{oi}, т. е. фиксированная точка тела m_{oi};

C_{ai} – центр масс (ЦМ) тела m_{oi}, дополненного массой m_{i+1} в точке O_{i+1};

L_i – расстояние от точки O_i до точки O_{i+1};

$\boldsymbol{e}_i$ – орт, указывающий направление из точки O_i в точку O_{i+1};

$\boldsymbol{a}_i$ – орт, указывающий направление из точки O_i в точку C_{ai};

$\boldsymbol{R}_{i+1} = \boldsymbol{O_i O}_{i+1} = L_i \boldsymbol{e}_i$, $p_i = L_i m_{i+1}$, $m_{N+1} = 0$, $p_N = 0$, $b_i = m_i |\boldsymbol{O_i C}_{ai}|$;

$O_i \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{z}_i$ – правая связанная с телом m_{oi} система координат (ССК(i)), где $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_i$ – орты ее осей;

ω_i^x, ω_i^y, ω_i^z – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ абсолютной угловой скорости тела m_{oi} на оси ССК(i);

$\boldsymbol{K}_{0i}$ – кинетический момент тела m_{oi} относительно точки O_i;

I_i^x, I_i^y, I_i^z – осевые моменты инерции тела m_{oi} в ССК(i);

I_i^{xy}, I_i^{xz}, I_i^{yz} – центробежные моменты инерции тела m_{oi} в ССК(i);

$\boldsymbol{M}_i$ – главный момент относительно точки O_i сил, действующих на тело m_{oi} со стороны тела m_{oi-1}.

Для уменьшения громоздкости записей будем использовать:

– греческие буквы ξ, η, ζ, ν, μ, принимающие значения на множестве латинских букв $\{x, y, z\}$;

– латинскую букву u, принимающую значение на множестве латинских букв $\{e, a\}$;

– знаки суммирования по буквам $\xi, \eta, \zeta, \nu, \mu$;

– символ $\in_{\xi\eta\zeta}$ Леви-Чивиты, где $\xi, \eta, \zeta \in \{x, y, z\}$ и $\in_{xyz}=\in_{yzx}=\in_{zxy}= 1$ или $\in_{\xi\eta\zeta}= 0$, если среди символов $\xi\eta\zeta$ есть повторяющиеся, иначе $\in_{\xi\eta\zeta}= -1$ [2].

Эта система обозначений позволяет записывать следующие выражения:

$\boldsymbol{\omega}_i = \omega_i^x \boldsymbol{x}_i + \omega_i^y \boldsymbol{y}_i + \omega_i^z \boldsymbol{z}_i = \sum_\xi \omega_i^\xi \boldsymbol{\xi}_i$ – разложение вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ по ортам ССК(i);

$\boldsymbol{u}_i = \sum_\eta u_{\eta i} \boldsymbol{\eta}_i$ – разложение орт $\boldsymbol{a}_i$ или $\boldsymbol{e}_i$ по ортам ССК(i), где $u \in \{e, a\}$, $u_{\eta i} = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_i$ – постоянные направляющие косинусы (НК) орта $\boldsymbol{u}_i$ в ССК(i);

$\boldsymbol{\zeta}_j = \sum_\eta \zeta_{ji}^\eta \boldsymbol{\eta}_i$ – разложение орт $\boldsymbol{\zeta}_j$ ССК(j) по ортам ССК(i), где $\zeta_{ji}^\eta = \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i$ – НК орт ССК(j) в ССК(i);

$\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{\eta}_i = \in_{\xi\eta\nu} \boldsymbol{\nu}_i$; $\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{\zeta}_j = \boldsymbol{\xi}_i \times \sum_\eta \zeta_{ji}^\eta \boldsymbol{\eta}_i = \sum_\eta \in_{\xi\eta\nu} \zeta_{ji}^\eta \boldsymbol{\nu}_i$.

1.1. Формула вычисления момента силы в сочленении

Для манипулятора справедлива формула

$$\boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{m}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + \sum_{i=j}^{N} [\dot{\boldsymbol{K}}_{0i} + L_i(p_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + b_i \boldsymbol{R}_{ji} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}] + \boldsymbol{G}_j. \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{m}_j = \sum_{k=j}^{N} b_k \boldsymbol{a}_k$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui} = \sum_\xi \dot{\Omega}_{ui}^\xi \boldsymbol{\xi}_i, u \in \{e, a\}$, $\boldsymbol{K}_{0i} = \sum_\xi \omega_i^\xi \boldsymbol{I}_i^\xi$, $\boldsymbol{R}_{ji} = \sum_{k=j}^{i-1} L_k \boldsymbol{e}_k$,

$\boldsymbol{I}_i^x = I_i^x \boldsymbol{x}_i - I_i^{xy} \boldsymbol{y}_i - I_i^{xz} \boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{I}_i^y = -I_i^{xy} \boldsymbol{x}_i + I_i^y \boldsymbol{y}_i - I_i^{yz} \boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{I}_i^z = -I_i^{xz} \boldsymbol{x}_i - I_i^{yz} \boldsymbol{y}_i + I_i^z \boldsymbol{z}_i$,

$\dot{\Omega}_{ui}^x = u_{zi} \dot{\omega}_i^y - u_{yi} \dot{\omega}_i^z + (u_{yi} \omega_i^y + u_{zi} \omega_i^z) \omega_i^x - u_{xi}(\omega_i^{y2} + \omega_i^{z2})$, $\boldsymbol{G}_j = g \boldsymbol{m}_j \times \boldsymbol{y}$,

$\dot{\Omega}_{ui}^y = u_{xi} \dot{\omega}_i^z - u_{zi} \dot{\omega}_i^x + (u_{xi} \omega_i^x + u_{zi} \omega_i^z) \omega_i^y - u_{yi}(\omega_i^{x2} + \omega_i^{z2})$,

$\dot{\Omega}_{ui}^z = u_{yi} \dot{\omega}_i^x - u_{xi} \dot{\omega}_i^y + (u_{xi} \omega_i^x + u_{yi} \omega_i^y) \omega_i^z - u_{zi}(\omega_i^{x2} + \omega_i^{y2})$, $u_{\xi i} = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i$.

Доказательство формулы (1.1). В статье [3] выведена формула

$$\boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{m}_j \times \ddot{\boldsymbol{r}}_j + \sum_{i=j}^{N} \dot{\boldsymbol{K}}_{0i} + \sum_{i=j+1}^{N} \left[(m_i \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{m}_i) \times \ddot{\boldsymbol{R}}_i + \boldsymbol{R}_i \times \ddot{\boldsymbol{m}}_i\right] + \boldsymbol{G}_j, \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{m}_j = \sum_{i=j}^{N} (m_{oi} \boldsymbol{O}_i \boldsymbol{C}_i + m_{i+1} \boldsymbol{R}_{i+1})$, $\boldsymbol{R}_{N+1} = 0$, $\boldsymbol{G}_j = g \boldsymbol{m}_j \times \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{OO}_j$, C_i – ЦМ тела m_{oi}.

Учитывая условие статического равновесия $m_{oi} \boldsymbol{O}_i \boldsymbol{C}_i + m_{i+1} \boldsymbol{R}_{i+1} = b_i \boldsymbol{a}_i$, получим

$\boldsymbol{m}_j = \sum_{i=j}^{N} b_i \boldsymbol{a}_i$.

Используя формулу Пуассона $\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{e}_i$, обозначение $\boldsymbol{\omega}_{ei} = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{e}_i$ и равенство $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$, получим

$\dot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_{i=1}^{j} \dot{\boldsymbol{R}}_i = \sum_{i=0}^{j-1} \dot{\boldsymbol{R}}_{i+1} = \sum_{i=0}^{j-1} L_i \dot{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=0}^{j-1} L_i \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{j-1} L_i \boldsymbol{\omega}_{ei}$.

Следовательно, $\boldsymbol{m}_j \times \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{m}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}$, т. е. первая сумма (по номерам тел, несущих тело m_{oj}) в формуле (1.1) принимает искомый вид.

В ССК(i) с учетом введенных обозначений получим

$$\boldsymbol{K}_{0i} = \begin{pmatrix} I_i^x & -I_i^{xy} & -I_i^{xz} \\ -I_i^{xy} & I_i^y & -I_i^{yz} \\ -I_i^{xz} & -I_i^{yz} & I_i^z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_i^x \\ \omega_i^y \\ \omega_i^z \end{pmatrix} =$$

$$= (I_i^x \omega_i^x - I_i^{xy} \omega_i^y - I_i^{xz} \omega_i^z) \boldsymbol{x}_i + (-I_i^{xy} \omega_i^x + I_i^y \omega_i^y - I_i^{yz} \omega_i^z) \boldsymbol{y}_i + (-I_i^{xz} \omega_i^x - I_i^{yz} \omega_i^y + I_i^z \omega_i^z) \boldsymbol{z}_i =$$

$$= \sum_\xi I_i^\xi \omega_i^\xi \boldsymbol{\xi}_i - (I_i^{xy} \boldsymbol{y}_i + I_i^{xz} \boldsymbol{z}_i) \omega_i^x - (I_i^{xy} \boldsymbol{x}_i + I_i^{yz} \boldsymbol{z}_i) \omega_i^y - (I_i^{xz} \boldsymbol{x}_i + I_i^{yz} \boldsymbol{y}_i) \omega_i^z.$$

Если в последнем выражении раскрыть сумму по $\xi \in \{x, y, z\}$ и привести подобные при проекциях ω_i^x, ω_i^y, ω_i^z, то с учетом принятых обозначений векторов $\boldsymbol{I}_i^\xi$ получим искомый вид вектора $\boldsymbol{K}_{0i} = \sum_\xi \omega_i^\xi \boldsymbol{I}_i^\xi$.

С учетом равенств $\boldsymbol{R}_{i+1} = L_i \boldsymbol{e}_i$, $\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\omega}_{ei}$, $\ddot{\boldsymbol{R}}_{i+1} = L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}$, $p_i = L_i m_{i+1}$ получим

$(m_{i+1} \boldsymbol{R}_{i+1} + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \ddot{\boldsymbol{R}}_{i+1} = (m_{i+1} L_i^2 \boldsymbol{e}_i + L_i \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = L_i(p_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}$.

Следовательно,

$$\sum_{i=j+1}^{N} (m_i \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{m}_i) \times \ddot{\boldsymbol{R}}_i = \sum_{i=j}^{N} (m_{i+1} \boldsymbol{R}_{i+1} + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \ddot{\boldsymbol{R}}_{i+1} =$$
$$= \sum_{i=j}^{N} L_i(p_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}. \quad (1.3)$$

Учитывая обозначение $\boldsymbol{\omega}_{ai} = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{a}_i$ равенства

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{\omega}_{ai},\ \ddot{\boldsymbol{a}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai},\ \ddot{\boldsymbol{m}}_j = \sum_{i=j}^{N} b_i \ddot{\boldsymbol{a}}_i,\ \boldsymbol{R}_{jk} = \boldsymbol{O_j O}_k = \sum_{i=j}^{k-1} L_i \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{R}_{jj} = 0$$

и формулу изменения порядка суммирования $\sum_{i=j}^{N} L_i \sum_{k=i+1}^{N} b_k = \sum_{k=j+1}^{N} \sum_{i=j}^{k-1} L_i b_k$, получим

$$\sum_{i=j+1}^{N} \boldsymbol{R}_i \times \ddot{\boldsymbol{m}}_i = \sum_{i=j}^{N} \boldsymbol{R}_{i+1} \times \ddot{\boldsymbol{m}}_{i+1} = \sum_{i=j}^{N} L_i \boldsymbol{e}_i \times \sum_{k=i+1}^{N} b_k \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ak} =$$
$$= \sum_{k=j+1}^{N} b_k \sum_{i=j}^{k-1} L_i \boldsymbol{e}_i \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ak} = \sum_{k=j+1}^{N} b_k \boldsymbol{R}_{jk} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ak} =$$
$$= \sum_{i=j+1}^{N} b_i \boldsymbol{R}_{ji} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} = \sum_{i=j}^{N} b_i \boldsymbol{R}_{ji} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}.$$

Отсюда с учетом формул (1.2), (1.3) получим искомый вид второй суммы (по номерам тел, несомых телом m_{oj}) в формуле (1.1).

Выразим через квазискорости и квазиускорения формулу вычисления вектора $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui}$, где $u \in \{e, a\}$ и орты $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{u}_i$ неподвижны в теле m_{oi}. Используя обозначения $\boldsymbol{\xi}_{ei} = \boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{\xi}_{ai} = \boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{\xi}_{ui} = \boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{\omega}_{ui} = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{u}_i$ и разложение $\boldsymbol{\omega}_i = \sum_\xi \omega_i^\xi \boldsymbol{\xi}_i$, получим

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui} = (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{u}_i)'_t = (\sum_\xi \omega_i^\xi \boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{u}_i)'_t = \sum_\xi (\omega_i^\xi \boldsymbol{\xi}_{ui})'_t = \sum_\xi (\dot{\omega}_i^\xi \boldsymbol{\xi}_{ui} + \omega_i^\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui}).$$

Для векторного произведения орт ССК(i) будем использовать представление $\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{\eta}_i = = \in_{\xi\eta\zeta} \boldsymbol{\zeta}_i$, где $\in_{\xi\eta\zeta}$ – символ Леви-Чивиты и $\xi, \eta \in \{x, y, z\}$. Если известны сомножители, т. е. значения символов ξ и η, то результат векторного произведения $\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{\eta}_i$ выписывается однозначно. Например, если $\xi = x, \eta = y$, то $\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{y}_i = \in_{xy\zeta} \boldsymbol{\zeta}_i = \in_{xyz} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}_i$ или если $\xi = \eta = y$, то $\boldsymbol{y}_i \times \boldsymbol{y}_i = 0$, так как $\in_{yy\zeta} = 0$, и т. д. [2].

Используя разложение $\boldsymbol{u}_i = \sum_\eta u_{\eta i} \boldsymbol{\eta}_i$ орта $\boldsymbol{u}_i$ по ортам ССК(i), где $u_{\eta i} = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_i$ – const, получим $\boldsymbol{\xi}_{ui} = \boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{\xi}_i \times \sum_\eta u_{\eta i} \boldsymbol{\eta}_i = \sum_\eta \in_{\xi\eta\zeta} u_{\eta i} \boldsymbol{\zeta}_i = u_i^{\xi\zeta} \boldsymbol{\zeta}_i$ где $u_i^{\xi\zeta} = \sum_\eta \in_{\xi\eta\zeta} u_{\eta i}$ – const. Следовательно, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui} = \sum_\xi (\dot{\omega}_i^\xi u_i^{\xi\zeta} \boldsymbol{\zeta}_i + \omega_i^\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui})$. Для вектора $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui}$ получим

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui} = (\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{u}_i)'_t = \sum_\eta u_{\eta i} (\boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{\eta}_i)'_t = \sum_\eta u_{\eta i} (\in_{\xi\eta\zeta} \boldsymbol{\zeta}_i)'_t = \sum_\eta \in_{\xi\eta\zeta} u_{\eta i} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i = u_i^{\xi\zeta} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i =$$
$$= u_i^{\xi\zeta} \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\zeta}_i = u_i^{\xi\zeta} \sum_\nu \omega_i^\nu \boldsymbol{\nu}_i \times \boldsymbol{\zeta}_i = u_i^{\xi\zeta} \sum_\nu \in_{\nu\zeta\mu} \omega_i^\nu \boldsymbol{\mu}_i.$$

Отсюда

$$\sum_\xi \omega_i^\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui} = \sum_\xi \omega_i^\xi u_i^{\xi\zeta} \sum_\nu \in_{\nu\zeta\mu} \omega_i^\nu \boldsymbol{\mu}_i = \sum_\xi \omega_i^\xi \sum_\nu \omega_i^\nu u_i^{\xi\zeta} \in_{\nu\zeta\mu} \boldsymbol{\mu}_i =$$
$$= \sum_\xi \omega_i^\xi \sum_\nu \omega_i^\nu \sum_\eta \in_{\xi\eta\zeta} u_{\eta i} \in_{\nu\zeta\mu} \boldsymbol{\mu}_i.$$

Теперь в правой части последнего выражения развернем все три суммы по ξ, ν и η. Тогда, учитывая значения символов Леви-Чивиты, получим

$$\sum_\xi \omega_i^\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui} = \omega_i^x[\omega_i^x(0 + \in_{xyz} u_{yi} \in_{xzy} \boldsymbol{y}_i + \in_{xzy} u_{zi} \in_{xyz} \boldsymbol{z}_i) + \omega_i^y(0 + \in_{xyz} u_{yi} \in_{yzx} \boldsymbol{x}_i + 0) +$$
$$+ \omega_i^z(0 + 0 + \in_{xzy} u_{zi} \in_{zyx} \boldsymbol{x}_i)] + \omega_i^y[\omega_i^x(\in_{yxz} u_{xi} \in_{xzy} \boldsymbol{y}_i + 0 + 0) + \omega_i^y(\in_{yxz} u_{xi} \in_{yzx} \boldsymbol{x}_i +$$
$$+ 0 + \in_{yzx} u_{zi} \in_{yxz} \boldsymbol{z}_i) + \omega_i^z(0 + 0 + \in_{yzx} u_{zi} \in_{zxy} \boldsymbol{y}_i)] + \omega_i^z[\omega_i^x(\in_{zxy} u_{xi} \in_{xyz} \boldsymbol{z}_i + 0 + 0) +$$
$$+ \omega_i^y(0 + \in_{zyx} u_{yi} \in_{yxz} \boldsymbol{z}_i + 0) + \omega_i^z(\in_{zxy} u_{xi} \in_{zyx} \boldsymbol{x}_i + \in_{zyx} u_{yi} \in_{zxy} \boldsymbol{y}_i) + 0] =$$
$$= \omega_i^x\left[\omega_i^x\left(-u_{yi}\boldsymbol{y}_i - u_{zi}\boldsymbol{z}_i\right) + \omega_i^y u_{yi}\boldsymbol{x}_i + \omega_i^z u_{zi}\boldsymbol{x}_i\right] + \omega_i^y[\omega_i^x u_{xi}\boldsymbol{y}_i + \omega_i^y(-u_{xi}\boldsymbol{x}_i - u_{zi}\boldsymbol{z}_i) +$$
$$+ u_{zi}\boldsymbol{y}_i] + \omega_i^z[\omega_i^x u_{xi}\boldsymbol{z}_i + \omega_i^y u_{yi}\boldsymbol{z}_i + \omega_i^z(-u_{xi}\boldsymbol{x}_i - u_{yi}\boldsymbol{y}_i)].$$

Из последнего выражения после приведения подобных при $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{z}_i$ получим

$$\sum_\xi \omega_i^\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui} = \left[\left(u_{yi}\omega_i^y + u_{zi}\omega_i^z\right)\omega_i^x - u_{xi}\left(\omega_i^{y2} + \omega_i^{z2}\right)\right]\boldsymbol{x}_i +$$
$$+ [(u_{xi}\omega_i^x + u_{zi}\omega_i^z)\omega_i^y - u_{yi}(\omega_i^{x2} + \omega_i^{z2})]\boldsymbol{y}_i + [(u_{xi}\omega_i^x + u_{yi}\omega_i^y)\omega_i^z - u_{zi}(\omega_i^{x2} + \omega_i^{y2})]\boldsymbol{z}_i.$$

Аналогично

$$\sum_\xi \dot{\omega}_i^\xi u_i^{\xi\zeta} \boldsymbol{\zeta}_i = \sum_\xi \dot{\omega}_i^\xi \sum_\eta \in_{\xi\eta\zeta} u_{\eta i} \boldsymbol{\zeta}_i = \dot{\omega}_i^x\left(\in_{xyz} u_{yi}\boldsymbol{z}_i + \in_{xzy} u_{zi}\boldsymbol{y}_i\right) +$$
$$+ \dot{\omega}_i^y\left(\in_{yxz} u_{xi}\boldsymbol{z}_i + \in_{yzx} u_{zi}\boldsymbol{x}_i\right) + \dot{\omega}_i^z\left(\in_{zxy} u_{xi}\boldsymbol{y}_i + \in_{zyx} u_{yi}\boldsymbol{x}_i\right) =$$
$$= \left(u_{zi}\dot{\omega}_i^y - u_{yi}\dot{\omega}_i^z\right)\boldsymbol{x}_i + (u_{xi}\dot{\omega}_i^z - u_{zi}\dot{\omega}_i^x)\boldsymbol{y}_i + \left(u_{yi}\dot{\omega}_i^x - u_{xi}\dot{\omega}_i^y\right)\boldsymbol{z}_i.$$

Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui} = \sum_\xi (\dot{\omega}_i^\xi \boldsymbol{\xi}_{ui} + \omega_i^\xi \dot{\boldsymbol{\xi}}_{ui}) = [u_{zi}\dot{\omega}_i^y - u_{yi}\dot{\omega}_i^z + (u_{yi}\omega_i^y + u_{zi}\omega_i^z)\omega_i^x - u_{xi}(\omega_i^{y2} + \omega_i^{z2})]\boldsymbol{x}_i +$$
$$+ [u_{xi}\dot{\omega}_i^z - u_{zi}\dot{\omega}_i^x + (u_{xi}\omega_i^x + u_{zi}\omega_i^z)\omega_i^y - u_{yi}(\omega_i^{x2} + \omega_i^{z2})]\boldsymbol{y}_i +$$
$$+ \left[u_{yi}\dot{\omega}_i^x - u_{xi}\dot{\omega}_i^y + \left(u_{xi}\omega_i^x + u_{yi}\omega_i^y\right)\omega_i^z - u_{zi}\left(\omega_i^{x2} + \omega_i^{y2}\right)\right]\boldsymbol{z}_i.$$

С учетом введенных обозначений окончательно получим $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui} = \dot{\Omega}_{ui}^x \boldsymbol{x}_i + \dot{\Omega}_{ui}^y \boldsymbol{y}_i + \dot{\Omega}_{ui}^z \boldsymbol{z}_i$, что и требовалось доказать.

1.2. Случаи упрощения формулы (1.1)

Для некоторых классов манипуляторов формула (1.1) принимает наиболее простой вид. Например, если у подсистемы m_j полюса всех тел общие, т. е. совпадают, то $L_i = 0$ для все $i \geq j$ и как показано в п. 2.3 статьи [3]:

$$\dot{\boldsymbol{K}}_{0i} = \sum_\xi (\omega_i^\xi \boldsymbol{I}_i^\xi)_t' = \sum_\xi (\dot{\omega}_i^\xi \boldsymbol{I}_i^\xi + \omega_i^{\xi 2} \boldsymbol{I}_{\xi i}) + \omega_i^x \omega_i^y \boldsymbol{I}_i^{xy} + \omega_i^x \omega_i^z \boldsymbol{I}_i^{xz} + \omega_i^y \omega_i^z \boldsymbol{I}_i^{yz}, \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{I}_{xi} = I_i^{xz}\boldsymbol{y}_i - I_i^{xy}\boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{I}_{yi} = I_i^{xy}\boldsymbol{z}_i - I_i^{yz}\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{I}_{zi} = I_i^{yz}\boldsymbol{x}_i - I_i^{xz}\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{I}_i^{xy} = -I_i^{xz}\boldsymbol{x}_i + I_i^{yz}\boldsymbol{y}_i + (I_i^y - I_i^x)\boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{I}_i^{xz} = I_i^{xy}\boldsymbol{x}_i + (I_i^x - I_i^z)\boldsymbol{y}_i - I_i^{yz}\boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{I}_i^{yz} = (I_i^z - I_i^y)\boldsymbol{x}_i - I_i^{xy}\boldsymbol{y}_i + I_i^{xz}\boldsymbol{z}_i$. Если при этом ССК($i$) для всех i является главной ССК (ГСК(i)), то

$$I_i^{xy} = I_i^{xz} = I_i^{yz} = 0, \boldsymbol{I}_{\xi i} = 0, \boldsymbol{I}_i^\xi = I_i^\xi \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{I}_i^{xy} = I_i^c \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{I}_i^{xz} = I_i^b \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{I}_i^{yz} = I_i^a \boldsymbol{x}_i,$$

где $I_i^a = I_i^z - I_i^y$, $I_i^b = I_i^x - I_i^z$, $I_i^c = I_i^y - I_i^x$, I_i^x, I_i^y, I_i^z – моменты инерции тела m_{oi} относительно главных осей $O_i\boldsymbol{x}_i$, $O_i\boldsymbol{y}_i$, $O_i\boldsymbol{z}_i$, соответственно, и формула (1.4) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{K}}_{0i} = \sum_\xi I_i^\xi (\omega_i^\xi \boldsymbol{\xi}_i)_t' = (I_i^x \dot{\omega}_i^x + I_i^a \omega_i^y \omega_i^z)\boldsymbol{x}_i + (I_i^y \dot{\omega}_i^y + I_i^b \omega_i^x \omega_i^z)\boldsymbol{y}_i + (I_i^z \dot{\omega}_i^z + I_i^c \omega_i^x \omega_i^y)\boldsymbol{z}_i. \tag{1.5}$$

Если $N = 1$, то имеет место тело с неподвижной точкой. Для него из уравнения (1.1) с учетом параметров $j = N = 1$, $L_1 = 0$, $p_1 = 0$ получим $\boldsymbol{M}_1 = \sum_\xi (\omega_1^\xi \boldsymbol{I}_1^\xi)_t' + \boldsymbol{G}_1$, где $\boldsymbol{G}_1 = gb_1\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{y}$. Направим оси ССК(1) вдоль главных осей тела в точке O_1. Тогда, используя формулу (1.5), выпишем

$$\boldsymbol{M}_1 = \sum_\xi I_1^\xi (\omega_1^\xi \boldsymbol{\xi}_1)_t' + \boldsymbol{G}_1 =$$
$$= (I_1^x \dot{\omega}_1^x + I_1^a \omega_1^y \omega_1^z)\boldsymbol{x}_1 + (I_1^y \dot{\omega}_1^y + I_1^b \omega_1^x \omega_1^z)\boldsymbol{y}_1 + (I_1^z \dot{\omega}_1^z + I_1^c \omega_1^x \omega_1^y)\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{G}_1.$$

Отсюда, используя общепринятые обозначения

$$A = I_1^x, B = I_1^y, C = I_1^z,\ p = \omega_1^x,\ q = \omega_1^y, r = \omega_1^z, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1,$$

получим

$$\boldsymbol{M}_1 = [A\dot{p} + (C - B)qr]\boldsymbol{x} + [B\dot{q} + (A - C)pr]\boldsymbol{y} + [C\dot{r} + (B - A)pq]\boldsymbol{z} + \boldsymbol{G}_1,$$

что совпадает с известным видом УД тела с одной закрепленной точкой в поле сил тяжести.

Обозначим через $\boldsymbol{q}_j$ – орт оси вращения тела m_{oj} относительно тела m_{oj-1} вокруг оси $O_j\boldsymbol{q}_j$. Если ССК(i) = ГСК(i) для всех i, то из (1.5) получим

$$\dot{K}_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N \dot{\boldsymbol{K}}_{0i} = \sum_{i=j}^N \sum_\xi \xi_{ij}^q E_i^\xi, \tag{1.6}$$

где $E_i^x = I_i^x \dot{\omega}_i^x + I_i^a \omega_i^y \omega_i^z$, $E_i^y = I_i^y \dot{\omega}_i^y + I_i^b \omega_i^z \omega_i^x$, $E_i^z = I_i^z \dot{\omega}_i^z + I_i^c \omega_i^x \omega_i^y$, $\xi_{ij}^q = \boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{q}_j$. Если при этом полюса всех тел совпадают, то с учетом (1.6) из формулы (1.1) получим

$$M_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{M}_j = \sum_{i=j}^N \sum_\xi \xi_{ij}^q E_i^\xi + G_j, \tag{1.7}$$

где $G_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{G}_j$.

В качестве примера использования формулы (1.7) выпишем УД гироскопа в кардановом подвесе, состоящего из трех твердых тел ($N = 3$) – ротора и двух рамок, шарнирно соединенных между собой. Ротор – это гироскоп, который вращается вокруг своей оси симметрии, установленной в подшипниках, закрепленных на внутренней рамке. Она вращается вокруг оси, неподвижной на внешней рамке, которая вращается вокруг оси, закрепленной в неподвижных подшипниках. Все три тела имеют общую неподвижную точку, называемую точкой подвеса гироскопа. Оси вращения рамок подвеса ортогональны. Оси вращения ротора и внутренней рамки тоже ортогональны. Система находится в поле сил тяжести. ЦМ внешней рамки находится на неподвижной оси ее вращения. ЦМ ротора и внутренней рамки совпадают с точкой подвеса гироскопа [4].

Для рассматриваемого гироскопа орты осей вращения тел выражаются через орты осей ССК тел по формулам $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{z}_3$.

Здесь и далее для поиска выражений НК осей ССК используются табл. 1 и 2 из статьи [3], а также методика выписывания НК по рекуррентным формулам, изложенным в статье [5]. Эти НК можно вывести самостоятельно на основе описания исследуемой системы тел или ее кинематической схемы.

По формуле (1.7) для $i = j = 3$ с учетом равенств $x_{33}^q = x_{33}^z = y_{33}^q = 0$, $z_{33}^q = 1$ выпишем

$$M_3 = E_3^z = I_3^z \dot{\omega}_3^z + I_3^c \omega_3^x \omega_3^y.$$

По формуле (1.7) для $j = 2$ с учетом равенств $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{y}_2$, $x_{22}^y = z_{22}^y = 0$, $y_{22}^y = 1$ выпишем $M_2 = E_2^y + \sum_\xi \xi_{32}^y E_3^\xi$. Так как $\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{z}_3$, из 3-го блока табл. 1 имеем $x_{32}^y = s_3$, $y_{32}^y = c_3$, $z_{32}^y = 0$.

Здесь и далее $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$, q_i – угол поворота тела m_{oi} относительно тела m_{oi-1}. Следовательно,

$M_2 = E_2^y + s_3E_3^x + c_3E_3^y = I_2^y\dot{\omega}_2^y + I_2^b\omega_2^z\omega_2^x + s_3(I_3^x\dot{\omega}_3^x + I_3^c\omega_3^y\omega_3^z) + c_3(I_3^y\dot{\omega}_3^y + I_3^b\omega_3^z\omega_3^x)$.

По формуле (1.7) для $j = 1$ с учетом равенств $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $x_{11}^x = 1$, $y_{11}^x = z_{11}^x = 0$ выпишем $M_1 = E_1^x + \sum_\xi \xi_{21}^x E_2^\xi + \sum_\xi \xi_{31}^x E_3^\xi$. Так как $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{y}_2$, из 2-го блока табл. 1 имеем $x_{21}^x = c_2$, $y_{21}^x = 0$, $z_{21}^x = s_2$. Разложим орты $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{y}_3$, $\boldsymbol{z}_3$ по ортам ССК(2), где коэффициенты при ортах $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{z}_2$ определим из 3-го блока табл. 2. Тогда получим

$\boldsymbol{x}_3 = x_{x3}\boldsymbol{x}_2 + x_{y3}\boldsymbol{y}_2 + x_{z3}\boldsymbol{z}_2 = c_3\boldsymbol{x}_2 + s_3\boldsymbol{y}_2$,

$\boldsymbol{y}_3 = y_{x3}\boldsymbol{x}_2 + y_{y3}\boldsymbol{y}_2 + y_{z3}\boldsymbol{z}_2 = -s_3\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{z}_3 = z_{x3}\boldsymbol{x}_2 + z_{y3}\boldsymbol{y}_2 + z_{z3}\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_2$.

Теперь с учетом НК из 2-го блока табл. 1 получим

$x_{31}^x = \boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{x}_1 = (c_3\boldsymbol{x}_2 + s_3\boldsymbol{y}_2) \cdot \boldsymbol{x}_1 = c_3x_{21}^x + s_3y_{21}^x = c_3c_2$,

$y_{31}^x = \boldsymbol{y}_3 \cdot \boldsymbol{x}_1 = (-s_3\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{y}_2) \cdot \boldsymbol{x}_1 = -s_3x_{21}^x + c_3y_{21}^x = -s_3c_2$,

$z_{31}^x = \boldsymbol{z}_3 \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 = s_2$.

Следовательно, с учетом очевидного равенства $\omega_1^y = \omega_1^z = 0$ получим

$M_1 = E_1^x + c_2E_2^x + s_2E_2^z + x_{31}^xE_3^x + y_{31}^xE_3^y + s_2E_3^z$.

Таким образом, УД рассматриваемого гироскопа имеют вид

$$\begin{cases} I_1^x\dot{\omega}_1^x + I_1^a\omega_1^y\omega_1^z + c_2(I_2^x\dot{\omega}_2^x + I_2^a\omega_2^y\omega_2^z) + s_2(I_2^z\dot{\omega}_2^z + I_2^c\omega_2^x\omega_2^y) + \\ +x_{31}^x\left(I_3^x\dot{\omega}_3^x + I_3^a\omega_3^y\omega_3^z\right) + y_{31}^x\left(I_3^y\dot{\omega}_3^y + I_3^b\omega_3^z\omega_3^x\right) + s_2\left(I_3^z\dot{\omega}_3^z + I_3^c\omega_3^x\omega_3^y\right) = M_1, \\ I_2^y\dot{\omega}_2^y + I_2^b\omega_2^z\omega_2^x + s_3\left(I_3^x\dot{\omega}_3^x + I_3^c\omega_3^y\omega_3^z\right) + c_3\left(I_3^y\dot{\omega}_3^y + I_3^b\omega_3^z\omega_3^x\right) = M_2, \\ I_3^z\dot{\omega}_3^z + I_3^c\omega_3^x\omega_3^y = M_3. \end{cases}$$

К этим уравнениям необходимо добавить формулы вычисления НК x_{31}^x, y_{31}^x и уравнения кинематики, т. е. формулы вычисления квазискоростей и ускорений, которые можно выписать по методикам, изложенным в статье [3].

1.3. Моменты движущих сил манипулятора

Справедлива формула

$$M_j = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \left(d_j^\eta \sum_{i=1}^{j-1} L_i\dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta} + \sum_{i=j}^{N-1} L_i\dot{\Omega}_{ij}^{\eta\zeta}\right) + \dot{K}_j + G_j, \tag{1.8}$$

где $d_j^\eta = \sum_{k=j}^N b_ka_{kj}^\eta$, $\dot{\Omega}_{ij}^{u\zeta} = \sum_\xi \xi_{ij}^\zeta\dot{\Omega}_{ui}^\xi$, $u \in \{e, a\}$, $\dot{\Omega}_{ij}^{\eta\zeta} = d_{ij}^\eta\dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta} + e_{ij}^\eta\dot{\Omega}_{ij}^\zeta$, $\dot{\Omega}_{ij}^\zeta = \sum_{k=i+1}^N b_k\dot{\Omega}_{kj}^{a\zeta}$,

$d_{ij}^\eta = p_ie_{ij}^\eta + \sum_{k=i+1}^N b_ka_{kj}^\eta$, $p_i = L_im_{i+1}$, $a_{kj}^\eta = \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{\eta}_j$,

$\dot{K}_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N \dot{\boldsymbol{K}}_{0i}$, $G_j = g\sum_\eta \in_{q\eta\zeta} d_j^\eta\boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{y}$.

Доказательство формулы (1.8). Используя формулу (1.1), получим

$M_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{m}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} L_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} +$

$+\boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N \left[\dot{\boldsymbol{K}}_{0i} + L_i(p_i\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + b_i\boldsymbol{R}_{ji} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}\right] + \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{G}_j$,

где $\boldsymbol{m}_j = \sum_{k=j}^N b_k\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{R}_{ji} = \sum_{k=j}^{i-1} L_k\boldsymbol{e}_k$, т. е. $M_j = A_j + B_j + C_j + D_j + \dot{K}_j + G_j$, где

$A_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{k=j}^N b_k\boldsymbol{a}_k \times \sum_{i=1}^{j-1} L_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}$, $\dot{K}_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N \dot{\boldsymbol{K}}_{0i}$, $B_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N L_ip_i\boldsymbol{e}_i \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}$,

$C_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N L_i \sum_{k=i+1}^N b_k\boldsymbol{a}_k \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei}$, $D_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N b_i \sum_{k=j}^{i-1} L_k\boldsymbol{e}_k \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}$, $G_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{G}_j$.

Для G_j с учетом разложения $\boldsymbol{a}_k = \sum_\eta a_{kj}^\eta\boldsymbol{\eta}_j$, где $a_{kj}^\eta = \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{\eta}_j$, и представления $\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{a}_k = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} a_{kj}^\eta\boldsymbol{\zeta}_j$ получим

$G_j = g\boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{m}_j \times \boldsymbol{y} = g\boldsymbol{q}_j \times \sum_{k=j}^N b_k\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{y} = g\sum_{k=j}^N b_k\boldsymbol{q}_j \times \sum_\eta a_{kj}^\eta\boldsymbol{\eta}_j \cdot \boldsymbol{y} =$

$= g\sum_{k=j}^N b_k \sum_\eta a_{kj}^\eta \in_{q\eta\zeta} \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{y} = g\sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \sum_{k=j}^N b_ka_{kj}^\eta\zeta_j^y = g\sum_\eta \in_{q\eta\zeta} d_j^\eta\zeta_j^y$,

где $d_j^\eta = \sum_{k=j}^N b_ka_{kj}^\eta$, $\zeta_j^y = \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{y}$.

Для A_j с учетом равенств $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi\boldsymbol{\xi}_i$, $\zeta_{ji}^\xi = \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i$, $\dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta} = \sum_\xi \xi_{ij}^\zeta\dot{\Omega}_{ei}^\xi$ получим

$A_j = \sum_{i=1}^{j-1} L_i \sum_{k=j}^N b_k \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} a_{kj}^\eta\boldsymbol{\zeta}_j \cdot \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi\boldsymbol{\xi}_i = \sum_{i=1}^{j-1} L_i \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \sum_{k=j}^N b_k \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} a_{kj}^\eta\zeta_{ji}^\xi =$

$= \sum_{i=1}^{j-1} L_i \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} d_j^\eta\zeta_{ji}^\xi = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} d_j^\eta \sum_{i=1}^{j-1} L_i \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi\zeta_{ji}^\xi = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} d_j^\eta \sum_{i=1}^{j-1} L_i\dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta}$.

Для B_j с учетом равенств $\boldsymbol{e}_i = \sum_\eta e_{ij}^\eta \boldsymbol{\eta}_j$, $e_{ij}^\eta = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_j$, $\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{\eta}_j = \in_{q\eta\zeta} \boldsymbol{\zeta}_j$ получим

$B_j = \sum_{i=j}^N L_i p_i \boldsymbol{q}_j \times \sum_\eta e_{ij}^\eta \boldsymbol{\eta}_j \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = \sum_{i=j}^N L_i p_i \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{ij}^\eta \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} =$

$= \sum_{i=j}^N L_i p_i \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{ij}^\eta \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \boldsymbol{\xi}_i = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \sum_{i=j}^N L_i p_i \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi e_{ij}^\eta \xi_{ij}^\zeta =$

$= \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \sum_{i=j}^N L_i \sum_\xi p_i e_{ij}^\eta \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ei}^\xi$.

Аналогично для C_j получим

$C_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N L_i \sum_{k=i+1}^N b_k \boldsymbol{a}_k \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = \sum_{i=j}^N L_i \sum_{k=i+1}^N b_k \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} a_{kj}^\eta \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \boldsymbol{\xi}_i =$

$= \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \sum_{i=j}^N L_i \sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \sum_{k=i+1}^N b_k a_{kj}^\eta \zeta_{ji}^\xi = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \sum_{i=j}^N L_i \sum_\xi C_{ij}^\eta \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ei}^\xi$,

$C_{ij}^\eta = \sum_{k=i+1}^N b_k a_{kj}^\eta$.

Для D_j получим

$D_j = \boldsymbol{q}_j \cdot \sum_{i=j}^N b_i \sum_{k=j}^{i-1} L_k \boldsymbol{e}_k \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} = \sum_{i=j}^N b_i \sum_{k=j}^{i-1} L_k \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{kj}^\eta \sum_\xi \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ai}^\xi$.

Используем следующую формулу изменения порядка суммирования

$\sum_{i=j}^N b_i \sum_{k=j}^{i-1} L_k = \sum_{k=j}^{N-1} L_k \sum_{i=k+1}^N b_i$.

Тогда получим $D_j = \sum_{k=j}^{N-1} L_k \sum_{i=k+1}^N b_i \sum_\xi \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{kj}^\eta \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ai}^\xi$. Поменяем местами индексы суммирования k и i. Тогда получим

$D_j = \sum_{i=j}^N L_i \sum_{k=i+1}^N b_k \sum_\xi \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{ij}^\eta \xi_{kj}^\zeta \dot{\Omega}_{ak}^\xi = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \sum_{i=j}^N L_i \sum_\xi e_{ij}^\eta \sum_{k=i+1}^N b_k \xi_{kj}^\zeta \dot{\Omega}_{ak}^\xi$.

Таким образом,

$M_j = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} \left[d_j^\eta \sum_{i=1}^{j-1} L_i \dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta} + \sum_{i=j}^N L_i \sum_\xi \left(p_i e_{ij}^\eta \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ei}^\xi + C_{ij}^\eta \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ei}^\xi + e_{ij}^\eta \sum_{k=i+1}^N b_k \xi_{kj}^\zeta \dot{\Omega}_{ak}^\xi \right) \right] +$

$+ \dot{K}_j + G_j = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} [d_j^\eta \sum_{i=1}^{j-1} L_i \dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta} + \sum_{i=j}^N L_i ((p_i e_{ij}^\eta + C_{ij}^\eta) \sum_\xi \xi_{ij}^\zeta \dot{\Omega}_{ei}^\xi +$

$+ e_{ij}^\eta \sum_{k=i+1}^N b_k \sum_\xi \xi_{kj}^\zeta \dot{\Omega}_{ak}^\xi)] + \dot{K}_j + G_j$.

Отсюда, используя обозначения $\dot{\Omega}_{kj}^{a\zeta} = \sum_\xi \xi_{kj}^\zeta \dot{\Omega}_{ak}^\xi$, $\dot{\Omega}_{ij}^\zeta = \sum_{k=i+1}^N b_k \dot{\Omega}_{kj}^{a\zeta}$, $\dot{\Omega}_{ij}^{\eta\zeta} = d_{ij}^\eta \dot{\Omega}_{ij}^{e\zeta} + e_{ij}^\eta \dot{\Omega}_{ij}^\zeta$ и равенства $p_N = 0$, $C_{Nj}^\eta = 0$, получим искомую формулу (1.8).

1.4. Рекуррентная формула вычисления моментов сил в сочленениях

Формулу (1.1) можно представить в следующем рекуррентном виде:

$$\boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{M}_{j+1} + \dot{\boldsymbol{K}}_{0j} + \boldsymbol{a}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + L_j p_j \boldsymbol{e}_j \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} + \boldsymbol{e}_j \times \sum_{i=j+1}^N L_{ji} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} + g b_j \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{y}, \quad (1.9)$$

где $j = N, N-1, \ldots, 1$; $\boldsymbol{M}_N = \dot{\boldsymbol{K}}_{0N} + \boldsymbol{a}_N \times \sum_{i=1}^{N-1} L_{iN} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + g b_N \boldsymbol{a}_N \times \boldsymbol{y}$; $L_{ij} = L_i b_j$.

Доказательство формулы (1.9). Используя очевидные равенства

$\boldsymbol{m}_j = \sum_{k=j}^N b_k \boldsymbol{a}_k = b_j \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{m}_{j+1}$, $\boldsymbol{R}_{ji} = \boldsymbol{O}_j \boldsymbol{O}_i = \boldsymbol{O}_j \boldsymbol{O}_{j+1} + \boldsymbol{O}_{j+1} \boldsymbol{O}_i = \boldsymbol{R}_{j+1} + \boldsymbol{R}_{j+1,i}$,

$\boldsymbol{G}_j = g \boldsymbol{m}_j \times \boldsymbol{y} = g(b_j \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{m}_{j+1}) \times \boldsymbol{y} = g b_j \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}_{j+1}$,

из формулы (1.1) получим

$\boldsymbol{M}_j = (b_j \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{m}_{j+1}) \times (\sum_{i=1}^j L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} - L_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej}) + \dot{\boldsymbol{K}}_{0j} + L_j (p_j \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{m}_{j+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} +$

$+ \sum_{i=j+1}^N [\dot{\boldsymbol{K}}_{0i} + L_i (p_i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{m}_{i+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + b_i (\boldsymbol{R}_{j+1} + \boldsymbol{R}_{j+1,i}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}] + g b_j \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}_{j+1}$.

Выделим в последнем выражении слагаемые из формулы вычисления $\boldsymbol{M}_{j+1}$. Тогда получим

$\boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{M}_{j+1} + b_j \boldsymbol{a}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} - L_j \boldsymbol{m}_{j+1} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} + \dot{\boldsymbol{K}}_{0j} +$

$+ L_j (p_j \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{m}_{j+1}) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} + \boldsymbol{R}_{j+1} \times \sum_{i=j+1}^N b_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} + g b_j \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{y} =$

$= \boldsymbol{M}_{j+1} + b_j \boldsymbol{a}_j \times \sum_{i=1}^{j-1} L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + \dot{\boldsymbol{K}}_{0j} + L_j p_j \boldsymbol{e}_j \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} + L_j \boldsymbol{e}_j \times \sum_{i=j+1}^N b_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} + g b_j \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{y}$.

Отсюда следует искомое представление (1.9), из которого для $j = N$ с учетом равенств $\boldsymbol{M}_{N+1} = 0$, $p_N = 0$ получим формулу вычисления $\boldsymbol{M}_N$. Формула (1.9) доказана.

Проекция M_{qj} момента силы $\boldsymbol{M}_j$ на ось $O_j \boldsymbol{q}_j$, где $q \in \{x, y, z\}$, выражается через квазискорости и квазиускорения по формуле

$M_{qj} = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{M}_{j+1} + \boldsymbol{q}_j \cdot \dot{\boldsymbol{K}}_{0j} + \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij} [\sum_\xi \left(q_{eji}^\xi \dot{\omega}_i^\xi - Q_{\xi ji}^e \omega_i^{\xi 2} \right) +$

$+ q_{eji}^{xy} \omega_i^x \omega_i^y + q_{eji}^{xz} \omega_i^x \omega_i^z + q_{eji}^{yz} \omega_i^y \omega_i^z] + L_j p_j \sum_\xi \in_{q\xi\zeta} e_{\xi j} \dot{\Omega}_{ej}^\zeta +$

$$+ \sum_{i=j+1}^N L_{ji} [\sum_\xi (q_{aji}^\xi \dot{\omega}_i^\xi - Q_{\xi ji}^a \omega_i^{\xi 2}) + q_{aji}^{xy} \omega_i^x \omega_i^y + q_{aji}^{xz} \omega_i^x \omega_i^z + q_{aji}^{yz} \omega_i^y \omega_i^z] + G_{qj}, \quad (1.10)$$

где $j = N, N-1, \ldots, 1$; $\boldsymbol{M}_{N+1} = 0$; $G_{qj} = gb_j \sum_\xi \in_{q\xi\zeta} a_{\xi j}\zeta_j^y$;

$q_{uji}^x = u_{yi}q_{ji}^{uz} - u_{zi}q_{ji}^{uy}$, $q_{uji}^y = u_{zi}q_{ji}^{ux} - u_{xi}q_{ji}^{uz}$, $q_{uji}^z = u_{xi}q_{ji}^{uy} - u_{yi}q_{ji}^{ux}$, $e_{\xi j} = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_j$,

$Q_{xji}^u = u_{yi}q_{ji}^{uy} + u_{zi}q_{ji}^{uz}$, $Q_{yji}^u = u_{xi}q_{ji}^{ux} + u_{zi}q_{ji}^{uz}$, $Q_{zji}^u = u_{xi}q_{ji}^{ux} + u_{yi}q_{ji}^{uy}$, $a_{\xi j} = \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_j$,

$q_{uji}^{xy} = u_{yi}q_{ji}^{ux} + u_{xi}q_{ji}^{uy}$, $q_{uji}^{xz} = u_{xi}q_{ji}^{uz} + u_{zi}q_{ji}^{ux}$, $q_{uji}^{yz} = u_{yi}q_{ji}^{uz} + u_{zi}q_{ji}^{uy}$, $\zeta_j^y = \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{y}$,

$q_{ji}^{u\xi} = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} u_{\eta j}^{-}\zeta_{ji}^{\xi}$,

где $u \in \{e, a\}$и если $u = e$, то $u^- = a$, если $u = a$, то $u^- = e$; $\zeta_{ji}^\xi = \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i$.

Доказательство формулы (1.10). Из формулы (1.9) получим

$$M_{qj} = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{M}_{j+1} + \boldsymbol{q}_j \cdot \dot{\boldsymbol{K}}_j + \boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{a}_j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} + \boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} + \\ + L_j p_j \boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} + gb_j \boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{y}. \quad (1.11)$$

С учетом разложения $\boldsymbol{u}_j = \sum_\eta u_{\eta j}\boldsymbol{\eta}_j$, где $u_{\eta j} = \boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_j$ – const, $u \in \{e, a\}$ получим

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{q}_j \times \sum_\eta u_{\eta j}\boldsymbol{\eta}_j = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} u_{\eta j}\boldsymbol{\zeta}_j.$$

Используя обозначения $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ui} = \sum_\xi \dot{\Omega}_{ui}^\xi \boldsymbol{\xi}_i$, $\zeta_{ji}^\xi = \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i$, получим

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{a}_j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} a_{\eta j}\boldsymbol{\zeta}_j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \boldsymbol{\xi}_i = \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\sum_\xi \dot{\Omega}_{ei}^\xi \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} a_{\eta j}\zeta_{ji}^\xi,$$

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{\eta j}\boldsymbol{\zeta}_j \cdot \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\sum_\xi \dot{\Omega}_{ai}^\xi \boldsymbol{\xi}_i = \\ = \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\sum_\xi \dot{\Omega}_{ai}^\xi \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{\eta j}\zeta_{ji}^\xi.$$

Введем обозначение $q_{ji}^{u\xi} = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} u_{\eta j}^{-}\zeta_{ji}^\xi$. Здесь если в обозначении $q_{ji}^{u\xi}$ символ $u = a$, то множитель в правой части $u_{\eta j}^{-} = e_{\eta j}$. Иначе если в левой части $u = e$, то в правой части $u_{\eta j}^{-} = a_{\eta j}$. Теперь получим

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{a}_j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\sum_\xi q_{ji}^{e\xi}\dot{\Omega}_{ei}^\xi, \boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} = \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\sum_\xi q_{ji}^{a\xi}\dot{\Omega}_{ai}^\xi.$$

Раскроем сумму по $\xi \in \{x, y, z\}$ в выражении $\sum_\xi q_{ji}^{u\xi}\dot{\Omega}_{ui}^\xi$. Тогда, с учетом формул вычисления $\dot{\Omega}_{ui}^x$, $\dot{\Omega}_{ui}^y$, $\dot{\Omega}_{ui}^z$, получим

$$\sum_\xi q_{ji}^{u\xi}\dot{\Omega}_{ui}^\xi = q_{ji}^{ux}\left[u_{zi}\dot{\omega}_i^y - u_{yi}\dot{\omega}_i^z + \left(u_{yi}\omega_i^y + u_{zi}\omega_i^z\right)\omega_i^x - u_{xi}\left(\omega_i^{y2} + \omega_i^{z2}\right)\right] + \\ + q_{ji}^{uy}\left[u_{xi}\dot{\omega}_i^z - u_{zi}\dot{\omega}_i^x + (u_{xi}\omega_i^x + u_{zi}\omega_i^z)\omega_i^y - u_{yi}\left(\omega_i^{x2} + \omega_i^{z2}\right)\right] + \\ + q_{ji}^{uz}[u_{yi}\dot{\omega}_i^x - u_{xi}\dot{\omega}_i^y + (u_{xi}\omega_i^x + u_{yi}\omega_i^y)\omega_i^z - u_{zi}(\omega_i^{x2} + \omega_i^{y2})].$$

Приведем подобные при квазиускорениях, квадратах квазискоростей и произведениях разноименных квазискоростей. Тогда получим

$$\sum_\xi q_{ji}^{u\xi}\dot{\Omega}_{ui}^\xi = \left(u_{yi}q_{ji}^{uz} - u_{zi}q_{ji}^{uy}\right)\dot{\omega}_i^x + \left(u_{zi}q_{ji}^{ux} - u_{xi}q_{ji}^{uz}\right)\dot{\omega}_i^y + \left(u_{xi}q_{ji}^{uy} - u_{yi}q_{ji}^{ux}\right)\dot{\omega}_i^z - \\ - \left(u_{yi}q_{ji}^{uy} + u_{zi}q_{ji}^{uz}\right)\omega_i^{x2} - \left(u_{xi}q_{ji}^{ux} + u_{zi}q_{ji}^{uz}\right)\omega_i^{y2} - \left(u_{xi}q_{ji}^{ux} + u_{yi}q_{ji}^{uy}\right)\omega_i^{z2} + \\ + (u_{yi}q_{ji}^{ux} + u_{xi}q_{ji}^{uy})\omega_i^x\omega_i^y + (u_{xi}q_{ji}^{uz} + u_{zi}q_{ji}^{ux})\omega_i^x\omega_i^z + (u_{yi}q_{ji}^{uz} + u_{zi}q_{ji}^{uy})\omega_i^y\omega_i^z.$$

Следовательно, с учетом введенных обозначений q_{uji}^ξ, $q_{\xi ji}^u$, q_{uji}^{xy}, q_{uji}^{xz}, q_{uji}^{yz} получим

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{a}_j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ei} = \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}(q_{eji}^x\dot{\omega}_i^x + q_{eji}^y\dot{\omega}_i^y + q_{eji}^z\dot{\omega}_i^z - q_{xji}^e\omega_i^{x2} - \\ - q_{yji}^e\omega_i^{y2} - q_{zji}^e\omega_i^{z2} + + q_{eji}^{xy}\omega_i^x\omega_i^y + q_{eji}^{xz}\omega_i^x\omega_i^z + q_{eji}^{yz}\omega_i^y\omega_i^z), \quad (1.12)$$

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} = \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}(q_{aji}^x\dot{\omega}_i^x + q_{aji}^y\dot{\omega}_i^y + q_{aji}^z\dot{\omega}_i^z - q_{xji}^a\omega_i^{x2} - \\ - q_{yji}^a\omega_i^{y2} - q_{zji}^a\omega_i^{z2} + + q_{aji}^{xy}\omega_i^x\omega_i^y + q_{aji}^{xz}\omega_i^x\omega_i^z + q_{aji}^{yz}\omega_i^y\omega_i^z) . \quad (1.13)$$

Выразим формулу $\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej}$ через квазискорости и ускорения. Получим

$$\boldsymbol{q}_j \times \boldsymbol{e}_j \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ej} = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{\eta j}\boldsymbol{\zeta}_j \cdot \sum_\xi \dot{\Omega}_{ej}^\xi \boldsymbol{\xi}_j = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{\eta j}\sum_\xi \dot{\Omega}_{ej}^\xi \boldsymbol{\zeta}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_j = \sum_\eta \in_{q\eta\zeta} e_{\eta j}\dot{\Omega}_{ej}^\zeta.$$

Теперь, подставив формулы (1.12), (1.13) и последнее выражение в (1.11), получим искомую формулу (1.10), которую можно записать в виде

$$M_{qj} = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{M}_{j+1} + \boldsymbol{q}_j \cdot \dot{\boldsymbol{K}}_{0j} + \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\sum_\xi q_{ji}^{e\xi}\dot{\Omega}_{ei}^\xi + L_j p_j \sum_\xi \in_{q\xi\zeta} e_{\xi j}\dot{\Omega}_{ej}^\zeta + \\ + \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}\sum_\xi q_{ji}^{a\xi}\dot{\Omega}_{ai}^\xi + G_{qj}. \quad (1.14)$$

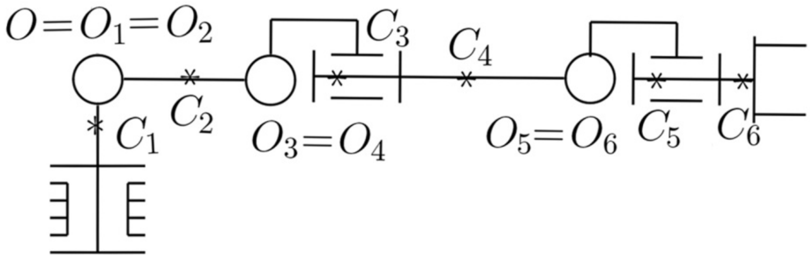
2. Примеры выписывания УД манипуляторов

Рассмотрим ангулярные манипуляторы.

2.1. Выписывание УД ангулярного манипулятора на рисунке

Из схемы манипулятора на рисунке видно

$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{q}_4=\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{q}_5=\boldsymbol{z}_5=\boldsymbol{z}_4$, $\boldsymbol{q}_6=\boldsymbol{x}_6=\boldsymbol{x}_5$,
$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{x}_i$, $i=2,3,\dots,6$, $L_1=L_3=L_5=0$, $p_1=p_3=p_5=0$.



Манипулятор с ангулярной системой координат
Manipulator with angular CS

По формуле (1.8) для $j=6$, $\boldsymbol{q}_6=\boldsymbol{x}_6$ выпишем $M_6=\sum_\eta \in_{x\eta\zeta} d_6^\eta(L_2\dot\Omega_{26}^{e\zeta}+L_4\dot\Omega_{46}^{e\zeta})+\dot K_6++G_6$, где $d_6^y=b_6a_{66}^y=0$, $d_6^z=b_6a_{66}^z=0$, $G_6=g\sum_\eta \in_{x\eta\zeta} d_6^\eta\zeta_6^y=0$, т. е. $M_6=\dot K_6$. Для сокращения записей будем считать, что ССК(i)=ГСК(i) и $I_i^y=I_i^z$ для всех i. Тогда $I_i^a=0$, $I_i^c=I_i^b$ и $\dot K_j$ можно выписать по формуле (1.6), где

$E_i^x=I_i^x\dot\omega_i^x$, $E_i^y=I_i^z\dot\omega_i^y+I_i^b\omega_i^z\omega_i^x$, $E_i^z=I_i^z\dot\omega_i^z-I_i^b\omega_i^x\omega_i^y$, $I_i^b=I_i^x-I_i^z$, $\xi_{ij}^q=\boldsymbol{\xi}_i\cdot\boldsymbol{q}_j$.

По формуле (1.6) с учетом равенств $x_{66}^x=1, y_{66}^x=z_{66}^x=0$ выпишем $\dot K_6=I_6^x\dot\omega_6^x$. Следовательно, $M_6=I_6^x\dot\omega_6^x$.

По формуле (1.8) для $j=5$, $\boldsymbol{q}_5=\boldsymbol{z}_5$ выпишем

$M_5=\sum_\eta \in_{z\eta\zeta} d_5^\eta(L_2\dot\Omega_{25}^{e\zeta}+L_4\dot\Omega_{45}^{e\zeta})+\dot K_5+G_5$,

где $d_5^x=b_5a_{55}^x+b_6a_{65}^x=b_5+b_6$, $d_5^y=0$, $G_5=g\sum_\eta \in_{z\eta\zeta} d_5^\eta\zeta_5^y=g\in_{zxy} d_5^xy_5^y=gd_5^xy_5^y$.

$\dot\Omega_{25}^{ey}=\sum_\xi \xi_{25}^y\dot\Omega_{e2}^\xi=\sum_\xi y_{52}^\xi\dot\Omega_{x2}^\xi$, $\dot\Omega_{45}^{ey}=\sum_\xi \xi_{45}^y\dot\Omega_{e4}^\xi=-s_5\dot\Omega_{x4}^x+c_5\dot\Omega_{x4}^y$.

Теперь по формуле (1.6) с учетом равенств $x_{55}^z=y_{55}^z=0$, $z_{55}^z=1$, $x_{65}^z=0$, $y_{65}^z=s_6$, $z_{65}^z=c_6$ выпишем

$\dot K_5=\sum_{i=5}^6\sum_\xi \xi_{i5}^qE_i^\xi=\sum_\xi(\xi_{55}^zE_5^\xi+\xi_{65}^zE_6^\xi)=E_5^z+s_6E_6^y+c_6E_6^z$.

Следовательно,

$M_5=d_5^x(L_2\dot\Omega_{25}^{ey}+L_4\dot\Omega_{45}^{ey})+\dot K_5+G_5=$
$=d_5^x[L_2(y_{52}^x\dot\Omega_{x2}^x+y_{52}^y\dot\Omega_{x2}^y+y_{52}^z\dot\Omega_{x2}^z)+L_4(-s_5\dot\Omega_{x4}^x+c_5\dot\Omega_{x4}^y)]+\dot K_5+gd_5^xy_5^y$.

где $\dot\Omega_{x2}^x=x_{z2}\dot\omega_2^y-x_{y2}\dot\omega_2^z+(x_{y2}\omega_2^y+x_{z2}\omega_2^z)\omega_2^x-x_{x2}(\omega_2^{y2}+\omega_2^{z2})=-\omega_2^{y2}-\omega_2^{z2}$,
$\dot\Omega_{x2}^y=x_{x2}\dot\omega_2^z-x_{z2}\dot\omega_2^x+(x_{x2}\omega_2^x+x_{z2}\omega_2^z)\omega_2^y-x_{y2}(\omega_2^{x2}+\omega_2^{z2})=\dot\omega_2^z+\omega_2^x\omega_2^y$,
$\dot\Omega_{x2}^z=x_{y2}\dot\omega_2^x-x_{x2}\dot\omega_2^y+(x_{x2}\omega_2^x+x_{y2}\omega_2^y)\omega_2^z-x_{z2}(\omega_2^{x2}+\omega_2^{y2})=-\dot\omega_2^y+\omega_2^x\omega_2^z$,
$\dot\Omega_{x4}^x=-\omega_4^{y2}-\omega_4^{z2}$, $\dot\Omega_{x4}^y=\dot\omega_4^z+\omega_4^x\omega_4^y$.

По формуле (1.8) для $j=4$, $\boldsymbol{q}_4=\boldsymbol{x}_5$ выпишем

$M_4=\sum_\eta \in_{x\eta\zeta}(d_4^\eta L_2\dot\Omega_{24}^{e\zeta}+L_4\dot\Omega_{44}^{\eta\zeta})+\dot K_4+G_4$,

где $d_4^y=b_4a_{44}^y+b_5a_{54}^y+b_6a_{64}^y=(b_5+b_6)a_{54}^y=d_5^xs_5$, $d_4^z=b_4a_{44}^z+b_5a_{54}^z+b_6a_{64}^z=0$,
$G_4=g\sum_\eta \in_{x\eta\zeta} d_4^\eta\zeta_4^y=g\in_{xyz} d_4^yz_4^y=gd_4^yz_4^y=-gd_4^yc_{23}s_4$, $c_{23}=\cos(q_2+q_3)$,
$\dot K_4=\sum_{i=4}^6\sum_\xi \xi_{i4}^xE_i^\xi=\sum_\xi\left(\xi_{44}^xE_4^\xi+\xi_{54}^xE_5^\xi+\xi_{64}^xE_6^\xi\right)=$
$=E_4^x+c_5E_5^x-s_5E_5^y+c_5E_6^x+y_{64}^xE_6^y+z_{64}^xE_6^z$, $y_{64}^x=-s_5c_6$, $z_{64}^x=s_5s_6$.

Следовательно, $M_4=d_4^yL_2\dot\Omega_{24}^{ez}+L_4(\dot\Omega_{44}^{yz}-\dot\Omega_{44}^{zy})+\dot K_4+G_4$, где

$\dot\Omega_{24}^{ez}=\sum_\xi \xi_{24}^z\dot\Omega_{e2}^\xi=\sum_\xi z_{42}^\xi\dot\Omega_{e2}^\xi=z_{42}^x\dot\Omega_{e2}^x+z_{42}^y\dot\Omega_{e2}^y+c_4\dot\Omega_{e2}^z=s_3s_4\dot\Omega_{e2}^x-c_3s_4\dot\Omega_{e2}^y+c_4\dot\Omega_{e2}^z$,

$\dot{\Omega}_{44}^{yz}-\dot{\Omega}_{44}^{zy}=d_{44}^{y}\dot{\Omega}_{44}^{ez}+e_{44}^{y}\dot{\Omega}_{44}^{z}-d_{44}^{z}\dot{\Omega}_{44}^{ey}-e_{44}^{z}\dot{\Omega}_{44}^{y}=d_{4}^{y}\sum_{\xi}\xi_{44}^{z}\dot{\Omega}_{ei}^{\xi}=d_{4}^{y}\dot{\Omega}_{e4}^{z}$,

так как $d_{44}^{y}=p_4e_{44}^{y}+b_5a_{54}^{y}+b_6a_{64}^{y}=d_4^y$, $e_{44}^{y}=0$, $d_{44}^{z}=0$, $e_{44}^{z}=0$. Теперь

$M_4=d_4^y[L_2(s_3s_4\dot{\Omega}_{e2}^{x}-c_3s_4\dot{\Omega}_{e2}^{y}+c_4\dot{\Omega}_{e2}^{z})+L_4\dot{\Omega}_{e4}^{z}]+\dot{K}_4+G_4$,

где $\dot{\Omega}_{e2}^{x}=\dot{\Omega}_{x2}^{x}$, $\dot{\Omega}_{e2}^{y}=\dot{\Omega}_{x2}^{y}$, $\dot{\Omega}_{e2}^{z}=\dot{\Omega}_{x2}^{z}$,

$\dot{\Omega}_{e4}^{z}=x_{y4}\dot{\omega}_4^x-x_{x4}\dot{\omega}_4^y+(x_{x4}\omega_4^x+x_{y4}\omega_4^y)\omega_4^z-x_{z4}(\omega_4^{x2}+\omega_4^{y2})=-\dot{\omega}_4^y+\omega_4^x\omega_4^z$.

Далее аналогично по формуле (1.8) для $j=3$, $\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{z}_3$ выпишем:

$M_3=\sum_{\eta}\in_{z\eta\zeta}(d_3^{\eta}L_2\dot{\Omega}_{23}^{e\zeta}+L_4\dot{\Omega}_{43}^{\eta\zeta})+\dot{K}_3+G_3$, $y_{31}^{y}=c_{23}$, $x_{31}^{y}=s_{23}$, $s_{23}=\sin(q_2+q_3)$,

$G_3=g\sum_{\eta}\in_{z\eta\zeta}d_3^{\eta}\zeta_3^{y}=g(\in_{zxy}d_3^xy_3^y+\in_{zyx}d_3^yx_3^y)=g(d_3^xy_{31}^y-d_3^yx_{31}^y)=g(d_3^xc_{23}-d_3^ys_{23})$,

$d_3^x=\sum_{k=3}^{6}b_ka_{k3}^{x}=b_3+b_4+(b_5+b_6)c_5=b_3+b_4+d_5^xc_5$, $b_3=m_{o3}O_3C_3$,

$d_3^y=\sum_{k=3}^{6}b_ka_{k3}^{y}=(b_5+b_6)a_{53}^{y}=d_5^xx_{53}^{y}=d_5^xc_4s_5$, $b_4=m_{o4}O_4C_4+m_5L_4$,

$x_{43}^{z}=0$, $y_{43}^{z}=s_4$, $z_{43}^{z}=c_4$, $x_{53}^{z}=s_4s_5$, $y_{53}^{z}=s_4c_5$, $z_{53}^{z}=c_4$, $x_{63}^{z}=x_{53}^{z}$,

$\boldsymbol{y}_6=c_6\boldsymbol{y}_5+s_6\boldsymbol{z}_5$, $\boldsymbol{z}_6=c_6\boldsymbol{z}_5-s_6\boldsymbol{y}_5$, $y_{63}^{z}=c_6y_{53}^{z}+s_6z_{53}^{z}$, $z_{63}^{z}=c_6z_{53}^{z}-s_6y_{53}^{z}$,

$\dot{K}_3=\sum_{i=3}^{6}\sum_{\xi}\xi_{i3}^{z}E_i^{\xi}=\sum_{\xi}\left(\xi_{33}^{z}E_3^{\xi}+s_4E_4^{\xi}+c_4E_5^{\xi}+\xi_{63}^{z}E_6^{\xi}\right)=$

$=E_3^z+y_{43}^{z}E_4^y+z_{43}^{z}E_4^z+\sum_{\xi}(\xi_{53}^{z}E_5^{\xi}+\xi_{63}^{z}E_6^{\xi})$,

$\dot{\Omega}_{23}^{ex}=\sum_{\xi}\xi_{23}^{x}\dot{\Omega}_{e2}^{\xi}=\sum_{\xi}x_{32}^{\xi}\dot{\Omega}_{e2}^{\xi}=x_{32}^{x}\dot{\Omega}_{e2}^{x}+x_{32}^{y}\dot{\Omega}_{e2}^{y}=c_3\dot{\Omega}_{e2}^{x}+s_3\dot{\Omega}_{e2}^{y}$,

$\dot{\Omega}_{23}^{ey}=\sum_{\xi}\xi_{23}^{y}\dot{\Omega}_{e2}^{\xi}=\sum_{\xi}y_{32}^{\xi}\dot{\Omega}_{e2}^{\xi}=y_{32}^{x}\dot{\Omega}_{e2}^{x}+y_{32}^{y}\dot{\Omega}_{e2}^{y}=-s_3\dot{\Omega}_{e2}^{x}+c_3\dot{\Omega}_{e2}^{y}$, $e_{43}^{x}=x_{43}^{x}=1$,

$e_{43}^{y}=0$, $d_{43}^{x}=p_4e_{43}^{x}+b_5a_{53}^{x}+b_6a_{63}^{x}=p_4+(b_5+b_6)x_{54}^{x}=p_4+d_5^xc_5$, $d_{43}^{y}=d_5^xs_5$,

$\dot{\Omega}_{43}^{xy}-\dot{\Omega}_{43}^{yx}=d_{43}^{x}\dot{\Omega}_{43}^{ey}+e_{43}^{x}\dot{\Omega}_{43}^{y}-d_{43}^{y}\dot{\Omega}_{43}^{ex}-e_{43}^{y}\dot{\Omega}_{43}^{x}=(p_4+d_5^xc_5)\dot{\Omega}_{43}^{ey}+\dot{\Omega}_{43}^{y}-d_5^xs_5\dot{\Omega}_{43}^{ex}$,

$\dot{\Omega}_{43}^{ex}=\sum_{\xi}\xi_{43}^{x}\dot{\Omega}_{e4}^{\xi}=x_{43}^{x}\dot{\Omega}_{e4}^{x}+y_{43}^{x}\dot{\Omega}_{e4}^{y}+z_{43}^{x}\dot{\Omega}_{e4}^{z}=\dot{\Omega}_{e4}^{x}$,

$\dot{\Omega}_{43}^{ey}=\sum_{\xi}\xi_{43}^{y}\dot{\Omega}_{e4}^{\xi}=x_{43}^{y}\dot{\Omega}_{e4}^{x}+y_{43}^{y}\dot{\Omega}_{e4}^{y}+z_{43}^{y}\dot{\Omega}_{e4}^{z}=c_4\dot{\Omega}_{e4}^{y}-s_4\dot{\Omega}_{e4}^{z}$,

$\dot{\Omega}_{43}^{y}=\sum_{k=5}^{6}b_k\dot{\Omega}_{k3}^{ay}=b_5\dot{\Omega}_{53}^{ay}+b_6\dot{\Omega}_{63}^{ay}=b_5\sum_{\xi}\xi_{53}^{y}\dot{\Omega}_{a5}^{\xi}+b_6\sum_{\xi}\xi_{63}^{y}\dot{\Omega}_{a6}^{\xi}$,

$\dot{\Omega}_{43}^{xy}-\dot{\Omega}_{43}^{yx}=(p_4+d_5^xc_5)(c_4\dot{\Omega}_{e4}^{y}-s_4\dot{\Omega}_{e4}^{z})+b_5\sum_{\xi}\xi_{53}^{y}\dot{\Omega}_{a5}^{\xi}+b_6\sum_{\xi}\xi_{63}^{y}\dot{\Omega}_{a6}^{\xi}-d_5^xs_5\dot{\Omega}_{e4}^{x}$.

Следовательно,

$M_3=L_2[d_3^x(-s_3\dot{\Omega}_{e2}^{x}+c_3\dot{\Omega}_{e2}^{y})-d_3^y(c_3\dot{\Omega}_{e2}^{x}+s_3\dot{\Omega}_{e2}^{y})]+L_4(\dot{\Omega}_{43}^{xy}-\dot{\Omega}_{43}^{yx})+\dot{K}_3+G_3=$

$=L_2[-(d_3^xs_3+d_3^yc_3)\dot{\Omega}_{e2}^{x}+(d_3^xc_3-d_3^ys_3)\dot{\Omega}_{e2}^{y}]+L_4[(p_4+d_5^xc_5)(c_4\dot{\Omega}_{e4}^{y}-s_4\dot{\Omega}_{e4}^{z})+$

$+b_5\sum_{\xi}\xi_{53}^{y}\dot{\Omega}_{a5}^{\xi}+b_6\sum_{\xi}\xi_{63}^{y}\dot{\Omega}_{a6}^{\xi}-d_5^xs_5\dot{\Omega}_{e4}^{x}]+\dot{K}_3+G_3$.

Так как $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{z}_2$, то движущий момент силы M_2 выпишем по формуле (1.10), т. е.

$M_{q2}=M_2=M_3+\boldsymbol{z}_2\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{02}+L_2p_2\sum_{\xi}\in_{z\xi\zeta}e_{\xi2}\dot{\Omega}_{e2}^{\zeta}+$

$+\sum_{i=3}^{6}L_{2i}[\sum_{\xi}(q_{a2i}^{\xi}\dot{\omega}_i^{\xi}-Q_{\xi2i}^{a}\omega_i^{\xi2})+q_{a2i}^{xy}\omega_i^x\omega_i^y+q_{a2i}^{xz}\omega_i^x\omega_i^z+q_{a2i}^{yz}\omega_i^y\omega_i^z]+G_{q2}$,

где $G_{q2}=gb_2\sum_{\xi}\in_{z\xi\zeta}a_{\xi2}\zeta_2^{y}=gb_2(a_{x2}y_2^y-a_{y2}x_2^y)=gb_2y_{21}^{y}=gb_2c_2$,

$\sum_{\xi}\in_{z\xi\zeta}e_{\xi2}\dot{\Omega}_{e2}^{\zeta}=\in_{zxy}e_{x2}\dot{\Omega}_{e2}^{y}=\dot{\Omega}_{x2}^{y}$, $q_{a2i}^{x}=a_{yi}q_{2i}^{az}-a_{zi}q_{2i}^{ay}=0$,

$q_{a2i}^{y}=a_{zi}q_{2i}^{ax}-a_{xi}q_{2i}^{az}=-q_{2i}^{az}$,

$q_{a2i}^{z}=q_{2i}^{ay}$, $Q_{x2i}^{a}=0$, $Q_{y2i}^{a}=q_{2i}^{ax}$, $Q_{z2i}^{a}=q_{2i}^{ax}$, $q_{a2i}^{xy}=q_{2i}^{ay}$, $q_{a2i}^{xz}=q_{2i}^{az}$, $q_{a2i}^{yz}=0$.

Следовательно,

$M_2=M_3+\boldsymbol{z}_2\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{02}+L_2p_2\dot{\Omega}_{x2}^{y}+$

$+\sum_{i=3}^{6}L_{2i}(q_{2i}^{ay}\dot{\omega}_i^{z}-q_{2i}^{az}\dot{\omega}_i^{y}-q_{2i}^{ax}\omega_i^{y2}-q_{2i}^{ax}\omega_i^{z2}+q_{2i}^{ay}\omega_i^x\omega_i^y+q_{2i}^{az}\omega_i^x\omega_i^z)+G_{q2}$,

где по формуле (1.5) выпишем $\boldsymbol{z}_2\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{02}=E_2^z$ и

$q_{2i}^{ax}=\sum_{\eta}\in_{z\eta\zeta}e_{\eta2}\zeta_{2i}^{x}=\in_{zxy}e_{x2}y_{2i}^{x}+\in_{zyx}e_{y2}x_{2i}^{x}=y_{2i}^{x}=x_{i2}^{y}$,

$q_{2i}^{ay}=\sum_{\eta}\in_{z\eta\zeta}e_{\eta2}\zeta_{2i}^{y}=\in_{zxy}e_{x2}y_{2i}^{y}=y_{2i}^{y}=y_{i2}^{y}$, $q_{2i}^{az}=\sum_{\eta}\in_{z\eta\zeta}e_{\eta2}\zeta_{2i}^{z}=y_{2i}^{z}=z_{i2}^{y}$.

Таким образом,

$M_2=M_3+E_2^z+L_2p_2\dot{\Omega}_{x2}^{y}+$

$+\sum_{i=3}^{6}L_{2i}[y_{i2}^{y}(\dot{\omega}_i^{z}+\omega_i^x\omega_i^y)-z_{i2}^{y}(\dot{\omega}_i^{y}-\omega_i^x\omega_i^z)-x_{i2}^{y}(\omega_i^{y2}+\omega_i^{z2})]+G_{q2}$,

где $x_{32}^{y}=s_3$, $y_{32}^{y}=c_3$, $z_{32}^{y}=0$.

По формуле (1.8) для $j = 1$, $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{y}_1$ выпишем

$M_1 = \sum_\eta \in_{y\eta\zeta} (L_2\dot{\Omega}_{21}^{\eta\zeta} + L_4\dot{\Omega}_{41}^{\eta\zeta}) + \dot{K}_1 + G_1,$

$G_1 = g\sum_\eta \in_{y\eta\zeta} d_1^\eta \zeta_1^y = g(\in_{yzx} d_1^z x_1^y + \in_{yxz} d_1^x z_1^y) = 0,\ x_{11}^y = 0,\ z_{11}^y = 0,$

$\dot{K}_1 = \sum_{i=1}^6 \sum_\xi \xi_{i1}^y E_i^\xi = E_1^y + x_{21}^y E_2^x + y_{21}^y E_2^y + x_{31}^y E_3^x + y_{31}^y E_3^y + \sum_\xi (\xi_{41}^y E_4^\xi + \xi_{51}^y E_5^\xi + \xi_{61}^y E_6^\xi),$

$x_{21}^y = s_2,\ y_{21}^y = c_2,\ x_{31}^y = s_{23},\ y_{31}^y = c_{23},\ e_{21}^z = 0,\ e_{21}^x = c_2,\ e_{43}^z = x_{33}^z = 0,\ e_{43}^x = x_{33}^x = 1,$

$d_{21}^x = p_2 e_{21}^x + \sum_{k=3}^6 b_k a_{k1}^x = p_2 c_2 + (b_3 + b_4)c_{23} + (b_5 + b_6)a_{51}^x,$

$d_{21}^z = p_2 e_{21}^z + \sum_{k=3}^6 b_k a_{k1}^z = (b_5 + b_6)a_{51}^z = d_5^x a_{51}^z = d_5^x x_{53}^z,$

$d_{43}^x = p_4 e_{43}^x + \sum_{k=5}^6 b_k a_{k3}^x = p_4 + b_5 a_{53}^x + b_6 a_{63}^x = p_4 + d_5^x x_{54}^x = p_4 + d_5^x c_5,$

$d_{41}^z = p_4 e_{41}^z + \sum_{k=5}^6 b_k a_{k1}^z = b_5 a_{51}^z + b_6 a_{61}^z = d_5^x x_{51}^z = d_5^x x_{53}^z = d_{21}^z,$

$\dot{\Omega}_{21}^{zx} - \dot{\Omega}_{21}^{xz} = d_{21}^z \dot{\Omega}_{21}^{ex} + e_{21}^z \dot{\Omega}_{21}^x - d_{21}^x \dot{\Omega}_{21}^{ez} - e_{21}^x \dot{\Omega}_{21}^z = d_5^x x_{53}^z \dot{\Omega}_{21}^{ex} - d_{21}^x \dot{\Omega}_{21}^{ez} - c_2 \dot{\Omega}_{21}^z,$

$\dot{\Omega}_{41}^{zx} - \dot{\Omega}_{41}^{xz} = d_{41}^z \dot{\Omega}_{43}^{ex} + e_{43}^z \dot{\Omega}_{43}^x - d_{43}^x \dot{\Omega}_{43}^{ez} - e_{43}^x \dot{\Omega}_{43}^z = d_5^x x_{53}^z \dot{\Omega}_{43}^{ex} - d_{43}^x \dot{\Omega}_{43}^{ez} - \dot{\Omega}_{43}^z,$

$\dot{\Omega}_{21}^{ex} = \sum_\xi \xi_{21}^x \dot{\Omega}_{e2}^\xi = c_2 \dot{\Omega}_{e2}^x - s_2 \dot{\Omega}_{e2}^y,\ \dot{\Omega}_{21}^{ez} = \sum_\xi \xi_{21}^z \dot{\Omega}_{e2}^\xi = \dot{\Omega}_{e2}^z,$

$\dot{\Omega}_{21}^z = \sum_{k=3}^6 b_k \dot{\Omega}_{k1}^{az} = \sum_{k=3}^6 b_k \sum_\xi \xi_{k1}^z \dot{\Omega}_{ak}^\xi = b_3 \dot{\Omega}_{a3}^z + b_4\big(s_4 \dot{\Omega}_{a4}^y + c_4 \dot{\Omega}_{a4}^z\big) +$

$+ \sum_{k=5}^6 b_k \sum_\xi \xi_{k3}^z \dot{\Omega}_{ak}^\xi,$

$\dot{\Omega}_{43}^{ex} = \sum_\xi \xi_{43}^x \dot{\Omega}_{e4}^\xi = \dot{\Omega}_{e4}^x,\ \dot{\Omega}_{43}^{ez} = \sum_\xi \xi_{43}^z \dot{\Omega}_{e4}^\xi = s_4 \dot{\Omega}_{e4}^y + c_4 \dot{\Omega}_{e4}^z,$

$\dot{\Omega}_{43}^z = \sum_{k=5}^6 b_k \dot{\Omega}_{k3}^{az} = \sum_{k=5}^6 b_k \sum_\xi \xi_{k3}^z \dot{\Omega}_{ak}^\xi,$

$\dot{\Omega}_{21}^{zx} - \dot{\Omega}_{21}^{xz} = d_5^x x_{53}^z \big(c_2 \dot{\Omega}_{e2}^x - s_2 \dot{\Omega}_{e2}^y\big) - d_{21}^x \dot{\Omega}_{e2}^z -$

$-c_2[b_3 \dot{\Omega}_{a3}^z + b_4(s_4 \dot{\Omega}_{a4}^y + c_4 \dot{\Omega}_{a4}^z) + \sum_{k=5}^6 b_k \sum_\xi \xi_{k3}^z \dot{\Omega}_{ak}^\xi],$

$\dot{\Omega}_{41}^{zx} - \dot{\Omega}_{41}^{xz} = d_5^x x_{53}^z \dot{\Omega}_{e4}^x - d_{43}^x (s_4 \dot{\Omega}_{e4}^y + c_4 \dot{\Omega}_{e4}^z) - \sum_{k=5}^6 b_k \sum_\xi \xi_{k3}^z \dot{\Omega}_{ak}^\xi,$

Таким образом, УД ангулярного манипулятора в квазискоростях имеют следующий вид:

$$\begin{cases} d_5^x x_{53}^z \big[L_2\big(c_2 \dot{\Omega}_{x2}^x - s_2 \dot{\Omega}_{x2}^y\big) + L_4 \dot{\Omega}_{x4}^x\big] - L_2\big(d_{21}^x \dot{\Omega}_{x2}^z + b_3 c_2 \dot{\Omega}_{x3}^z\big) - \\ -(L_2 b_4 c_2 + L_4 d_{43}^x)\big(s_4 \dot{\Omega}_{x4}^y + c_4 \dot{\Omega}_{x4}^z\big) - (L_2 c_2 + L_4) \sum_{k=5}^{6} b_k \sum_\xi \xi_{k3}^z \dot{\Omega}_{xk}^\xi + \\ + E_1^y + s_2 E_2^x + c_2 E_2^y + s_{23} E_3^x + c_{23} E_3^y + \sum_\xi \left(\xi_{41}^y E_4^\xi + \xi_{51}^y E_5^\xi + \xi_{61}^y E_6^\xi\right) = M_1, \\ E_2^z + L_2 p_2 \dot{\Omega}_{x2}^y + L_{23}\big(s_3 \dot{\Omega}_{x3}^x + c_3 \dot{\Omega}_{x3}^y\big) + \sum_{i=4}^{6} L_{2i}\big(x_{i2}^y \dot{\Omega}_{xi}^x + y_{i2}^y \dot{\Omega}_{xi}^y + z_{i2}^y \dot{\Omega}_{xi}^z\big) + g b_2 c_2 = M_2 - M_3, \\ L_2[(d_3^x c_3 - d_3^y s_3)\dot{\Omega}_{x2}^y - (d_3^x s_3 + d_3^y c_3)\dot{\Omega}_{x2}^x] + L_4[(p_4 + d_5^x c_5)(c_4 \dot{\Omega}_{x4}^y - s_4 \dot{\Omega}_{x4}^z) + b_5 \sum_\xi \xi_{53}^y \dot{\Omega}_{x5}^\xi + \\ + b_6 \sum_\xi \xi_{63}^y \dot{\Omega}_{x6}^\xi - d_5^x s_5 \dot{\Omega}_{x4}^x] + E_3^z + s_4 E_4^y + c_4 E_4^z + \sum_\xi \left(\xi_{53}^z E_5^\xi + \xi_{63}^z E_6^\xi\right) + g\big(d_3^x c_{23} - d_3^y s_{23}\big) = M_3, \\ d_4^y [L_2(z_{42}^x \dot{\Omega}_{x2}^x + z_{42}^y \dot{\Omega}_{x2}^y + c_4 \dot{\Omega}_{x2}^z) + L_4 \dot{\Omega}_{x4}^z] + \\ + E_4^x + c_5 E_5^x - s_5 E_5^y + c_5 E_6^x + y_{64}^x E_6^y + z_{64}^x E_6^z - g d_4^y c_{23} s_4 = M_4, \\ d_5^x\big[L_2\big(y_{52}^x \dot{\Omega}_{x2}^x + y_{52}^y \dot{\Omega}_{x2}^y + y_{52}^z \dot{\Omega}_{x2}^z\big) + L_4\big(c_5 \dot{\Omega}_{x4}^y - s_5 \dot{\Omega}_{x4}^x\big)\big] + E_5^z + s_6 E_6^y + c_6 E_6^z + g d_5^x y_5^y = M_5, \\ I_6^x \dot{\omega}_6^x = M_6, \end{cases}$$

где $E_i^x = I_i^x \dot{\omega}_i^x,\ E_i^y = I_i^z \dot{\omega}_i^y + I_i^b \omega_i^z \omega_i^x,\ E_i^z = I_i^z \dot{\omega}_i^z - I_i^b \omega_i^x \omega_i^y,$

$\dot{\Omega}_{xi}^x = -\omega_i^{y2} - \omega_i^{z2},\ \dot{\Omega}_{xi}^y = \dot{\omega}_i^z + \omega_i^x \omega_i^y,\ \dot{\Omega}_{xi}^z = -\dot{\omega}_i^y + \omega_i^x \omega_i^z.$

2.2. Влияние размещения ЦМ тел на громоздкость УД

Рассмотрим УД переносных движений ангулярного манипулятора на рисунке. То есть будем считать, что три последних тела не движутся, а ЦМ третьего тела расположен выше оси абсцисс ССК(3).

По формуле (1.10) для $j=3$ с учетом равенств $\boldsymbol{M}_4=0$, $L_{13}=0$, $p_3=0$ выпишем

$M_{q3}=\boldsymbol{q}_3\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{03}+L_{23}[\sum_\xi(q^\xi_{e32}\dot\omega^\xi_2-Q^e_{\xi32}\omega^{\xi2}_2)+q^{xy}_{e32}\omega^x_2\omega^y_2+q^{xz}_{e32}\omega^x_2\omega^z_2+q^{yz}_{e32}\omega^y_2\omega^z_2]+G_{q3}$,

где $G_{q3}=gb_3\sum_\xi\in_{q\xi\zeta}a_{\xi3}\zeta^y_3=gb_3(\in_{zxy}a_{x3}y^y_3+\in_{zyx}a_{y3}x^y_3)=gb_3(a_{x3}y^y_3-a_{y3}x^y_3)$. Пусть $a_{x3}=c_\alpha$, $a_{y3}=s_\alpha$, где $c_\alpha=\cos(\alpha)$, $s_\alpha=\sin(\alpha)$ – проекции орта $\boldsymbol{a}_3$ на оси ССК(3), т. е. α – угол между ортами $\boldsymbol{x}_3$ и $\boldsymbol{a}_3$. Очевидно, что $y^y_3=c_{23}$, $x^y_3=s_{23}$, $c_{23}=\cos(q_{23})$, $s_{23}=\sin(q_{23})$, $q_{23}=q_2+q_3$. Множители $q^\xi_{e32},Q^e_{\xi32},q^{xy}_{e32},q^{xz}_{e32},q^{yz}_{e32}$ содержат константы $e_{x2}=1$, $e_{y2}=0$, $e_{z2}=0$. Выражения $q^{u\xi}_{32}$ выписываются по формуле $q^{u\xi}_{32}=\sum_\eta\in_{q\eta\zeta}u^-_{\eta3}\zeta^\xi_{32}$, где $u=e$, т. е. $u^-_{\eta3}=a_{\eta3}$. Таким образом,

$q^{ex}_{32}=\sum_\eta\in_{q\eta\zeta}a_{\eta3}\zeta^x_{32}=\in_{zxy}a_{x3}y^x_{32}+\in_{zyx}a_{y3}x^x_{32}=a_{x3}y^x_{32}-a_{y3}x^x_{32}=$
$=c_\alpha y^x_{32}-s_\alpha x^x_{32}=-c_\alpha s_3-s_\alpha c_3=-s_{\alpha3}, s_{\alpha3}=sin(\alpha+q_3)$,
$q^{ey}_{32}=\sum_\eta\in_{q\eta\zeta}a_{\eta3}\zeta^y_{32}=c_\alpha y^y_{32}-s_\alpha x^y_{32}=c_\alpha c_3-s_\alpha s_3=c_{\alpha3}, c_{\alpha3}=\cos(\alpha+q_3), q^{ez}_{32}=0$.

Теперь

$q^x_{e32}=e_{y2}q^{ez}_{32}-e_{z2}q^{ey}_{32}=0, q^y_{eji}=e_{z2}q^{ex}_{32}-e_{x2}q^{ez}_{32}=0, q^z_{eji}=e_{x2}q^{ey}_{32}-e_{y2}q^{ex}_{32}=q^{ey}_{32}=c_{\alpha3}$,
$Q^e_{x32}=e_{y2}q^{ey}_{32}+e_{z2}q^{ez}_{32}=0, Q^e_{y32}=e_{x2}q^{ex}_{32}+e_{z2}q^{ez}_{32}=q^{ex}_{32}=-s_{\alpha3}$,
$Q^e_{z32}=e_{x2}q^{ex}_{32}+e_{y2}q^{ey}_{32}=q^{ex}_{32}=-s_{\alpha3}$,
$q^{xy}_{e32}=e_{y2}q^{ex}_{32}+e_{x2}q^{ey}_{32}=q^{ey}_{32}=c_{\alpha3}, q^{xz}_{e32}=e_{x2}q^{ez}_{32}+e_{z2}q^{ex}_{32}=0, q^{yz}_{e32}=e_{y2}q^{ez}_{32}+e_{z2}q^{ey}_{32}=0$.

Следовательно,

$M_{q3}=M_3=\boldsymbol{q}_3\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{03}+L_{23}[c_{\alpha3}\dot\omega^z_2+s_{\alpha3}(\omega^{y2}_2+\omega^{z2}_2)+c_{\alpha3}\omega^x_2\omega^y_2]+G_{q3}$.

Учитывая, что $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{z}_3=\boldsymbol{z}_1$, по формуле (1.10) для $j=2$ выпишем

$M_{q2}=M_{q3}+\boldsymbol{q}_2\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{02}+d_2\sum_\xi\in_{q\xi\zeta}e_{\xi2}\dot\Omega^\zeta_{e2}+$
$+L_{23}[\sum_\xi(q^\xi_{a23}\dot\omega^\xi_3-Q^a_{\xi23}\omega^{\xi2}_3)+q^{xy}_{a23}\omega^x_3\omega^y_3+q^{xz}_{a23}\omega^x_3\omega^z_3+q^{yz}_{a23}\omega^y_3\omega^z_3]+G_{q2}$,
$G_{q2}=gb_2\sum_\xi\in_{q\xi\zeta}a_{\xi2}\zeta^y_2=gb_2(\in_{zxy}a_{x2}y^y_2+\in_{zyx}a_{y2}x^y_2)=gb_2(a_{x2}y^y_2-a_{y2}x^y_2)=$
$=gb_2y^y_2=gb_2c_2$.

Множители $q^\xi_{a23},Q^a_{\xi23},q^{xy}_{a23},q^{xz}_{a23},q^{yz}_{a23}$ содержат константы $a_{x3}=c_\alpha$, $a_{y3}=s_\alpha$, $a_{z3}=0$. Выражения $q^{a\xi}_{23}$выписываются по формуле $q^{a\xi}_{23}=\sum_\eta\in_{q\eta\zeta}u^-_{\eta2}\zeta^\xi_{23}$, где $u=a$, т. е. $u^-_{\eta2}=e_{\eta2}$. Таким образом,

$q^{ax}_{23}=\sum_\eta\in_{q\eta\zeta}e_{\eta2}\zeta^x_{23}=\in_{zxy}e_{x2}y^x_{23}+\in_{zyx}e_{y2}x^x_{23}=e_{x2}y^x_{23}-e_{y2}x^x_{23}=y^x_{23}=s_3$,
$q^{ay}_{23}=\sum_\eta\in_{q\eta\zeta}e_{\eta2}\zeta^y_{23}=\in_{zxy}e_{x2}y^y_{23}+\in_{zyx}e_{y2}x^y_{23}=y^y_{23}=c_3, q^{az}_{23}=y^z_{23}=0$.

Теперь

$q^x_{a23}=a_{y3}q^{az}_{23}-a_{z3}q^{ay}_{23}=0,\ q^y_{a23}=a_{z3}q^{ax}_{23}-a_{x3}q^{az}_{23}=0$,
$q^z_{a23}=a_{x3}q^{ay}_{23}-a_{y3}q^{ax}_{23}=c_\alpha c_3-s_\alpha s_3=c_{\alpha3}$,
$Q^a_{x23}=a_{y3}q^{ay}_{23}+a_{z3}q^{az}_{23}=s_\alpha c_3,\ Q^a_{y23}=a_{x3}q^{ax}_{23}+a_{z3}q^{az}_{23}=c_\alpha s_3$,
$Q^a_{z23}=a_{x3}q^{ax}_{23}+a_{y3}q^{ay}_{23}=c_\alpha s_3+s_\alpha c_3=s_{\alpha3}$,
$q^{xy}_{a23}=a_{y3}q^{ax}_{23}+a_{x3}q^{ay}_{23}=s_\alpha s_3+c_\alpha c_3,\ q^{xz}_{a23}=a_{x3}q^{az}_{23}+a_{z3}q^{ax}_{23}=0$,
$q^{yz}_{a23}=a_{y3}q^{az}_{23}+a_{z3}q^{ay}_{23}=0$.

Следовательно,

$M_{q2}=M_2=M_3+\boldsymbol{q}_2\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{03}+$
$+L_{23}[c_{\alpha3}\dot\omega^z_3-s_\alpha c_3\omega^{x2}_3-c_\alpha s_3\omega^{y2}_2-s_{\alpha3}\omega^{z2}_3+(s_\alpha s_3+c_\alpha c_3)\omega^x_3\omega^y_3]+G_{q2}$.

Из формул вычисления движущих моментов сил M_3 и M_2 следует, что в случае $\alpha=0$, т. е. в случае размещения ЦМ C_{a3} на оси $O_3\boldsymbol{x}_3$, эти формулы сокращаются почти в два раза.

3. Плоские манипуляторы

Для манипулятора в вертикальной плоскости

$$M_j=M_{j+1}+\sum_{i=1}^{j-1}L_{ij}[(a_{xj}c_{ij}-a_{yj}s_{ij})\ddot\alpha_i+(a_{xj}s_{ij}+a_{yj}c_{ij})\dot\alpha^2_i]+I^p_j\ddot\alpha_j+$$
$$+\sum_{i=j+1}^{N}L_{ji}[(a_{xj}c_{ji}-a_{yj}s_{ji})\ddot\alpha_i-(a_{xj}s_{ji}+a_{yj}c_{ji})\dot\alpha^2_i]+gb_j(a_{xj}y^y_j-a_{yj}x^y_j),\qquad(3.1)$$

где $j=N,N-1,\ldots,1$;

$I_j^p = I_j^z + L_j p_j$; $M_{N+1} = 0$; $s_{ij} = \sin(\alpha_{ij})$; $c_{ij} = \cos(\alpha_{ij})$; $\alpha_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j} q_k$,

q_k – относительный угол поворота тела m_{ok}, т. е. угол, откладываемый от оси $O_k\boldsymbol{x}_{k-1}$ до оси $O_k\boldsymbol{x}_k$; $\alpha_j = \sum_{k=1}^{j} q_k$ – абсолютный угол поворота тела m_{oj}, т. е. угол, откладываемый от горизонтальной оси $O\boldsymbol{x}$ до оси $O_j\boldsymbol{x}_j$. В случае $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{x}_i$

$$M_j = M_{j+1} + \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\left(c_{ij}\ddot{\alpha}_i + s_{ij}\dot{\alpha}_i^2\right) + I_j^p\ddot{\alpha}_j + \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}(c_{ji}\ddot{\alpha}_i - s_{ji}\dot{\alpha}_i^2) + gb_j\cos(\alpha_j). \quad (3.2)$$

3.1. Доказательство формул (3.1), (3.2)

Для рассматриваемого класса манипуляторов имеем $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}$ для всех i, где $\boldsymbol{z}$ – нормаль к плоскости движения $O\boldsymbol{xy}$. Следовательно, $\omega_j^x = \omega_j^y = 0$, $\omega_j^z = \dot{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{j} \dot{q}_i$ для всех j. По формуле (1.10) выпишем

$$M_{qj} = M_j = M_{j+1} + \boldsymbol{z}\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{0j} + \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}\left(q_{eji}^z\ddot{\alpha}_i - Q_{zji}^e\dot{\alpha}_i^2\right) +$$
$$+L_j p_j \sum_\xi \in_{z\xi\zeta} e_{\xi j}\dot{\Omega}_{ej}^\zeta + \sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}(q_{aji}^z\ddot{\alpha}_i - Q_{zji}^a\dot{\alpha}_i^2) + G_{zj},$$

где $G_{zj} = gb_j\sum_\xi \in_{z\xi\zeta} a_{\xi j}\zeta_j^y = gb_j(\in_{zxy} a_{xj}y_j^y + \in_{zyx} a_{yj}x_j^y) = gb_j(a_{xj}y_j^y - a_{yj}x_j^y)$. Учитывая равенство $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{x}_i$, выпишем

$$q_{eji}^z = e_{xi}q_{ji}^{ey} - e_{yi}q_{ji}^{ex} = q_{ji}^{ey} = \sum_\eta \in_{z\eta\zeta} a_{\eta j}\zeta_{ji}^y = \in_{zxy} a_{xj}y_{ji}^y + \in_{zyx} a_{yj}x_{ji}^y = a_{xj}y_{ji}^y - a_{yj}x_{ji}^y,$$
$$Q_{zji}^e = e_{xi}q_{ji}^{ex} + e_{yi}q_{ji}^{ey} = q_{ji}^{ex} = \sum_\eta \in_{z\eta\zeta} a_{\eta j}\zeta_{ji}^x = \in_{zxy} a_{xj}y_{ji}^x + \in_{zyx} a_{yj}x_{ji}^x = a_{xj}y_{ji}^x - a_{yj}x_{ji}^x,$$
$$q_{aji}^z = a_{xi}q_{ji}^{ay} - a_{yi}q_{ji}^{ax} = a_{xi}\sum_\eta \in_{z\eta\zeta} e_{\eta j}\zeta_{ji}^y - a_{yi}\sum_\eta \in_{z\eta\zeta} e_{\eta j}\zeta_{ji}^x = a_{xi}y_{ji}^y - a_{yi}y_{ji}^x,$$
$$Q_{zji}^a = a_{xi}q_{ji}^{ax} + a_{yi}q_{ji}^{ay} = a_{xi}\sum_\eta \in_{z\eta\zeta} e_{\eta j}\zeta_{ji}^x + a_{yi}\sum_\eta \in_{z\eta\zeta} e_{\eta j}\zeta_{ji}^y = a_{xj}y_{ji}^x + a_{yj}y_{ji}^y,$$
$$\sum_\xi \in_{z\xi\zeta} e_{\xi j}\dot{\Omega}_{ej}^\zeta = \in_{zxy} e_{xj}\dot{\Omega}_{ej}^y = \dot{\Omega}_{ej}^y = e_{xj}\ddot{\alpha}_i = \ddot{\alpha}_i.$$

По формуле (1.4) $\dot{\boldsymbol{K}}_{0j} = \sum_\xi (\omega_j^\xi \boldsymbol{I}_j^\xi)_t' = (\dot{\alpha}_j\boldsymbol{I}_j^z)_t'$. Следовательно, $\boldsymbol{z}_j\cdot\dot{\boldsymbol{K}}_{0j} = (\dot{\alpha}_j\boldsymbol{z}_j\cdot\boldsymbol{I}_j^z)_t' = I_j^z\ddot{\alpha}_j$.

Таким образом,

$$M_j = M_{j+1} + (I_j^z + L_j p_j)\ddot{\alpha}_j + \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}[(a_{xj}y_{ji}^y - a_{yj}x_{ji}^y)\ddot{\alpha}_i - (a_{xj}y_{ji}^x - a_{yj}x_{ji}^x)\dot{\alpha}_i^2] +$$
$$+\sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}[(a_{xj}y_{ji}^y - a_{yj}y_{ji}^x)\ddot{\alpha}_i - (a_{xj}y_{ji}^x + a_{yj}y_{ji}^y)\dot{\alpha}_i^2] + G_{zj}.$$

Для $i < j$, используя обозначение $\alpha_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j} q_k$, получим

$$x_{ji}^x = \boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j = \cos(\angle\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = \cos(\alpha_{ij}) = c_{ij},\ \ y_{ji}^y = \boldsymbol{y}_i\cdot\boldsymbol{y}_j = \cos(\alpha_{ij}) = c_{ij},$$
$$y_{ji}^x = \boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{y}_j = \cos(\angle\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j) = \cos(\alpha_{ij} + 90^\circ) = -s_{ij},$$
$$x_{ji}^y = \boldsymbol{y}_i\cdot\boldsymbol{x}_j = \cos(\angle\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}_j) = \cos(\alpha_{ij} + 270^\circ) = s_{ij}.$$

Аналогично для $i > j$, используя обозначение $\alpha_{ji} = \sum_{k=j+1}^{i} q_k$, получим

$$y_{ji}^y = \boldsymbol{y}_j\cdot\boldsymbol{y}_i = \cos(\angle\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{y}_i) = \cos(\alpha_{ji}) = c_{ji},$$
$$y_{ji}^x = \boldsymbol{y}_j\cdot\boldsymbol{x}_i = \cos(\angle\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{x}_i) = \cos(\alpha_{ji} + 270^\circ) = s_{ji}.$$

Следовательно,

$$M_j = M_{j+1} + I_j^p\ddot{\alpha}_j + \sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}[(a_{xj}c_{ij} - a_{yj}s_{ij})\ddot{\alpha}_i - (-a_{xj}s_{ij} - a_{yj}c_{ij})\dot{\alpha}_i^2] +$$
$$+\sum_{i=j+1}^{N} L_{ji}[(a_{xj}c_{ji} - a_{yj}s_{ji})\ddot{\alpha}_i - (a_{xj}s_{ji} + a_{yj}c_{ji})\dot{\alpha}_i^2] + G_{zj},$$

что доказывает формулу (3.1). Если $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_i$ для всех i, то формула (3.1) принимает вид (3.2), что требовалось доказать.

Очевидно, что если плоскость движения тел горизонтальна, то в формулах (3.1), (3.2) достаточно положить $g = 0$. В случае наклонной плоскости движения достаточно считать g, умноженным на $\sin(\alpha)$, где α – угол наклона плоскости движения к горизонту.

3.2. Ангулярный манипулятор в вертикальной плоскости

Для $j = N = 3$ в случае $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{x}_i$ ($i = 1,2,3$) по формуле (3.2) выпишем

$$M_3 = \sum_{i=1}^{2} L_{i3}\left(c_{i3}\ddot{\alpha}_i + s_{i3}\dot{\alpha}_i^2\right) + I_3^p\ddot{\alpha}_3 + gb_3\cos(\alpha_3),$$

где $\alpha_3 = q_{13} = q_1 + q_2 + q_3$. Для $j = 2$ по формуле (3.2) выпишем

$$M_2 = M_3 + L_{12}(c_{12}\ddot{\alpha}_1 + s_{12}\dot{\alpha}_1^2) + I_2^p\ddot{\alpha}_2 + L_{23}(c_{23}\ddot{\alpha}_3 - s_{23}\dot{\alpha}_3^2) + gb_2\cos(\alpha_2),$$

где $\alpha_2 = q_{12} = q_1 + q_2$. Для $j = 1$ по формуле (3.2) выпишем

$$M_1 = M_2 + \sum_{i=2}^{3} L_{1i}\left(c_{1i}\ddot{\alpha}_i - s_{1i}\dot{\alpha}_i^2\right) + I_1^p\ddot{\alpha}_1 + gb_1\cos(q_1).$$

Заключение

На заре становления робототехники как науки выяснилось, что математическое моделирование манипуляторов и, в частности, вывод их УД является сложной и громоздкой задачей, не говоря уже о решении задач динамики, идентификации параметров тел, синтеза манипуляторов с заданными свойствами и решении других задач. Классические методы вывода УД (Ньютона, Лагранжа, Эйлера, Гамильтона и т. д.) создавались и развивались не для исследования манипуляторов, поэтому их трудно использовать для этих целей. Создаются новые методы вывода УД, освобождающие исследователей от утомительной аналитической работы, и их компактного представления в символьном виде с явно выраженными геометрическими, кинематическими, статическими и инерционными параметрами, позволяющими на множестве этих параметров решать, например, задачи синтеза манипуляторов с заданными свойствами.

В статьях [3, 5, 6] отражены результаты исследований по теме «Разработка методов выписывания оптимального аналитического вида математической модели промышленного робота», поддержанных РФФИ и Челябинской областью. В этих статьях представлены новые общие виды УД и формализмы их использования в процессе ручного выписывания УД конкретных манипуляторов с вращательными и поступательными сочленениями. В настоящей статье рассмотрены манипуляторы с вращательными сочленениями. Класс таких манипуляторов очень велик. Проведенный нами обзор современных промышленных роботов на основе источников [7–16] показал, что ведущие производители роботов выпускают манипуляторы из этого класса.

Примеры выписывания УД различных манипуляторов с шестью степенями свободы в пространстве и их оптимальные (в смысле минимума математических операций) виды позволяют нам ожидать, что число пользователей предлагаемых методов будет расти. Положительный опыт использования этих методов в учебном процессе в дисциплинах «Основы механики систем тел», «Электромеханические системы» и «Мехатроника» оправдывает наши ожидания.

Список литературы

1. Tourassis V.D., Neuman C.P.The inertial characteristics of dynamic robot models // Mech. and Mach. Theory. 1985. Vol. 20, no. 1. P. 41–52.

2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

3. Телегин, А.И. Аналитическое решение первой задачи динамики манипуляторов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22, № 1. С. 28–52. DOI: 10.14529/ctcr220103

4. Кузьмина Р.П. Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Университетская книга, 2012. 202 с. ISBN 978-5-91304-299-6.

5. Пудовкина С.Г., Телегин А.И. Выписывание формул вычисления сил в сочленениях манипуляторов в статике // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2021. Т. 21, № 3. С. 47–58. DOI: 10.14529/ctcr210305

6. Телегин А.И. Формализм выписывания уравнений динамики манипуляторов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2021. Т. 21, № 4. С. 52–68. DOI: 10.14529/ctcr210405

7. Моисеев Ю.И. Применение промышленных роботов для загрузки металлообрабатывающего оборудования: учеб. пособие. Курган: КГУ, 2013. 170 с. ISBN 978-5-4217-0258-0. Текст: электронный. Лань: Электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/177883 (дата обращения: 30.01.2022).

8. Климов А.С., Машнин Н.Е. Роботизированные технологические комплексы и автоматические линии в сварке: учеб. пособие для вузов. 4-е изд., стер. СПб.: Лань, 2021. 236 с. ISBN 978-5-8114-6792-1. Текст: электронный. Лань: Электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/152449 (дата обращения: 30.01.2022).

9. Kawasaki Robotics GmbH. Каталоги и технические брошюры [Электронный ресурс]. URL: https://pdf.directindustry.com.ru/pdf/kawasaki-robotics-gmbh-18836.html (дата обращения: 20.03.2022).

10. Yaskawa industrial roboticarms [Электронный ресурс]. URL: https://www.motoman.com/en-us/products/robots/industrial (дата обращения: 20.03.2022).

11. ABB industrial robots [Электронный ресурс]. URL: https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots (дата обращения: 20.03.2022).

12. ROBOTFORUM: промышленные роботы [Электронный ресурс] URL: http://robotforum.ru/promyishlennyie-robotyi/tur.html (дата обращения: 20.03.2022).

13. KUKA industrial robotics heavy payloads: каталог [Электронный ресурс]. URL: https://www.kuka.com/-/media/kuka-downloads/imported/9cb8e311bfd744b4b0eab25ca883f6d3/kuka_pb_schwere_tl_en.pdf (дата обращения: 20.03.2022).

14. ROBOTOX промышленный робот ROBOTOX_P6A-750-6 [Электронный ресурс]. URL: https://robotox.ru/katalog/promyshlennye-roboty/6-koordinatnye-roboty/robotox_p6a-750-6-detail (дата обращения: 13.01.2022).

15. FANUC robotics range overview [Электронный ресурс]. URL: https://www.fanuc.eu/tr/en/robots/robot-range-page (дата обращения: 20.03.2022).

16. PUMA 500 Robot arm [Электронный ресурс]. URL: http://rutherford-robotics.com/PUMA/ (дата обращения: 20.03.2022).

References

1. Tourassis V.D., Neuman C.P. The inertial characteristics of dynamic robot models. *Mech. and Mach. Theory*. 1985;20(1):41–52.

2. Lur'ye A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1961. 824 p. (In Russ)

3. Telegin A.I. Analytical solution of the first problem of the manipulators' dynamics. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2022;22(1):28–52. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr220103

4. Kuz'mina R.P. *Giroskop v kardanovom podvese* [Gyroscope in gimbal]. Moscow: Universitetskaya kniga; 2012. 202 p. ISBN978-5-91304-299-6. (In Russ)

5. Pudovkina S.G., Telegin A.I. Writing out of formulas for calculating forces in the joints of manipulators in statics. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2021;21(3):47–58. (In Russ) DOI: 10.14529/ctcr210305

6. Telegin A.I. Formalism of writing out of manipulators dynamic equation. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radioelectronics.* 2021; 21(4):52–68. (In Russ) DOI: 10.14529/ctcr210405

7. Moiseyev Yu.I. *Primeneniye promyshlennykh robotov dlya zagruzki metalloobrabatyvayushchego oborudovaniya: uchebnoye posobiye.* [Application of industrial robots for loading of metalworking equipment: tutorial]. Kurgan: KSU; 2013. 170 p. ISBN 978-5-4217-0258-0. Text: electronic. Lan': Electronic library system. Available at: https://e.lanbook.com/book/177883 (accessed 30.01.2022). (In Russ)

8. Klimov A.S., Mashnin N.E. *Robotizirovannyye tekhnologicheskiye kompleksy i avtomaticheskiye linii v svarke: uchebnoye posobiye dlya vuzov* [Robotized technological complexes and automatic lines in welding: textbook for universities]. 4d ed. St. Petersburg: Lan'; 2021. 236 p. ISBN 978-5-8114-6792-1. Text: electronic. Lan': Electronic library system. Available at: https://e.lanbook.com/book/152449 (accessed 30.01.2022). (In Russ)

9. Kawasaki Robotics GmbH. *Katalogi i tekhnicheskiye broshyury* [Catalogs and technical brochures]. Available at: https://pdf.directindustry.com.ru/pdf/kawasaki-robotics-gmbh-18836.html (accessed 20.03.2022).

10. *Yaskawa industrial robotic arms*. Available at: https://www.motoman.com/en-us/products/robots/industrial (accessed 20.03.2022).

11. *ABB industrial robots*. Available at: https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots (accessed 20.03.2022).

12. *ROBOTFORUM: promyshlennyy robot* [ROBOTFORUM: industrial robots]. Available at: http://robotforum.ru/promyishlennyie-robotyi/tur.html (accessed 20.03.2022). (In Russ)

13. *KUKA industrial robotics heavy payloads: catalogs*. Available at: https://www.kuka.com/-/media/kuka-downloads/imported/9cb8e311bfd744b4b0eab25ca883f6d3/kuka_pb_schwere_tl_en.pdf (accessed 20.03.2022).

14. *ROBOTFORUM: promyshlennyy robot ROBOTOX_P6A-750-6* [ROBOTFORUM: industrial robots ROBOTOX_P6A-750-6]. Available at: https://robotox.ru/katalog/promyshlennye-roboty/6-koordinatnye-roboty/robotox_p6a-750-6-detail (accessed 13.01.2022). (In Russ)

15. *FANUC robotics range overview.* Available at: https://www.fanuc.eu/tr/en/robots/robot-range-page (accessed 20.03.2022).

16. *PUMA 500 Robot arm*. Available at: http://rutherford-robotics.com/PUMA/ (accessed 20.03.2022).

Информация об авторе

Телегин Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры автоматики, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия; teleginai@susu.ru.

Information about the author

Aleksandr I. Telegin, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof., Prof. of the Department of Automation, South Ural State University, Miass, Russia; teleginai@susu.ru.

Статья поступила в редакцию 21.12.2021
The article was submitted 21.12.2021