

## МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ: ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕОРИИ ЛАТЕНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

**С.А. Баркалов**, [barkalov@vgasu.vrn.ru](mailto:barkalov@vgasu.vrn.ru)

**М.А. Карпович**, [tb.gerolskih@cds.vrn.ru](mailto:tb.gerolskih@cds.vrn.ru)

**С.И. Моисеев**, [mail@moiseevs.ru](mailto:mail@moiseevs.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6136-9763>

*Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*

**Аннотация.** В работе предлагается математическая модель оценки привлекательности альтернатив по качественному критерию, которая основана на методе оценки латентных переменных по модели Раша. Данная модель предназначена для оценивания привлекательности альтернатив при экспертном оценивании по методу анализа иерархий, основанному на парном сравнении альтернатив. Предлагаемый метод позволит получать объективные оценки альтернатив по линейной шкале, которые не зависят от состава оцениваемых альтернатив. **Цель исследования** заключается в описании нового математического аппарата, позволяющего получать оценки привлекательностей альтернатив и обладающего рядом преимуществ по сравнению с традиционными методами оценивания. Предлагаемая модель основана на теории латентных переменных, а точнее, на модели Раша оценки латентных переменных. **Материалы и методы.** В основе описанной в работе модели оценки альтернатив лежит метод парных сравнений. Однако в отличие от традиционного математического аппарата метода анализа иерархий, методика выявления предпочтения одной альтернативы над другой для каждой их пары основана на вероятностном подходе, поэтому оценки предпочтений менее абстрактны и более объективны. В работе дано математическое обоснование предлагаемой модели, проведено сравнение результатов оценивания по предлагаемой модели с результатами, полученными традиционными методами. Также описаны вычислительные эксперименты, которые обосновывают адекватность полученных оценок. **Результаты.** Разработана математическая модель, которая является альтернативой методу анализа иерархий (Т. Саати) для оценки привлекательности альтернатив по методу парных сравнений. В отличие от традиционного метода оценивания, модель позволяет получать независимые оценки альтернатив по линейной шкале, а критерии сравнения альтернатив носят вероятностный характер, что позволяет проводить объективное оценивание. Вычислительные эксперименты показали адекватность и хорошую устойчивость полученных оценок к изменению исходных данных. **Заключение.** Предлагаемый метод обработки экспертной информации, полученной при парных сравнениях альтернатив, позволит получать максимально объективные их оценки и может быть использован как математический аппарат для систем поддержки принятия решений во многих сферах научной и практической деятельности.

**Ключевые слова:** метод анализа иерархий, альтернативы, принятие решений, экспертное оценивание, латентные переменные, модель Раша

**Для цитирования:** Баркалов С.А., Карпович М.А., Моисеев С.И. Метод анализа иерархий: подход, основанный на теории латентных переменных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22, № 2. С. 58–66. DOI: 10.14529/ctcr220205

Original article  
DOI: 10.14529/ctcr220205

## ANALYTIC HIERARCHY PROCESS: AN APPROACH BASED ON THE THEORY OF LATENT VARIABLES

S.A. Barkalov, barkalov@vgasu.vrn.ru

M.A. Karpovich, tb.gerolskih@cds.vrn.ru

S.I. Moiseev, mail@moiseevs.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6136-9763>

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

**Abstract.** The paper proposes a mathematical model for evaluating the attractiveness of alternatives by a qualitative criterion, which is based on the method of evaluating latent variables according to the Rasch model. This model is intended for assessing the attractiveness of alternatives in expert evaluation using the hierarchy analysis method based on a paired comparison of alternatives. The proposed method will make it possible to obtain objective estimates of alternatives on a linear scale, which do not depend on the composition of the alternatives being evaluated. **Aim.** The purpose of the study is to describe a new mathematical apparatus that allows one to obtain estimates of the attractiveness of alternatives and has a number of advantages over traditional methods of evaluation. The proposed model is based on the theory of latent variables, and more precisely, on the Rasch model for estimating latent variables. **Materials and methods.** The basis of the model for evaluating alternatives described in the paper is the method of paired comparisons. However, unlike the traditional mathematical apparatus of the hierarchy analysis method, the method for identifying the preference of one alternative over another for each of their pairs is based on a probabilistic approach, so preference estimates are less abstract and more objective. The paper gives a mathematical substantiation of the proposed model, compares the results of estimation by the proposed model with the results obtained by traditional methods. Computational experiments are also described that substantiate the adequacy of the obtained estimates. **Results.** A mathematical model has been developed, which is an alternative to the hierarchy analysis method (T. Saaty) for assessing the attractiveness of alternatives using the method of paired comparisons. Unlike the traditional evaluation method, the model allows you to obtain independent estimates of alternatives on a linear scale, and the criteria for comparing alternatives are probabilistic in nature, which allows for an objective assessment. Computational experiments have shown the adequacy and good stability of the obtained estimates to changes in the initial data. **Conclusion.** The proposed method for processing expert information obtained from paired comparisons of alternatives will make it possible to obtain the most objective assessments of them and can be used as a mathematical apparatus for decision support systems in many areas of scientific and practical activity.

**Keywords:** Analytic Hierarchy Process, alternatives, decision-making, expert evaluation, latent variables, Rasch model

**For citation:** Barkalov S.A., Karpovich M.A., Moiseev S.I. Analytic hierarchy process: An approach based on the theory of latent variables. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2022;22(2):58–66. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr220205

### Введение

В теории аналитического планирования, при экспертном оценивании и принятии решений часто используются методы, которые опираются на математические модели, основанные на парном сравнении альтернатив. Оценки привлекательности альтернатив обычно находятся на основе математического аппарата метода анализа иерархий (Analytic Hierarchy Process) – АИП. Этот метод основан на идее парных сравнений всего множества альтернатив и имеет несколько разновидностей. Первоначальной версией является аддитивный метод аналитической иерархии, разработанный Томасом Саати (Thomas Saaty) [1, 2]. Немного позднее был разработан усовершенствованный математический аппарат, который назвали мультипликативным методом АИП [3, 4].

### Цели и задачи исследования

Целью данной работы является описание нового математического аппарата, позволяющего получать оценки привлекательностей альтернатив и обладающего рядом преимуществ по сравнению с традиционными методами оценивания. Предлагаемая модель основана на теории латентных переменных, а точнее, на модели Раша (G. Rasch) оценки латентных переменных [5, 6].

Традиционные методы оценивания, основанные на парном сравнении альтернатив, предполагают использование некоторой вербальной шкалы относительной важности одной альтернативы перед другой. Результаты сравнения представляют собой некоторую матрицу парных сравнений, которая с помощью определенного математического аппарата переводится в количественные показатели привлекательности каждой альтернативы. Однако оценки, полученные с помощью АНР и мультипликативного АНР, характеризуются следующими недостатками.

1. Вербальная шкала относительной важности достаточно абстрактна и поэтому в значительной степени субъективна, полученные по ней оценки представляют лишь субъективные мнения экспертов и не несут четкого смысла.

2. Оценки привлекательности альтернатив сильно зависят от их множества и состава, добавление либо исключение одной или нескольких альтернатив сильно влияет на полученные оценки и может привести к результату, значительно отличающемуся от первоначального.

3. Оценки привлекательности альтернатив не линейны относительно частных оценок из матрицы парных сравнений, по которым они получены.

Предлагаемая в работе модель, как будет показано далее, позволит в какой-то степени нивелировать указанные недостатки, что позволит получать более объективные оценки привлекательности альтернатив.

Кроме того, в работе будут приведены результаты вычислительных экспериментов, которые обоснуют адекватность полученных оценок по предлагаемой модели.

### Постановка задачи оценки альтернатив при парных сравнениях

Рассмотрим  $n$  альтернатив, оцениваемых по некоторому качественному критерию, которые обозначим как  $A_1, A_1, \dots, A_n$ . Исходными данными для методов парных сравнений служит матрица  $x_{ij}$ , в которой приведены степени предпочтений  $h$  альтернативы  $A_i$  по сравнению с альтернативой  $A_j$ . В методах АНР и мультипликативного АНР для нахождения элементов этой матрицы используют вербальную шкалу, на основании которой определяется каждый элемент матрицы  $x_{ij}$ , при условии, что альтернатива  $A_i$  предпочтительнее альтернативы  $A_j$ :  $x_{ij} = h$ , если наоборот, то  $x_{ij} = 1/h$ , то есть  $x_{ij} = 1/x_{ji}$ . Степени предпочтений  $h$ , согласно [1, 3], приведены в табл. 1 (столбцы 1 и 2).

Таблица 1  
Вербальные шкалы степени предпочтений  
Table 1  
Verbal preference scales

Степени предпочтения 1-й альтернативы перед 2-й	Значение $h$ для АНР и мультипликативного АНР	Вероятность $p$ для метода, основанного на модели Раша
$1$	$2$	$3$
Одинаковые предпочтения	1	0,5
Слабое превосходство	3	0,6
Умеренное превосходство	5	0,7
Значительное превосходство	7	0,8
Большое превосходство	9	0,9
Однозначное предпочтение	—	1

Приведем кратко методику расчета оценок привлекательности альтернатив по мультипликативному АНР, так как далее будет проводиться сравнение оценок этого метода с оценками, полученными по модели Раша. На основании матрицы парных сравнений  $x_{ij}$  сначала находят собственные векторы для каждой альтернативы  $w_i$ , которые являются ненормированными оценками

альтернатив:  $w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_{ij}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Далее производится нормирование так, чтобы сумма

оценок равнялась единице:  $W_i = w_i / \sum_{k=1}^n w_k$ . Полученные значения  $W_i$  и будут служить оценками привлекательности альтернатив, полученными по мультипликативному АНР.

### Математический аппарат получения оценок по модели Раша

Перейдем теперь непосредственно к математическому аппарату получения оценок привлекательности альтернатив по АНР, основанному на модели Раша.

Первое отличие данного метода от традиционных расчетов по АНР заключается в получении матрицы парных сравнений, которую в подходе модели Раша будем обозначать через  $x_{ij}^{Rm}$ . Степень предпочтения одной альтернативы над другой в паре носит вероятностный характер. Для его оценивания используется некоторая вероятность  $p$ , которая имеет смысл того, что некоторый эксперт, проводящий оценку, выберет первую альтернативу по сравнению со второй. Другими словами, оценка  $p$  характеризует некоторую меру степени предпочтения одной альтернативы перед другой по линейной шкале.

На языке теории нечетких множеств величину  $p$  можно интерпретировать как функцию принадлежности первой альтернативы к категории привлекательных в группе со второй альтернативой. Такое понятие степени предпочтения менее абстрактно и более понятно, чем для традиционных методов АНР, так как характеризуется пропорциональностью выбора одной альтернативы перед другой.

Если в экспертизе участвует группа экспертов, то для расчета величины  $p$  можно использовать долю экспертов в группе, которые выбирают первую альтернативу. Кроме того, для оценки  $p$  также можно использовать вербальную шкалу предпочтений, она приведена в табл. 1 (столбцы 1 и 3).

Полученная на основании параметра  $p$  матрица парных сравнений  $x_{ij}^{Rm}$  будет обладать следующими свойствами:  $x_{ij}^{Rm} = 1 - x_{ji}^{Rm}$ ,  $x_{ii}^{Rm} = \frac{1}{2}$ .

Далее обоснуем математически методику расчета оценок привлекательности альтернатив на основе дихотомической модели Раша [5, 6].

Предположим, что эксперт путем парных сравнений на вероятностной основе пытается определить предпочтение одной альтернативы над другой.

Рассмотрим две альтернативы  $A_i$  и  $A_j$ . Обозначим  $P_{im}$  – вероятность выбора эксперта альтернативы  $A_i$  по сравнению с некоторой третьей альтернативой  $A_m$ . Соответственно, вероятность невыбора альтернативы  $A_i$  по сравнению с  $A_m$  будет равна  $(1 - P_{im})$ . Для альтернативы  $A_j$  по сравнению с  $A_m$  применяются аналогичные рассуждения. Тогда оценка степени привлекательности  $U_{ij}$  альтернативы  $A_i$  (в единицах оценки альтернативы  $A_j$ ) путем сравнения их с некой альтернативой  $A_m$  будет, согласно теореме умножения вероятностей, пропорциональна вероятности выбора  $A_i$  по сравнению с  $A_m$ , умноженной на вероятность невыбора  $A_j$  по сравнению с  $A_m$ :  $U_{ij} \sim P_{im}(1 - P_{jm})$ . Аналогично оценка привлекательности  $A_j$  по сравнению с  $A_i$  будет  $U_{ji} \sim (1 - P_{im})P_{jm}$ .

Отношение этих параметров можно записать как

$$\frac{U_{i/j}}{U_{j/i}} \Big|_m = \frac{P_{im}(1 - P_{jm})}{P_{jm}(1 - P_{im})}. \quad (1)$$

Так как не накладывалось никаких условий на промежуточную альтернативу, с которой проводилось сравнение  $A_m$ , то будет справедливо равенство

$$\frac{U_{i/j}}{U_{j/i}} \Big|_m = \frac{P_{im}(1 - P_{jm})}{P_{jm}(1 - P_{im})} = \frac{P_{ik}(1 - P_{jk})}{P_{jk}(1 - P_{ik})} = \frac{U_{i/j}}{U_{j/i}} \Big|_k. \quad (2)$$

В свою очередь из выражения (2) можно записать следующее

$$\left( \frac{P_{im}}{1 - P_{im}} \right) = \left( \frac{P_{ik}}{1 - P_{ik}} \right) \left( \frac{1 - P_{jk}}{P_{jk}} \right) \left( \frac{P_{jm}}{1 - P_{jm}} \right).$$

Тогда при  $m = j$  получим

$$\left( \frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} \right) = \left( \frac{P_{ik}}{1 - P_{ik}} \right) \left( \frac{1 - P_{jk}}{P_{jk}} \right) \left( \frac{P_{jj}}{1 - P_{jj}} \right). \quad (3)$$

Требуется получить такую методику расчета, чтобы оценки альтернатив в паре не завесили от других альтернатив, то есть отношение (3) было справедливо для оценок любых пар альтерна-

тив с номерами  $m$  и  $k$ . С целью обеспечения выполнения этого требования в качестве исходных точек для проведения сравнительного анализа возьмем уровень оценок некоторой альтернативы с индексом 0. Помимо этого необходима единая шкала измерения оценок альтернатив по произвольному критерию, при этом за точку отсчета в ней удобно принять оценку альтернативы с индексом 0. Также учтем, что значение параметра  $P_{mm}$ , а также  $P_{00}$  будет равно 0,5. Применив это (при  $k = 0$ ), получим из (3) выражение

$$\left( \frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} \right) = \left( \frac{P_{i0}}{1 - P_{i0}} \right) \left( \frac{1 - P_{j0}}{P_{j0}} \right) \left( \frac{P_{jj}}{1 - P_{jj}} \right) = \left( \frac{P_{i0}}{1 - P_{i0}} \right) \left( \frac{1 - P_{j0}}{P_{j0}} \right) = \frac{U_{i/j}}{U_{i/j}} \Big|_0. \quad (4)$$

Следует заметить, что в выражении (4) величина  $\frac{P_{i0}}{1 - P_{i0}} = b_i$  – это оценка привлекательности

альтернативы  $A_i$ , а  $\frac{1 - P_{j0}}{P_{j0}} = \frac{1}{b_j}$  – величина, обратная той же оценке альтернативы  $A_j$ . Оценки привлекательности альтернатив, полученные таким образом, не зависят от множества оцениваемых альтернатив. Учитывая также соотношение вероятностей  $P_{ij} = 1 - P_{ji}$ , можно для (4) записать

$$\frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} = \frac{P_{ij}}{P_{ji}} = \frac{b_i}{b_j}. \quad (5)$$

Таким образом, отношение оценок привлекательности альтернатив равно отношению вероятностей предпочесть одну из них другой, то есть оценки пропорциональны вероятностям выбора соответствующих им альтернатив, что и предполагалось ранее.

Найдем вероятность  $P_{ij}$ . При этом, чтобы соблюдалось свойство линейности оценок  $b_i$ , удобнее использовать их логарифмы. Прологарифмируем (5), получим:  $\ln \left( \frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} \right) = \ln(b_i) - \ln(b_j)$ .

Обозначая  $\ln b_i = W_i^{Rm}$ , можно записать:  $\ln \left( \frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} \right) = W_i^{Rm} - W_j^{Rm}$ , что аналогично  $\frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} = e^{W_i^{Rm} - W_j^{Rm}}$ , при этом параметр  $W_i^{Rm}$  будет иметь смысл ненормированной оценки привлекательности альтернативы  $A_i$ , полученной по модели Раша.

Исходя из этого, можно вычислить вероятность  $P_{ij}$  предпочтения альтернативы  $A_i$  по сравнению с альтернативой  $A_j$ :

$$P_{ij} = \frac{e^{W_i^{Rm} - W_j^{Rm}}}{1 + e^{W_i^{Rm} - W_j^{Rm}}}. \quad (6)$$

Следует отметить, что полученное выражение (6) представляет собой логистическую функцию и аналогично формуле расчета вероятностей при оценке латентных переменных по дихотомической модели Раша [5].

Перейдем теперь к вопросу нахождения оценок привлекательности альтернатив  $W_i^{Rm}$ . Тут следует отметить, что элементы матрицы парных сравнений, полученные в вероятностном подходе  $x_{ij}^{Rm}$ , имеют смысл тех же вероятностей (6), но полученных на основании экспертного мнения. Следовательно, вероятность (6) должна стремиться к эмпирическим вероятностям  $x_{ij}^{Rm}$ . Данную задачу можно решить в подходе модели Раша, основанном на методе наименьших квадратов, который описан в работах [7–10]. Согласно этому методу, параметры  $W_i^{Rm}$  модели (6) выбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических данных  $x_{ij}^{Rm}$  от расчетных вероятностей (6) была наименьшей. Математически это сводится к решению оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij}^{Rm} - P_{ij})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( x_{ij}^{Rm} - \frac{e^{w_i^{Rm} - w_j^{Rm}}}{1 + e^{w_i^{Rm} - w_j^{Rm}}} \right)^2 \rightarrow \min . \quad (7)$$

Оптимизационная задача (7) будет дополняться условием неотрицательности полученных оценок:

$$w_i^{Rm} \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (8)$$

После того как найдены оценки привлекательности альтернатив  $w_i^{Rm}$ , их необходимо нормировать так, чтобы их сумма равнялась единице:

$$W_i^{Rm} = \frac{w_i^{Rm}}{\sum_{k=1}^n w_k^{Rm}}; \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (9)$$

Полученные по формуле (9) оценки  $W_i^{Rm}$  позволят определить степень привлекательности альтернатив на основе модели Раша оценивания латентных переменных.

### Проверка адекватности полученных оценок

Для проверки адекватности оценок альтернатив по модели Раша было решено сравнить эти оценки с оценками, полученными на основе хорошо зарекомендовавшего себя и апробированного мультипликативного АНР.

Для этих целей были проведены вычислительные эксперименты по методике, описанной в работах [11–14], которые заключались в генерации различных матриц парных сравнений, на основании которых вычислялись оценки  $W_i$  и  $W_i^{Rm}$ , а затем вычислялась согласованность оценок с помощью корреляционного анализа. Связь между матрицами  $x_{ij}$  и  $x_{ij}^{Rm}$  осуществлялась в соответствии с табл. 1.

Приведем результаты одного из таких вычислительных экспериментов. Он предполагал оценивание  $n = 10$  альтернатив с матрицами парных сравнений, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

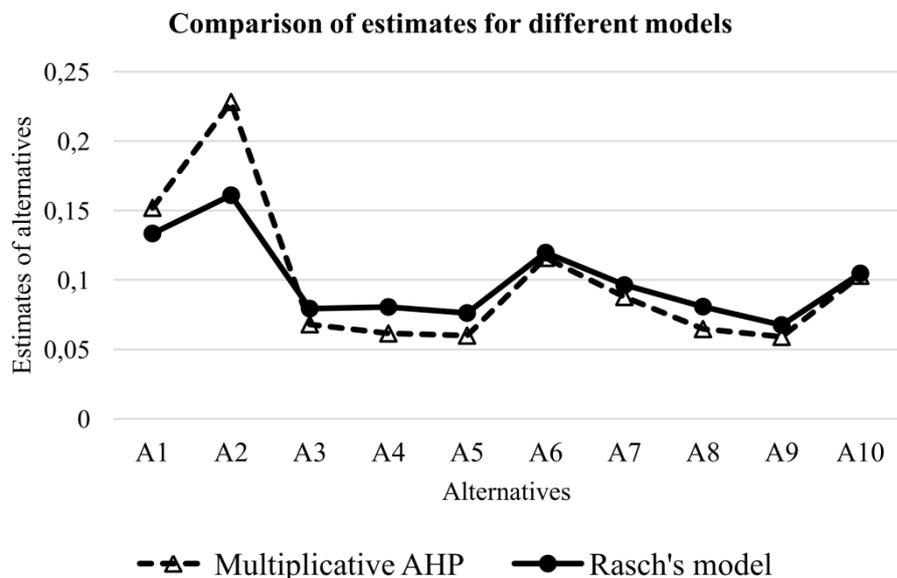
**Матрицы парных сравнений для вычислительного эксперимента**

Table 2

**Pairwise comparison matrices for computational experiment**

	Матрица $x_{ij}$										Матрица $x_{ij}^{Rm}$									
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$
$A_1$	1	1/5	1/7	3	7	5	1	9	1	7	0,5	0,3	0,2	0,6	0,8	0,7	0,5	0,9	0,5	0,8
$A_2$	5	1	7	1/7	7	9	7	1/9	9	5	0,7	0,5	0,8	0,2	0,8	0,9	0,8	0,1	0,9	0,7
$A_3$	7	1/7	1	3	5	1/7	1/7	7	1/5	1/7	0,8	0,2	0,5	0,6	0,7	0,2	0,2	0,8	0,3	0,2
$A_4$	1/3	7	1/3	1	1/7	1/3	1/5	5	3	1/5	0,4	0,8	0,4	0,5	0,2	0,4	0,3	0,7	0,6	0,3
$A_5$	1/7	1/7	1/5	7	1	3	1/7	1	7	1/5	0,2	0,2	0,3	0,8	0,5	0,6	0,2	0,5	0,8	0,3
$A_6$	1/5	1/9	7	3	1/3	1	9	7	9	1/7	0,3	0,1	0,8	0,6	0,4	0,5	0,9	0,8	0,9	0,2
$A_7$	1	1/7	7	5	7	1/9	1	7	1/5	1/7	0,5	0,2	0,8	0,7	0,8	0,1	0,5	0,8	0,3	0,2
$A_8$	1/9	9	1/7	1/5	1	1/7	1/7	1	9	7	0,1	0,9	0,2	0,3	0,5	0,2	0,2	0,5	0,9	0,8
$A_9$	1	1/9	5	1/3	1/7	1/9	5	1/9	1	9	0,5	0,1	0,7	0,4	0,2	0,1	0,7	0,1	0,5	0,9
$A_{10}$	1/7	1/5	7	5	5	7	7	1/7	1/9	1	0,2	0,3	0,8	0,7	0,7	0,8	0,8	0,2	0,1	0,5

На основании данных из табл. 2 были получены оценки привлекательности альтернатив по мультипликативному АНР и по методу, основанному на модели Раша. Результаты оценивания представлены на рисунке.



**Результаты оценивания альтернатив по мультипликативной АНР и модели Раша  
The results of evaluating alternatives by multiplicative AHP and Rasch model**

Как видно из рисунка, оценки альтернатив, полученные разными методами, достаточно согласованы, коэффициент корреляции для данного примера составит 0,977. Ранжирование альтернатив на основании оценок по разным методам также совпадает. Однако между оценками существуют и различия, что связано с различными математическими моделями обработки информации.

Было проведено около 50 аналогичных вычислительных экспериментов для различного числа альтернатив, всегда получались аналогичные результаты. Средний коэффициент корреляции оказался равным 0,972. Все это подтверждает адекватность оценок привлекательности альтернатив по АНР с математическим аппаратом, основанным на модели Раша оценки латентных переменных.

### Заключение

Предложена и математически обоснована модель обработки экспертной информации при оценке привлекательности альтернатив по методу анализа иерархий, которая основана на модели Раша оценок латентных переменных. Основные преимущества данной модели по сравнению с традиционными методами АНР следующие [15]:

- показатель превосходства одной альтернативы над другой носит вероятностный характер, поэтому он менее абстрактный и более объективный;
- оценки привлекательности альтернатив намного меньше зависят от набора оцениваемых альтернатив;
- полученные оценки альтернатив измеряются по линейной шкале.

Проведенные вычислительные эксперименты показали адекватность оценок альтернатив, полученных по модели Раша, и пригодность предложенной методики оценивания альтернатив к практическому применению.

### Список литературы

1. Saaty Thomas L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors // RACSAM. 2008. Vol. 102, no. 2. P. 251–318.
2. Drake P.R. Using the Analytic Hierarchy Process in Engineering Education // International Journal of Engineering Education. 1998. Vol. 14, no. 3. P. 191–196.
3. Lootsma F.A. Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART // J. Multi-Criteria Decision Analysis. 1993. Vol. 2. P. 87–110. DOI: 10.1002/MCDA.4020020205
4. Lootsma F.A., Schuijt H. The multiplicative AHP, SMART and ELECTRE in a common context // J. Multi-Criteria Decision Analysis. 1997. Vol. 6. P. 185–196.

5. Rasch G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Copenhagen, Denmark: Danish Institute for Educational Research, 1960.
6. Rasch Models: Foundations, Recent Developments, and Applications / Editors: G.H. Fischer, I.W. Molenaar. Springer, 1997.
7. Маслак А.А., Моисеев С.И. Модель Раша оценки латентных переменных и ее свойства: моногр. Воронеж: НПЦ «Научная книга», 2016. 177 с.
8. Моисеев С.И. Модель Раша оценки латентных переменных, основанная на методе наименьших квадратов // Экономика и менеджмент систем управления. 2015. № 2.1 (16). С. 166–172.
9. Моисеев С.И., Зенин А.Ю. Методы принятия решений, основанные на модели Раша оценки латентных переменных // Экономика и менеджмент систем управления. 2015. № 2.3 (16). С. 368–375.
10. Модель оценивания профессиональной пригодности работников, основанная на теории латентных переменных / С.А. Баркалов, Н.Ю. Калинина, С.И. Моисеев, Т.В. Насонова // Экономика и менеджмент систем управления. 2017. № 1.1 (23). С. 140–150.
11. Соколов А.В., Токарев В.В. Методы оптимальных решений. В 2 т. Т. 1: Общие положения. Математическое программирование. М.: Физматлит, 2012. 564 с.
12. Баркалов С.А., Моисеев С.И., Порядина В.Л. Математические методы и модели в управлении и их реализация в MS Excel. Воронеж: Воронеж. гос. архитектур.-строит. ун-т, 2015. 265 с.
13. Kuzmenko R.V., Moiseev S.I., Stepanov L.V. Method for measuring of latent indicators of continuous sets of original information data // Proc. 2nd Int. Ural Conf. on Measurements (UralCon). South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russian Federation. 2017. P. 211–216.
14. Averina T.A., Barkalov S.A., Moiseev S.I. Application of the Theory of Latent Variables to Personnel Management Methods // SOCIETY, INTEGRATION, EDUCATION. Proc. of the Int. Scientific Conf. May 25<sup>th</sup>–26<sup>th</sup>, 2018. Rezekne: Rezekne Academy of Technologies, 2018. Vol. VI. P. 42–52. DOI: 10.17770/sie2018vol1.3121
15. Маслак А.А., Моисеев С.И., Осипов С.А. Сравнительный анализ оценок параметров модели Раша, полученных методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 58–66.

## References

1. Saaty Thomas L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors. *RACSAM*. 2008;102(2):251–318.
2. Drake P.R. Using the Analytic Hierarchy Process in Engineering Education. *International Journal of Engineering Education*. 1998;14(3):191–196.
3. Lootsma F.A. Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART. *J. Multi-Criteria Decision Analysis*. 1993;2:87–110. DOI: 10.1002/MCDA.4020020205
4. Lootsma F.A., Schuijt H. The multiplicative AHP, SMART and ELECTRE in a common context. *J. Multi-Criteria Decision Analysis*. 1997;6:185–196.
5. Rasch G. *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhagen, Denmark: Danish Institute for Educational Research; 1960.
6. Fischer G.H., Molenaar I.W., editors. *Rasch Models: Foundations, Recent Developments, and Applications*. Springer, 1997.
7. Maslak A.A., Moiseyev S.I. *Model' Rasha otsenki latentnykh peremennykh i eye svoystva: monogr.* [Rasch model of latent variable estimation and its properties. Monograph]. Voronezh: Nauchnaya kniga; 2016. 177 p. (In Russ.)
8. Moiseev S.I. [The Rasch model for estimating latent variables based on the least squares method]. *Ekonomika i menedzhment sistem upravleniya*. 2015;2.1(16):166–172. (In Russ.)
9. Moiseev S.I., Zenin A.Yu. [Decision-making methods based on the Rasch model for estimating latent variables]. *Ekonomika i menedzhment sistem upravleniya*. 2015;2.3(16):368–375 (In Russ.)
10. Barkalov S.A., Kalinina N.Yu., Moiseev S.I., Nasonova T.V. [A model for assessing the professional suitability of employees based on the theory of latent variables]. *Ekonomika i menedzhment sistem upravleniya*. 2017;1.1(23):140–150 (In Russ.)

11. Sokolov A.V., Tokarev V.V. *Metody optimal'nykh resheniy. V 2 t. T. 1: Obshchiye polozheniya. Matematicheskoye programmirovaniye* [Methods of Optimal Solutions. In 2 vols. Vol. 1: Generalities. Mathematical Programming]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2012. 564 p. (In Russ.)
12. Barkalov S.A., Moiseev S.I., Poryadina V.L. *Matematicheskiye metody i modeli v upravlenii i ikh realizatsiya v MS Excel* [Mathematical methods and models in management and their implementation in MS Excel]. Voronezh: Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering Publ.; 2015. 265 p. (In Russ.)
13. Kuzmenko R.V., Moiseev S.I., Stepanov L.V. Method for measuring of latent indicators of continuous sets of original information data. In: *Proc. 2nd Int. Ural Conf. on Measurements (UralCon). South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russian Federation*; 2017. P. 211–216.
14. Averina T.A., Barkalov S.A., Moiseev S.I. Application of the Theory of Latent Variables to Personnel Management Methods. *SOCIETY, INTEGRATION, EDUCATION. Proc. of the Int. Scientific Conf. May 25<sup>th</sup>–26<sup>th</sup>, 2018*. Rezekne: Rezekne Academy of Technologies; 2018. Vol. VI. P. 42–52. DOI: 10.17770/sie2018vol1.3121
15. Maslak A.A., Moiseev S.I., Osipov S.A. [Comparative analysis of estimates of the Rasch model parameters obtained by maximum likelihood and least squares methods]. *Problemy upravleniya*; 2015;(5):58–66. (In Russ.)

#### **Информация об авторах**

**Баркалов Сергей Алексеевич**, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой управления, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; barkalov@vgasu.vrn.ru.

**Карпович Мирон Абрамович**, д-р техн. наук, проф. кафедры цифровой и отраслевой экономики, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; tb.gerolskih@cds.vrn.ru.

**Моисеев Сергей Игоревич**, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. кафедры управления, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; mail@moiseevs.ru.

#### **Information about the authors**

**Sergey A. Barkalov**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Management, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia; barkalov@vgasu.vrn.ru.

**Miron A. Karpovich**, Dr. Sci. (Eng.), Prof. of the Department of Digital and Industrial Economics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia; tb.gerolskih@cds.vrn.ru.

**Sergey I. Moiseev**, Cand. Sci. (Phys. and Math.), Ass. Prof., Ass. Prof. of the Department of Management, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia; mail@moiseevs.ru.

**Статья поступила в редакцию 31.03.2022**

**The article was submitted 31.03.2022**