

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПАНДЕМИИ НА ДИНАМИКУ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ ОРЕНБУРГСКОЙ ОБЛАСТИ

И.П. Болодурина¹, prmat@mail.osu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0096-2587>

Е.Л. Борщук², be@orgma.ru

И.Г. Воробьев¹, ivanexplay2000@gmail.com

Л.С. Гришина¹, grishina_ls@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2752-7198>

¹ Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия

² Оренбургский государственный медицинский университет, Оренбург, Россия

Аннотация. Прогнозируемая численность населения и её динамика являются одними из основополагающих характеристик, необходимых для проведения адекватной региональной политики. В зависимости от демографических данных могут быть приняты или отклонены рассматриваемые инфраструктурные, промышленные, сельскохозяйственные, образовательные и другие проекты как на региональном, так и на муниципальном уровнях. Предсказываемая общенациональная демографическая динамика может также качественно влиять на принимаемые государством цели и характер их исполнения. В связи с продолжающейся пандемией COVID-19 особенно актуальным является развитие методов моделирования демографической динамики, позволяющих учитывать эпидемиологическую обстановку и оценивать значимость её влияния. **Цель исследования.** Разработать модель популяционной динамики в условиях пандемии. Количественно оценить влияние пандемии на динамику смертности по Оренбургской области. Исследовать среднюю ожидаемую продолжительность жизни населения в условиях пандемии. **Материалы и методы.** Для построения численных прогнозов и идентификации функциональных параметров использованы методы регрессионного анализа, в частности, метод линейной регрессии. Кроме того, использованы методы многомерной оптимизации, численного дифференцирования и интегрирования, а также численные методы решения гиперболических задач оптимального управления. Исследование выполнено в предположении, что динамика смертности по Оренбургской области подчиняется классическому закону Гомпертца. Для нахождения начального распределения численности населения использован метод градиентного спуска Adam. **Результаты.** Оценка интегральной характеристики свидетельствует об адекватности построенной демографической модели. Разработанная модель популяционной динамики в условиях пандемии позволяет учитывать и количественно оценивать влияние пандемии на демографическую динамику. Кроме того, представленная модель обеспечивает глобальное качество прогноза с ошибкой не более 1,5 %. **Заключение.** Результаты, полученные в ходе проведенного исследования, подтверждают ухудшение средней ожидаемой продолжительности жизни в период пандемии. Кроме того, влияние внешних факторов на динамику смертности у мужчин сильнее и затрагивает более широкий возрастной диапазон. Преимуществом предложенной модели является использование только базовых, общедоступных демографических данных, что облегчает её применение.

Ключевые слова: COVID-19, популяционная динамика, средняя ожидаемая продолжительность жизни, задача преследования, гиперболическая задача оптимального управления первого порядка

Для цитирования: Количественная оценка влияния пандемии на динамику численности населения Оренбургской области / И.П. Болодурина, Е.Л. Борщук, И.Г. Воробьев, Л.С. Гришина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22, № 4. С. 141–150. DOI: 10.14529/ctcr220414

QUANTITATIVE EVALUATION OF THE PANDEMIC IMPACT ON POPULATION DYNAMICS OF THE ORENBURG REGION

*I.P. Bolodurina*¹, prmat@mail.osu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0096-2587>

*E.L. Borshchuk*², be@orgma.ru

*I.G. Vorobyov*¹, ivanexplay2000@gmail.com

*L.S. Grishina*¹, grishina_ls@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2752-7198>

¹ Orenburg State University, Orenburg, Russia

² Orenburg State Medical University, Orenburg, Russia

Abstract. The predicted population size and its dynamics are one of the fundamental characteristics necessary for an adequate regional policy. Depending on demographic data, considered infrastructure, industrial, agricultural, educational and other projects can be accepted or rejected, both at the regional and municipal levels. The predicted national demographic dynamics can also qualitatively influence the goals adopted by the state and the nature of their implementation. In connection with the ongoing COVID-19 pandemic, it is especially relevant to develop methods for modeling demographic dynamics that allow taking into account the epidemiological situation and assessing the significance of its impact. **Aim.** Develop a model of population dynamics in a pandemic. To quantitatively assess the impact of the pandemic on the dynamics of mortality in the Orenburg oblast. Explore the change in average life expectancy during a pandemic. **Materials and methods.** Regression analysis methods, in particular, the linear regression method, were used to construct numerical forecasts and identify functional parameters. In addition, methods of multidimensional optimization, numerical differentiation and integration, as well as numerical methods for solving hyperbolic optimal control problems are used. The study was carried out under the assumption that the dynamics of mortality in the Orenburg region obeys the classical Gompertz law. To find the initial population distribution, the Adam gradient descent method was used. **Results.** The evaluation of the integral characteristic indicates the adequacy of the constructed demographic model. The developed model of population dynamics in the conditions of a pandemic makes it possible to take into account and quantify the impact of the pandemic on demographic dynamics. In addition, the presented model provides global forecast quality with an error of no more than 1,5%. **Conclusion.** The results obtained in the course of the study confirm the deterioration of average life expectancy during the pandemic. In addition, the influence of external factors on the dynamics of mortality in men is stronger and affects a wide age range. The advantage of this model is the use of only basic, publicly available demographic data, which facilitates its application.

Keywords: COVID-19, population dynamics, average life expectancy, pursuit task, first-order hyperbolic optimal control problem

For citation: Bolodurina I.P., Borshchuk E.L., Vorobyov I.G., Grishina L.S. Quantitative evaluation of the pandemic impact on population dynamics of the Orenburg region. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2022;22(4):141–150. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr220414

Введение

Прогнозируемая численность населения и её динамика являются одними из основополагающих характеристик, необходимых для проведения адекватной региональной политики. В зависимости от демографических данных могут быть приняты или отклонены рассматриваемые инфраструктурные, промышленные, сельскохозяйственные, образовательные и другие проекты как на региональном, так и на муниципальном уровнях [1–4]. Предсказываемая общенациональная демографическая динамика может также качественно влиять на принимаемые государством цели [5–8] и характер их исполнения.

Однако помимо непосредственно прогнозирования крайне важной задачей является оценка влияния неординарных ситуаций на демографическую динамику для выбора интенсивности реакционных мер. А также построение стратегий принятия тех или иных решений для обеспечения

достижения заранее определённых демографических показателей. Описанная выше задача является особенно актуальной в условиях продолжающейся пандемии COVID-19, в которых возникает потребность в развитии методов моделирования демографической динамики, позволяющих учитывать эпидемиологическую обстановку и оценивать значимость её влияния.

В рамках данной работы построена модель оптимального управления динамикой численности населения. Кроме того, исследовано влияние пандемии COVID-19 на динамику численности населения Оренбургской области посредством данной модели.

1. Обзор исследований

Исследованиями в области предиктивной аналитики факторов COVID-19 и популяционной динамики занимаются ученые по всему миру. Рассмотрим работы, применяющие теорию оптимального управления к пандемии COVID-19 и к популяционной динамике.

В статье [9] исследуется влияние различных немедикаментозных стратегий для предотвращения распространения вируса и смертности от COVID-19. В данной работе изучалось влияние различных стратегий контроля как зависящих от времени вмешательств с использованием математического моделирования и подхода оптимального управления, чтобы установить их вклад в динамическую передачу заболевания COVID-19.

Авторами исследования [10] предлагается двухэтапная модель эпидемии с динамическим управлением, используемая для описания распространения коронавирусной инфекции в Китае. Исследованы стратегии управления, минимизирующие затраты на управление и обеспечивающие нормальное функционирование общества. Также рассмотрена зависимость стационарного режима модели от её параметров.

В статье [11] исследуются нелинейные зависимые от возраста модели популяционной динамики. Представленные модели благодаря своей нелинейности позволяют описывать динамику численности населения, конкурирующего за некоторый ресурс (пространство, пропитание), в отличие от моделей, основанных на законе Мальтуса.

В рамках работы [12] исследуется взаимозависимая динамика численности населения. Построенная в работе модель позволяет описывать популяции, динамика отдельных поколений которых зависит от совокупной динамики численности всей популяции.

Таким образом, наиболее распространённым подходом к моделированию динамики пандемии являются модели, оценивающие распространение коронавирусной инфекции с течением времени, но не изменение структуры населения в условиях пандемии. Среди рассмотренных методов моделирования популяционной динамики представлены разнообразные модели, тем не менее не учитывающие явно эпидемиологическую обстановку.

2. Модель оптимального управления численностью населения

Для оценки влияния COVID-19 на динамику численности населения Оренбургской области опишем модель преследования:

$$J(u) \rightarrow \min \tag{1}$$

при условии:

$$\begin{cases} \partial_\tau N + \partial_t N = -f_1(\tau, t, u_1(\tau, t))N + f_2(\tau, t, u_2(\tau, t)), \\ N(0, t) = N_0(t), \quad t \geq 0, \\ N(\tau, 0) = \tilde{\gamma}(\tau) \int_A^B N(\tau, t) dt, \end{cases} \tag{2}$$

где J – функционал качества; $\partial_\tau, \partial_t$ – частные производные по соответственным переменным; N – численность населения возраста t в момент времени τ ; $N_0(t)$ – начальное распределение численности; A, B – границы репродуктивного возраста; f_1 – управляемая интенсивность смертности; f_2 – управляемая миграция; $\tilde{\gamma}(\tau)$ – коэффициент воспроизводства популяции.

Использовать данную модель можно как для исследования влияния неординарных событий, так и для построения стратегий демографической политики.

Например,

– если $f_1 = h(t) \cdot g(u_1(\tau))$ и $J(u) = \frac{A}{2} \int_0^{t_{\max}} (N_0(t) - N(T, t))^2 dt + B \int_0^T u_1^2(\tau) d\tau$, где u_1 – капиталовложения в здравоохранение; g – зависимость изменения интенсивности смертности от

вложений в медицину, построенная на статистических данных других регионов; h – интенсивность смертности в рассматриваемом регионе; J – сумма отклонения численности в момент времени T от начальной израсходованных средств с некоторыми весовыми коэффициентами A, B . Минимизация данного функционала – поиск стратегии капиталовложений $u_1(\tau)$ такой, что при наименьших затратах будет обеспечена наименьшая смертность;

– если $f_2 = u_2(\tau, t), J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_{\max}} (N_T(t) - N(T, t))^2 dt$, где u_2 – неординарная миграция в регионе с обыкновенно околонулевой миграцией; J – отклонение фактической численности населения N_T от прогнозируемой N в момент времени T . Тогда посредством решения задачи преследования (1)–(2) методами оптимального управления можно оценить неординарную миграцию функцией u_2 , не являющейся управлением в привычном смысле этого слова.

Перейдём к модели популяционной динамики по Оренбургской области в условиях пандемии:

$$J(u) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_{\max}} (N_M(\tau', t) - N_{M\tau'}(t))^2 dt + \int_0^{t_{\max}} (N_{ж}(\tau', t) - N_{ж\tau'}(t))^2 dt \right) + \delta \int_0^{t_{\max}} \int_0^{\tau'} (u(\tau, t) - 1)^2 d\tau dt \rightarrow \min; \quad (3)$$

$$\begin{cases} \partial_{\tau} N_M + \partial_t N_M = -u_M(\tau, t) h_M(t) \cdot N_M, \\ \partial_{\tau} N_{ж} + \partial_t N_{ж} = -u_{ж}(\tau, t) h_{ж}(t) \cdot N_{ж}, \\ N_M(0, t) = N_{M0}(t), t \geq 0, \\ N_{ж}(0, t) = N_{ж0}(t), t \geq 0, \\ N_M(\tau, 0) = \gamma_M(\tau) \int_{15}^{50} N_{ж}(\tau, t) dt, \\ N_{ж}(\tau, 0) = \gamma_{ж}(\tau) \int_{15}^{50} N_{ж}(\tau, t) dt, \end{cases} \quad (4)$$

где N_M и $N_{ж}$ – численности мужского и женского населения соответственно; u_M и $u_{ж}$ – влияние факторов среды, не учтённых функциями h_M и $h_{ж}$ – интенсивностями смертности при достаточно стабильных демографических условиях; δ – нормирующий множитель.

Функции $\gamma_M(\tau)$ и $\gamma_{ж}(\tau)$ – модельные коэффициенты рождаемости, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} \gamma_M(\tau) = \frac{\alpha_1}{50-15} \left(1 - \frac{\delta(\tau)}{1000} \right) \gamma(\tau), \\ \gamma_{ж}(\tau) = \frac{\alpha_2}{50-15} \left(1 - \frac{\delta(\tau)}{1000} \right) \gamma(\tau), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \end{cases} \quad (5)$$

где α_1, α_2 – доли мальчиков и девочек среди рождённых; $\gamma(\tau)$ – суммарный коэффициент рождаемости; $\delta(\tau)$ – коэффициент младенческой смертности на 1000 человек.

Модельные коэффициенты рождаемости представляет собой среднее количество рождённых детей одной женщиной в зависимости от пола, избежавших смерти в младенческом возрасте, делённое на среднюю продолжительность репродуктивного возраста.

Миграционные слагаемые полагаются равными нулю, так как на основе имеющихся демографических данных [13] можно увидеть, что суммарный миграционный прирост/снижение по Оренбургской области за 2019 и 2020 годы равен соответственно -237 и -624 человек, что пренебрежимо мало по отношению к общей численности Оренбургской области $\sim 1,9$ млн чел.

Из формул (3)–(5) следует, что для нахождения неучтённых факторов среды в период пандемии необходимо знать значения $h(t), N_0(t), \alpha_1, \alpha_2, \gamma(\tau), \delta(\tau)$.

3. Восстановление функциональных параметров модели

Для восстановления интенсивностей смертности предположим, что динамика смертности по Оренбургской области подчиняется классическому закону Гомпертца, тогда

$$h(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad (6)$$

где α – начальная интенсивность смертности; β – относительная скорость нарастания интенсивности смертности. Используя методы регрессионного анализа, получили следующие значения параметров (табл. 1).

Таблица 1

Результаты аппроксимации

Table 1

Approximation results

	α	β	R^2
Мужчины	0,000321	0,07514	0,9989
Женщины	0,000074	0,08569	0,9981

Отклонение менее чем на 0,002 от 1 коэффициента детерминации говорит о соответствии динамики смертности по Оренбургской области классическому закону Гомпертца.

Для нахождения начальных распределений $N_0(t)$ используем метод градиентного спуска Adam для некоторого кубического сплайна. Основная идея данного подхода состоит в том, чтобы построить кубический сплайн такой, что его интегралы по возрасту наименьшим образом отклоняются от известных из демографических данных численностей возрастных категорий.

Для нахождения параметров модельных коэффициентов рождаемости используем методы линейной регрессии.

На основе имеющихся данных за 2020 и 2021 годы [13] можно выполнить следующие расчёты:

$$\alpha_1 = \frac{9621}{9621+8992} \approx \frac{10126}{10126+9467} \approx 0,5168.$$

$$\text{Тогда } \alpha_2 = 1 - 0,5168 = 0,4832.$$

Для нахождения $\delta(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ решим задачу линейной регрессии на демографических данных по Оренбургской области. Регрессия будет осуществляться таким образом, чтобы $\delta(0)$ и $\gamma(0)$ равнялись своим значениям за 2020 год (табл. 2).

Таблица 2

Результаты линейной регрессии

Table2

Linear regression results

$f = at + b$	a	b	R^2
$\gamma(\tau)$	-0,091	1,52	0,9511
$\delta(\tau)$	-0,85	3,65	0,9897

4. Численное моделирование популяционной динамики в условиях пандемии

Рассмотрим условия теоремы [14] о необходимом условии оптимальности решения задачи (3)–(4) оптимального управления численностью населения в зависимости от возраста.

1. Предполагается, что функции в правой части квазилинейны по N_m, N_j . В обозначениях теоремы имеем, что $f_1 = -u(\tau, t)h(t)$, $f_2 = 0$, $g_1 = \gamma(\tau)$, $g_2 = 0$, $h(\tau, t_0, N) = 0 = h_1N + h_2$, $L_{T_1} = 0$, $L_{T_2} = \frac{1}{2}(N(\tau', t) - N_{\tau'}(t))^2$, $L_1 = 0$, $L_2 = \delta(u(\tau, t) - 1)^2$.

2. f_1 – диагональная матрица, так как в рамках данной задачи f_1 – скаляр.

3. Функции g_2 , h_2 , L_{T_2} , L_2 имеют компактный носитель. Для g_2 и h_2 выполняются тривиально. Компактность носителей L_{T_2} и L_2 следует из рассмотрения задачи на замкнутом и ограниченном временном и возрастном интервалах.

4. Условия на измеримость, непрерывность, дважды дифференцируемость и ограниченность полагаются очевидными.

5. Ограниченность начального условия следует из его восстановления кубическими сплайнами.

6. Для f_2 и $h(\tau, t_0, N)$ неотрицательность – тривиальна. Для $g = g_1N + g_2$ выполняется при неотрицательности $\gamma(\tau)$, что верно при $\tau < 16,7$ для восстановленных модельных коэффициентов рождаемости.

Таким образом, используя алгоритмы численного решения поставленной задачи, можно найти решение, подозрительное на оптимальность.

Для численного решения задачи оптимального управления построим её функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 &L(N_M, N_{ж}, u_M, u_{ж}, q_M, q_{ж}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_{\max}} (N_M(\tau', t) - N_{M\tau'}(t))^2 dt + \int_0^{t_{\max}} (N_{ж}(\tau', t) - N_{ж\tau'}(t))^2 dt \right) + \\
 &+ \delta \int_0^{t_{\max}} \int_0^{\tau'} (u(\tau, t) - 1)^2 d\tau dt - \int_0^{\tau'} \int_0^{t_{\max}} q_M(\tau, t) (N_{M\tau} + N_{Mt} + u_M h_M N_M) dt d\tau - \\
 &- \int_0^{\tau'} \int_0^{t_{\max}} q_{ж}(\tau, t) (N_{ж\tau} + N_{жt} + u_{ж} h_{ж} N_{ж}) dt d\tau.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Составим соответствующие сопряжённые уравнения:

$$\begin{cases}
 q_{M\tau} + q_{Mt} = u_M h_M q_M, \\
 q_{ж\tau} + q_{жt} = u_{ж} h_{ж} q_{ж}, \\
 q_M(\tau', t) = N_M(\tau', t) - N_{M\tau'}(t), \\
 q_{ж}(\tau', t) = N_{ж}(\tau', t) - N_{ж\tau'}(t), \\
 q_M(\tau, t_{\max}) = 0, \\
 q_{ж}(\tau, t_{\max}) = 0.
 \end{cases} \tag{8}$$

Найдём управления из условия равенства производной функции Лагранжа по управлению нулю:

$$\begin{aligned}
 u_M(\tau, t) &= 1 + \frac{h_M(\tau) q_M(\tau, t) N_M(\tau, t)}{\delta}, \\
 u_{ж}(\tau, t) &= 1 + \frac{h_{ж}(\tau) q_{ж}(\tau, t) N_{ж}(\tau, t)}{\delta}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда опишем дискретную постановку задачи (3)–(4) для описания численного алгоритма нахождения решения:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{t_{\max}/\Delta t} (N_{M\tau'/\Delta\tau, j} - N_{M\tau' j}^{\tau'})^2 \Delta t + \sum_{j=0}^{t_{\max}/\Delta t} (N_{ж\tau'/\Delta\tau, j} - N_{ж\tau' j}^{\tau'})^2 \Delta t \right) + \\
 &+ \delta \sum_{i=0}^{\tau'/\Delta\tau} \sum_{j=0}^{t_{\max}/\Delta t} (u_{i, j} - 1)^2 \Delta t \Delta \tau \rightarrow \min;
 \end{aligned} \tag{3'}$$

$$\begin{cases}
 \frac{N_{Mi+1, j} - N_{Mi, j}}{\Delta\tau} + \frac{N_{Mi, j+1} - N_{Mi, j}}{\Delta t} = -u_{Mi, j} h_{Mj} \cdot N_{Mi, j}, \\
 \frac{N_{жi+1, j} - N_{жi, j}}{\Delta\tau} + \frac{N_{жi, j+1} - N_{жi, j}}{\Delta t} = -u_{жi, j} h_{жj} \cdot N_{жi, j}, \\
 N_{M0, j} = N_{Mj}^0, \quad t \geq 0, \\
 N_{ж0, j} = N_{жj}^0, \quad t \geq 0, \\
 N_{Mi, 0} = \gamma_{Mi} \sum_{j=15/\Delta t}^{50/\Delta t} N_{жi, j} \Delta t, \\
 N_{жi, 0} = \gamma_{жi} \sum_{j=15/\Delta t}^{50/\Delta t} N_{жi, j} \Delta t,
 \end{cases} \tag{4'}$$

где Δt и $\Delta \tau$ – шаги в равномерных сетках по времени и по возрасту соответственно.

Тогда алгоритм численного решения нелинейной гиперболической задачи оптимального управления с ДУ в ЧП имеет вид [15]:

1. Задаём значения $u_{Mi, j}^0$ и $u_{жi, j}^0$ для любой пары (i, j) .
2. Из системы (4') вычисляем соответственные траектории N_M^0 и $N_{ж}^0$.
3. Вычисляем значение функционала J^0 .
4. Если $J^0 \leq \varepsilon_j$ или $|J^m - j^{m-1}| \leq \varepsilon_{\Delta j}$, то решение получено, иначе
5. Находим сопряженные множители q^0 , аналогично N^0 .
6. Вычисляем новое управление u^1 путём минимизации функции Лагранжа.
7. Переходим к шагу 2.

Отметим, что величины ε_j и $\varepsilon_{\Delta j}$ – допустимая точность приближения и допустимая точность сходимости соответственно.

Используя данный алгоритм, построили распределение численности на 1 января 2021 года, характеризующее следующими отклонениями от фактических численностей возрастных категорий (табл. 3).

Таблица 3

Оценка точности моделируемого распределения на 1 января 2021 года

Table 3

Estimation of the accuracy of the simulated distribution as of January 1, 2021

t_{0i}	Отклонение от n_i , %		t_{0i}	Отклонение от n_i , %	
	Мужчины	Женщины		Мужчины	Женщины
0	-0,64	-0,58	25	1,42	1,70
1	0,04	0,79	30	-1,46	-1,60
2	-0,02	0,05	35	2,74	2,65
3	-1,09	-1,06	40	-3,15	-2,36
6	3,91	1,31	45	3,17	2,79
7	0,60	0,72	50	-3,16	-2,44
8	0,12	-0,46	55	1,45	1,63
14	-1,43	2,80	60	-0,52	-0,70
16	0,88	-0,53	65	-0,68	-1,73
18	0,64	3,49	70	-1,80	1,74
20	-1,01	-1,96			

5. Количественная оценка влияния пандемии

В соответствии с законом Гомпертца и выражения $u(\tau, t)h(t) = \alpha u(\tau, t)e^{\beta t} = \alpha e^{\beta t + \ln(u(\tau, t))}$ получим, что $\ln(u(\tau, t))$ – зависящая от времени нелинейная компонента относительной скорости нарастания интенсивности смертности. Обозначим также величину $\beta t + \ln(u(\tau, t))$ как темп нарастания интенсивности смертности. Построим графики для рассматриваемых величин (рис. 1).

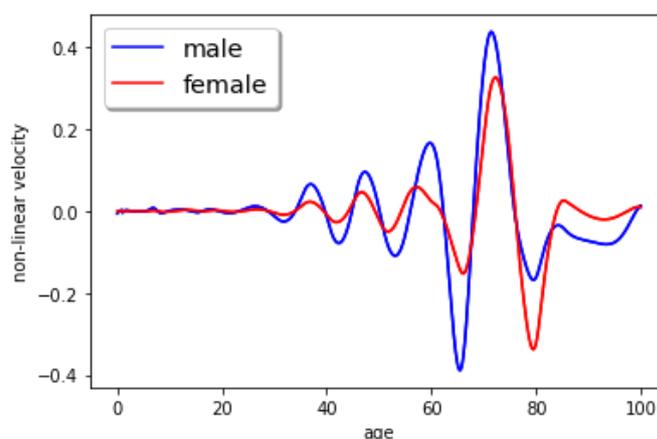


Рис. 1. Графики $\ln(u_m(1, t))$ и $\ln(u_j(1, t))$
Fig. 1. Graph of $\ln(u_m(1, t))$, $\ln(u_j(1, t))$

Из анализа темпа нарастания интенсивности смертности можно отметить, что неординарные внешние факторы играют заметную роль для возрастных категорий 60–80 у мужчин и 62–85 у женщин. Кроме того, влияние внешних факторов на динамику смертности у мужчин сильнее и затрагивает больший возрастной диапазон.

Для оценки доли влияния пандемии COVID-19 на динамику смертности по Оренбургской области рассмотрим функции:

$$\delta_m(\tau, t) = \ln(u_m(\tau, t)) - \ln(u_{m2019}(\tau - 1, t))$$

и

$$\delta_j(\tau, t) = \ln(u_j(\tau, t)) - \ln(u_{j2019}(\tau - 1, t)),$$

где u_{m2019} и u_{j2019} – функции, полученные аналогично u_m и u_j на основе данных за 2019 год (до пандемии).

Построим графики функции $\delta_m(1, t)$ и $\delta_j(1, t)$ (рис. 2).

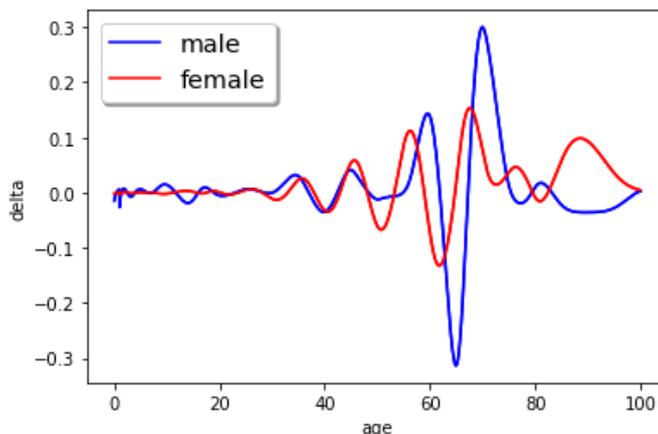


Рис. 2. Графики $\delta_m(1, t)$ и $\delta_j(1, t)$
Fig. 2. Graph of $\delta_m(1, t)$, $\delta_j(1, t)$

Величины $\delta_m(\tau, t)$ и $\delta_j(\tau, t)$ представляют собой очищенное от влияния внешних сезонных и возрастных факторов, полагаемых ординарными (действовавшими в доковидный год), влияние не учтённых моделью факторов.

Тем самым величины $\delta_m(\tau, t)$ и $\delta_j(\tau, t)$ можно интерпретировать как влияние пандемии в целом, т. е. влияние как самого вируса, так и ответных действий на него. Из построенного выше графика следует, что наибольшее влияние пандемия оказала на 55–80-летних среди мужчин и 55–70-летних среди женщин. Из амплитуд (для мужчин максимальная амплитуда – порядка 0,3, для женщин – 0,15) полученных кривых можно сделать вывод, что пандемия оказала большее влияние на мужчин, чем на женщин, однако волнообразный характер полученных кривых может свидетельствовать также о зашумлённости восстановленного начального распределения численности населения.

Тогда для проверки адекватности модели рассмотрим величину, независимую от точного вида распределения численности.

По определению средняя ожидаемая продолжительность жизни (СОПЖ) – математическое ожидание случайной величины «Вероятность умереть в возрасте t ».

Распределение данной случайной величины в рамках управляемой модели имеет вид

$$F_\tau(t_i) = \frac{1}{\sum_s m_s} \sum_{k=1}^i m_k, \quad (10)$$

где $m_k = N(\tau, t_{k+1}) - N(\tau - \Delta\tau, t_k)$ – количество умерших за время $\Delta\tau$ людей возраста t_k .

Тогда СОПЖ μ_τ вычисляется по формуле

$$\mu_\tau = \int_0^{t_{\max}} t dF_\tau = \sum_i t_i \frac{F_\tau(t_{i+1}) - F_\tau(t_i)}{\Delta t} \Delta t. \quad (11)$$

Построим графики μ_{m_τ} и μ_{j_τ} при $\tau \in [0; 1]$ – СОПЖ для мужчин и женщин соответственно в течение 2020 года (рис. 3, 4).

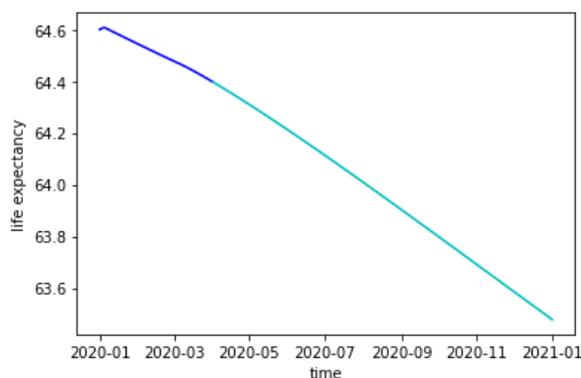


Рис. 3. График СОПЖ μ_{m_τ}
Fig. 3. Graph of ALE μ_{m_τ}

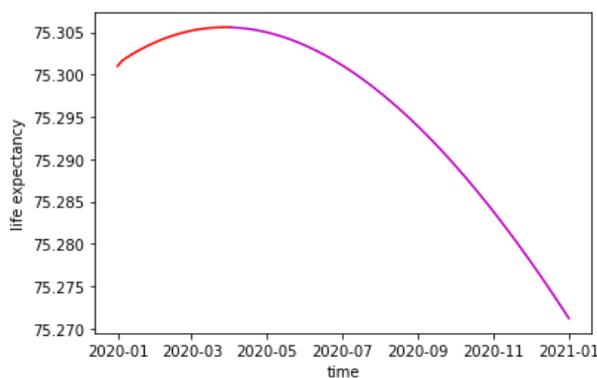


Рис. 4. График СОПЖ μ_{j_τ}
Fig. 4. Graph of ALE μ_{j_τ}

На основе рис. 3, 4 можно заключить, что, во-первых, средняя продолжительность жизни среди мужчин падает быстрее, чем у женщин. Во-вторых, начиная с $\tau \approx 0,2-0,25$, у мужчин увеличивается скорость, а у женщин начинается падение средней ожидаемой продолжительности жизни.

Данный временной промежуток соответствует периоду, начинающемуся в конце февраля и заканчивающемуся в конце марта, – появлению COVID-19 в Оренбургской области.

Полученный результат свидетельствует об адекватности построенной модели оптимального управления как для описания динамики населения, так и для количественной оценки влияния пандемии на демографическую динамику. При этом пандемия COVID-19 довольно сильно повлияла на демографическую структуру населения Оренбургской области.

Заключение

Таким образом, в рамках данной работы разработана модель динамики численности населения в условиях пандемии. Преимуществами данной модели является, во-первых, высокое качество прогнозов при моделировании краткосрочной динамики, во-вторых, для инициализации функциональных параметров модели необходимы только базовые, общедоступные демографические данные, что облегчает её применение.

Результаты проведенных экспериментов показали, что построенная модель обеспечивает глобальное качество прогноза порядка 1,5 %, а суммарное абсолютное отклонение равно 32 457 чел. при населении Оренбургской области 1 942 915 чел. Оценка построенной модели интегральной характеристикой, не зависящей от точного вида распределения численности, средней ожидаемой продолжительностью жизни свидетельствует об адекватности построенной модели демографической действительности, а также о значимом негативном влиянии пандемии на продолжительность жизни обоих полов.

Список литературы/References

1. Drummond P. Assessing City governance for low-carbon mobility in London. *Sustainability*. 2021;13(5):2480. DOI: 10.3390/su13052480
2. Faure J.C., Faust K.M. Socioeconomic characteristics versus density changes: The operational effects of population dynamics on water systems. In: *Sustainable and Resilient Infrastructure*; 2020. P. 1–14. DOI: 10.1080/23789689.2020.1757882
3. Jones C.A., Kandel W., Parker T. Population dynamics are changing the profile of rural areas. *Journal of Rural Mental Health*. 2007;31(3):46–53. DOI: 10.1037/h0095944
4. Selvarajah S. Effective human wastewater management in rapidly growing towns in sensitive receiving environment-A perspective on Queenstown-Lakes District Area. Available at: https://www.researchgate.net/publication/274700834_Effective_human_wastewater_management_in_rapidly_growing_towns_in_sensitive_receiving_environment_-_A_perspective_on_Queenstown-Lakes_District_Area_New_Zealand_A_KEYNOTE_Presentation (accessed 13.07.2022).
5. Busilac A.J. The Relationship between Population Dynamics and Investments for Energy and Telecommunication Infrastructures in the Philippines. Available at: <https://mpr.ub.uni-muenchen.de/51845/> (accessed 13.07.2022).
6. Faust K.M., Kaminsky J.A. Population dynamics and the resiliency of water and wastewater infrastructure. In: *Routledge Handbook of Sustainable and Resilient Infrastructure*; 2018. P. 341–358.
7. Hummel D., Lux A. Population decline and infrastructure: The case of the German water supply system. In: *Vienna yearbook of population research*; 2007. P. 167–191. DOI: 10.1553/populationyearbook2007s167
8. Liu Y., Westelius N. The impact of demographics on productivity and inflation in Japan. *Journal of International Commerce, Economics and Policy*. 2017;8(02):1750008. DOI: 10.5089/9781475559712.001
9. Madubueze C.E., Dachollom S., Onwubuya I.O. Controlling the spread of COVID-19: optimal control analysis]. In: *Computational and Mathematical methods in Medicine*. 2020. P. 6862516–6862516. DOI: 10.1155/2020/6862516
10. Lü, X. et al. Stability and optimal control strategies for a novel epidemic model of COVID-19. *Nonlinear Dynamics*. 2021;106(2):1491–1507. DOI: 10.1007/s11071-021-06524-x
11. Gurtin M.E., MacCamy R.C. Non-linear age-dependent population dynamics]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1974;54(3):281–300. DOI: 10.1007/BF00250793

12. Murphy L.F. A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics]. *Journal of theoretical biology*. 1983;104(4):493–506. DOI: 10.1016/0022-5193(83)90242-4
13. Григорьева Л.К., Кузьмин С.А. Медико-демографические показатели Оренбургской области // Справочник врача общей практики. 2021. № 2. С. 65–71. Grigorieva L.K., Kuzmin S.A. Medical and demographic indicators of the Orenburg region. *Reference book of a general practitioner*. 2021;(2):65–71. (in Russ.)]. DOI: 10.33920/med-10-2102-07
14. Brokate M. Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics. *Journal of Mathematical Biology*. 1985;23(1):75–101. DOI: 10.1007/BF00276559
15. Herty M., Kurganov A., Kurochkin D. Numerical method for optimal control problems governed by nonlinear hyperbolic systems of PDEs. *Communications in Mathematical Sciences*. 2015;13(1):15–48.

Информация об авторах

Болодурина Ирина Павловна, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой прикладной математики, Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия; prmat@mail.osu.ru.

Борщук Евгений Леонидович, д-р мед. наук, проф., заведующий кафедрой общественного здоровья и здравоохранения, Оренбургский государственный медицинский университет, Оренбург, Россия; be@orgma.ru.

Воробьев Иван Григорьевич, студент кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия; ivanexplay2000@gmail.com.

Гришина Любовь Сергеевна, аспирант кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия; grishina_ls@inbox.ru.

Information about the authors

Irina P. Bolodurina, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Applied Mathematics, Orenburg State University, Orenburg, Russia; prmat@mail.osu.ru.

Evgeny L. Borshchuk, Dr. Sci. (Med.), Prof., Head of the Department of Public Health and Healthcare, Orenburg State Medical University, Orenburg, Russia; be@orgma.ru.

Ivan G. Vorobyov, Student of the Department of Applied Mathematics, Orenburg State University, Orenburg, Russia; ivanexplay2000@gmail.com.

Lubov S. Grishina, Postgraduate Student of the Department of Applied Mathematics, Orenburg State University, Orenburg, Russia; grishina_ls@inbox.ru.

Статья поступила в редакцию 27.06.2022

The article was submitted 27.06.2022