

Управление в технических системах Control in technical systems

Научная статья
УДК 501, 533, 004.021
DOI: 10.14529/ctcr230306

СОПОСТАВЛЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ РАВНОВЕСНОЙ И КONTИНУАЛЬНОЙ МЕТОДИК МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД НА ПРИМЕРЕ ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ

Д.А. Тукмаков, tukmakovda@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>

Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение
Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный
исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия

Аннотация. Работа посвящена проблемам математического моделирования гидродинамических процессов в неоднородных средах. **Цель исследования** состоит в сопоставлении методик моделирования течений неоднородных сред. Сопоставлялись континуальная и равновесная методики моделирования динамики газовзвеси – газа с дисперсными включениями. Сравнивались расчеты, проведенные равновесной математической моделью динамики газовзвеси с численными реализациями континуальных математических моделей динамики газовзвеси с идеальной и вязкой теплопроводной несущей средой. Сопоставлялись различные параметры моделируемых процессов, полученных различными математическими моделями. **Материалы и методы.** В работе представлены две методики моделирования динамики многофазных сред. В равновесной методике неоднородная среда описывается как идеальный газ с расчетом поправочных коэффициентов газодинамических функций, в континуальной методике моделирования для частиц вводится понятие «средней плотности», таким образом и для несущей фазы – газа – и для дисперсной фазы решается система уравнений, состоящая из уравнения сохранения плотности, для дисперсной фазы – уравнения сохранения «средней плотности», уравнений сохранения импульса компонент смеси и уравнений сохранения энергии газа и дисперсной фазы. Системы уравнений движения однофазной и двухфазной сред интегрировались численным конечно-разностным методом второго порядка точности. Для подавления численных осцилляций на каждом временном шаге применялся метод нелинейной коррекции сеточной функции. Программный комплекс моделирования динамики газовзвеси состоял из нескольких компонент: подпрограмма задания граничных условий, подпрограмма формирования конечно-разностного разбиения физической области, основная программа расчета динамики неоднородной среды. **Результаты.** Моделировался процесс распада разрыва в однородном газе и в газовзвеси. Численные расчеты распада разрыва давления в однородном газе и численные расчеты распада разрыва в газовзвеси, полученные равновесной методикой моделирования, сопоставлялись с аналитическими решениями, известными из литературы. Определено, что наибольшая скорость распространения возмущения в газовзвеси наблюдается в равновесной модели, меньшая скорость распространения – в континуальной модели с идеальной средой, наименьшая скорость наблюдается в газовзвеси с вязкой теплопроводной средой. Выявлено, что для течений с различными начальными интенсивностями разрыва давления наличие дисперсной фазы в смеси оказывает различное влияние. **Выводы.** Полученные закономерности демонстрируют особенности каждой из методик моделирования динамики газовзвеси, что возможно использовать при разработке компьютерных моделей динамики многофазных сред.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, численные модели, многофазные среды, газовзвеси, равновесная модель, континуальная модель

Благодарности. Работа выполнена по теме «Развитие динамики многофазных сред, аэрогидроупругих систем и механики оболочек с приложениями в машиностроении и нефтедобыче» № 121021800126-4 в рамках государственного задания ФИЦ КазНЦ РАН.

Для цитирования: Тукмаков Д.А. Сопоставление компьютерных реализаций равновесной и континуальной методик моделирования многофазных сред на примере одномерного нестационарного течения газовзвеси // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2023. Т. 23, № 3. С. 59–75. DOI: 10.14529/ctcr230306

COMPARISON OF COMPUTER IMPLEMENTATIONS OF EQUILIBRIUM AND CONTINUOUS METHODS FOR MODELING MULTI-PHASE MEDIA ON THE EXAMPLE OF A ONE-DIMENSIONAL UNSTATIONARY GAS SUSPENSION FLOW

D.A. Tukmakov, tukmakovda@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>

Institute of Mechanics and Engineering – Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russia

Abstract. The work is devoted to the problems of mathematical modeling of hydrodynamic processes in inhomogeneous media. **The purpose** of the study is to compare the techniques for modeling the flows of inhomogeneous media. The continuum and equilibrium methods of modeling the dynamics of a gas suspension – a gas with dispersed inclusions – were compared. Comparisons were made between calculations carried out by an equilibrium mathematical model of the dynamics of gas suspensions with numerical implementations of continual mathematical models of the dynamics of gas suspensions with an ideal and viscous heat-conducting carrier medium. Various parameters of the simulated processes obtained by various mathematical models were compared. **Materials and methods.** The paper presents two methods for modeling the dynamics of multiphase media. In the equilibrium method, an inhomogeneous medium is described as an ideal gas with the calculation of the correction coefficients of gas-dynamic functions, in the continuum modeling method for particles, the concept of “average density” is introduced; thus, for both the carrier phase – gas and the dispersed phase, a system of equations is solved consisting of the density conservation equation, for of the dispersed phase, the “average density” conservation equation, the momentum conservation equations of the mixture components, and the energy conservation equations of the gas and dispersed phase. The systems of equations of motion of single-phase and two-phase media were integrated by a numerical finite-difference method of the second order of accuracy. To suppress numerical oscillations at each time step, the method of nonlinear correction of the grid function was used. The software package for modeling the dynamics of a gas suspension consisted of several components: a subroutine for setting the boundary conditions, a subroutine for the formation of a finite-difference partition of a physical domain, and the main program for calculating the dynamics of an inhomogeneous medium. **Results.** The discontinuity decay process in a homogeneous gas and in a gas suspension was modeled. Numerical calculations of pressure discontinuity decay in a homogeneous gas and numerical calculations of discontinuity decay in a gas suspension, obtained by the equilibrium modeling technique, were compared with analytical solutions known from the literature. It is determined that the highest propagation velocity of a disturbance in a gas suspension is observed in an equilibrium model, a lower propagation velocity in a continuum model with an ideal medium, and the lowest velocity is observed in a gas suspension with a viscous heat-conducting medium. It was found that for flows with different initial pressure discontinuity intensities, the presence of a dispersed phase in the mixture has a different effect. **Conclusions.** The regularities obtained demonstrate the features of each of the methods for modeling the dynamics of gases, which can be used in the development of computer models of the dynamics of multiphase media.

Keywords: computer simulation, numerical models, multiphase media, gas suspensions, equilibrium model, continuum model

Acknowledgments. The work was carried out on the topic “Development of the dynamics of multiphase media, aerohydroelastic systems and shell mechanics with applications in mechanical engineering and oil production” No. 121021800126-4 within the framework of the state task of the Federal Research Center of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Tukmakov D.A. Comparison of computer implementations of equilibrium and continuous methods for modeling multi-phase media on the example of a one-dimensional unstationary gas suspension flow. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2023;23(3):59–75. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr230306

Введение

Одной из задач компьютерных технологий является разработка программ компьютерного моделирования динамических процессов в механике жидкости и газа [1–22]. Несмотря на наличие различных пакетов моделирования, в том числе коммерческих, по-прежнему актуальным является разработка программ компьютерного моделирования течения сплошных сред. Одним из развивающихся разделов механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред [4–6]. Основной сложностью моделирования таких процессов является учет взаимодействия компонент смеси или же учет влияния дисперсных компонент примеси на динамику несущей среды – жидкости или газа. В моделировании динамики неоднородных сред в литературе есть несколько подходов. Моделирование течений неоднородных сред как однородной жидкости или газа с добавлением коэффициентов, учитывающих неоднородность движущейся среды, – равновесный подход. В этом случае система уравнений движения включает в себя уравнения сохранения плотности, импульса и энергии для всей смеси в целом. Также моделирование динамики неоднородных сред возможно с помощью решения полной гидродинамической системы уравнений для каждой из компонент смеси с учетом взаимодействия компонент – континуальный подход моделирования динамики неоднородных сред. В данной работе проводится сопоставление равновесного и континуального подходов моделирования динамики неоднородных сред. В монографии [4] представлены теоретические основы моделирования динамики неоднородных сред. В монографиях [5, 6] представлены различные математические модели динамики запыленных сред, реализующие континуальную методику динамики неоднородных сред. В работе [7] в рамках акустического приближения рассматривались процессы распространения акустических возмущений в газокапельных средах с учетом конденсации капельной фазы. В исследовании [8] получена математическая модель течения двухкомпонентной сжимаемой смеси, моделировалось взаимодействие ударной волны с газокапельной взвесью. В публикации [9] численно моделировалась многофазное течение с фазовыми переходами. Модель состоит из уравнений динамики многокомпонентной невязкой среды. В работе [10] исследовалась неустойчивость тонкого слоя вязкой жидкости в линейном и нелинейном приближениях. Получены аналитические решения системы уравнений динамики сплошных сред. В работе [11] численно исследовано распространение цилиндрической ударной волны и ее взаимодействие с прилегающим слоем гетерогенной двухфазной среды. Получена технология, позволяющая проводить численное исследование динамики распространения цилиндрических ударных волн в областях, заполненных гетерогенными смесями. В публикации [12] рассматривались проблемы компьютерного моделирования течений в управляемых газоструйных системах и гидродневоагрегатах, в конструкцию которых входят кольцевые сопла с различной геометрией в случае, когда движущаяся среда имеет многокомпонентный состав. В публикации [13] представлена математическая модель, использующая уравнение полной энергии, для численного исследования распространения ударных волн в гетерогенных двухфазных средах. Анализировались результаты расчетов течений аэрозолей, проведенных методами крупных частиц. В публикации [14] представлены расчеты в пакете ANSYS течения в проточной части вихревого расходомера. Исследовалась возможность оптимизации процесса расчетов течений в вихревом расходомере. В публикации [15] разработана равновесная модель односкоростной теплопроводной гетерогенной смеси, в которой учтен теплообмен между компонентами смеси. Для полученной математической модели разработан численный алгоритм решения методом Годунова.

Анализ литературы демонстрирует, что разработка компьютерных алгоритмов моделирования процессов гидрогазодинамики однородных и неоднородных сред на данный момент является актуальной проблемой компьютерных технологий. В данной работе проводятся расчеты одномерных течений неоднородной среды – газозвеси, в которой масса дисперсной компоненты равна массе несущей среды. Расчеты проведены с помощью двух различных методик моделирования течений неоднородных сред, результаты расчетов сопоставляются. Новизна исследования заключается в сравнении параметров характеристик течений, описываемых разными методиками моделирования. Выявленные сопоставлением особенности методик моделирования течений газозвесей могут быть использованы при разработке компьютерных программ моделирования течений неоднородных сред.

Математическая модель

Для нестационарного течения с одномерной геометрией, уравнения движения газа можно записать в виде [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \delta_{ij}\tau) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left([e + p - \delta_{ij}\tau]u + \delta_{ij}\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, течение вязкой среды описывается при $\delta_{11} = 1$, течение идеального газа при $\delta_{12} = 0$; p, ρ, u, T, e – давление, плотность, скорость, температура и полная энергия газа. Равновесная модель динамики газозвеси описывается системой уравнений [4]:

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_E u_E)}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho_E u_E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_E u_E^2 + p_E) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial(e_E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}([e_E + p_E]u_E) = 0. \quad (6)$$

В равновесной модели применяются те же обозначения, что и для однородного газа с индексом «E». Для записи параметров системы используются следующие выражения:

$$\rho_{E0} = (1 - \alpha)\rho_{10} + \alpha\rho_{20}; \quad T_E = e_E/c_{VE};$$

$$R_E = (1 - \alpha)\rho_{10}R((1 - \alpha)\rho_{10} + \alpha\rho_{20})^{-1};$$

$$p_E = \rho_E R_E T_E; \quad c_{VE} = c_{pE} - R_E; \quad \gamma_E = c_{pE}/c_{VE};$$

$$c_{pE} = ((1 - \alpha)\rho_{10}c_{p1} + \alpha\rho_{20}c_{p2})((1 - \alpha)\rho_{10} + \alpha\rho_{20})^{-1};$$

$$c_E = c\sqrt{(1 - \alpha)\rho_{10}\gamma_E(\gamma(1 - \alpha)\rho_{10} + \alpha\gamma\rho_{20})^{-1}}.$$

Здесь R_E, R – газовые постоянные газа и смеси; c_{p1}, c_{p2} – теплоемкости при постоянном давлении газа и дисперсной компоненты; c_{pE}, c_{VE}, c_E – теплоемкость при постоянном давлении смеси, теплоемкость при постоянном объеме смеси, скорость звука в смеси; γ, γ_E – постоянная адиабаты газа и смеси; $\alpha, \rho_{10}, \rho_{20}$ – объемное содержание, физическая плотность газа и дисперсной компоненты.

Континуальная математическая модель одномерного течения газозвеси описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \delta_{ij}\tau) = -F + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left([e_1 + p - \delta_{ij}\tau]u_1 + \delta_{ij}\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = -\delta_{ij}Q - |F|(u_1 - u_2) - \alpha \left(\frac{\partial(pu_1)}{\partial x} \right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) = F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) = -\delta_{ij}Q. \quad (12)$$

Индексами «1» и «2» обозначены физические параметры несущей и дисперсной фазы газовой смеси. Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \alpha_2 \rho_{20}; \\ e_2 &= \rho_2 C_{p2} T_2; \\ \tau &= \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x}; \\ F &= F_{ar} + F_{dA} + F_{am}; \\ F_{ar} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2); \\ F_{dA} &= \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right); \\ F_{am} &= 0,5 \alpha \rho_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right); \\ C_{d2} &= \delta_{ij} \left(\frac{24}{\text{Re}_{12}} + \frac{4}{\text{Re}_{12}^{0,5}} \right) + 0,4; \\ M_{12} &= |u_1 - u_2| / c; \\ \text{Re}_{12} &= \rho_1 |u_1 - u_2| d \mu^{-1}; \\ \text{Pr} &= c_p \mu \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь μ , λ , τ – вязкость, теплопроводность, функция учета вязкости; F_{am} – сила присоединенных масс; F_{dA} – динамическая сила Архимеда; F_{ar} – сила аэродинамического сопротивления [4]; C_{d2} – коэффициент сопротивления частицы; M_{12} – относительное число Маха; Re_{12} – относительное число Рейнольдса; Pr – число Прандтля; ρ_2 – средняя плотность дисперсной фазы.

Для искомым функций задавались следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_1(t, 1) = 0; \quad u_1(t, N) = 0; \quad u_2(t, 1) = 0; \quad u_2(t, N) = 0; \\ e_1(t, 1) = e_1(t, 2); \quad e_2(t, 1) = e_2(t, 2); \quad e_1(t, N) = e_1(t, N-1); \quad e_2(t, N) = e_2(t, N-1); \\ \rho_1(t, 1) = \rho_1(t, 2); \quad \rho_2(t, 1) = \rho_2(t, 2); \quad \rho_1(t, N) = \rho_1(t, N-1); \quad \rho_2(t, N) = \rho_2(t, N-1). \end{aligned}$$

Физическая область течения – отрезок $[a, b]$ в переменных (x, t) отображается на единичный интервал $[0, 1]$, в переменных (ξ, t) , $\xi = \xi(x)$. В обобщенных координатах [1] система уравнений движения двухфазной двухтемпературной двухскоростной монодисперсной смеси (6)–(12) приобретает вид:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{E}_\xi = \mathbf{H}; \quad (13)$$

$$\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \rho_1 u_1, \rho_2 u_2, e_1, e_2]^T; \quad J = \frac{\partial x}{\partial \xi};$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} J \rho_1 u_1 \\ J \rho_2 u_2 \\ \left(\rho_1 u_1^2 + p - \frac{4}{3} J \mu \partial u / \partial \xi \right) J \\ J \rho_2 u_2^2 \\ J \left((e_1 + p - \tau) u_1 + J \lambda \partial T_1 / \partial \xi \right) \\ J e_2 u_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + J \alpha \partial p / \partial \xi \\ F - J \alpha \partial p / \partial \xi \\ -Q - |F| (u_1 - u_2) + J \alpha \partial (p u_1) / \partial \xi \\ Q \end{bmatrix}.$$

Система (13) решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка [20] с последующим применением схемы нелинейной коррекции решения [21]. Явная схема Мак-Кормака включает в себя последовательно выполняемые шаги «предиктор» (14) и «корректор» (15):

$$\mathbf{q}_j^* = \mathbf{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n) + \Delta t \mathbf{H}_j^n; \quad (14)$$

$$\mathbf{q}_j^{n+1} = 0,5(\mathbf{q}_j^n + \mathbf{q}_j^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\mathbf{E}_j^* - \mathbf{E}_{j-1}^*) + 0,5 \Delta t \mathbf{H}_j^*. \quad (15)$$

Здесь $x(\xi) = L\xi + L_0$, $J = L$, в расчетах $L_0 = 0$, $\Delta \xi = \Delta x/L = (L/(N-1))/L$ – шаг по пространственному направлению; Δt – шаг по времени; N – количество узлов разбиения сетки. Шаг по времени выбирался исходя из условия Куранта – Фридрихса – Леви [1]. Для получения монотонного численного решения к сеточной функции на каждом временном шаге применялась схема нелинейной коррекции [2, 3]. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль всех узлов на каждом временном слое. Рассмотрим алгоритм коррекции решения на примере функции f . В случае, если выполняются условия $(\delta f_{j-1/2} \cdot \delta f_{j+1/2}) < 0$ или $(\delta f_{j+1/2} \cdot \delta f_{j+3/2}) < 0$, то к функции f в j -м узле применяется алгоритм схемы коррекции: $\tilde{f}_j = f_j + \kappa(\delta f_{j+1/2} - \delta f_{j-1/2})$. Нижний индекс обозначает номер узла сетки. Здесь использованы обозначения: $\delta f_{j+1/2} = f_{j+1} - f_j$, $\delta f_{j+3/2} = f_{j+2} - f_{j+1}$. В противном случае $\tilde{f}_j = f_j$, \tilde{f}_j – значение функции в j -м узле после перехода на $(n+1)$ -й временной слой по схеме Мак-Кормака; κ – коэффициент коррекции.

Программная реализация

Численный алгоритм реализован в виде программного комплекса. Изменения в структуре численно интегрируемых уравнений позволяют проводить расчеты как для идеальной математической модели, так и для вязкой теплопроводной среды. Компьютерная реализация численной модели течения жидкости или газа состоит из следующих частей: определение геометрических параметров физической области течения, в одномерном случае только размеров области, формирование разбиения области моделирования, задание граничных условий и непосредственно самого процесса численного интегрирования системы аэрогидродинамических уравнений. В данной работе компьютерная программа написана на языке программирования Fortran. Программный код, составляющий компьютерную модель, представляет собой набор последовательно реализуемых компонент. Алгоритм программной реализации численной модели динамики газовзвеси имеет следующую последовательность:

- 1) задаются физические параметры газа и твердых частиц;
- 2) из файлов считываются начальные значения функций, геометрия области и характеристики ее сеточного разбиения;
- 3) строится сеточное разбиение области течения смеси;
- 4) определяется значение величин межфазного обмена импульсом и межфазного теплообмена;
- 5) реализуется конечно-разностное решение уравнений динамики смеси;
- 6) проводится нелинейная коррекция сеточных функций;
- 7) значения искомых функций в узлах сетки на каждом временном слое выводятся в файл.

Вычисление значений параметров неоднородной среды на каждом последующем временном слое осуществляется последовательным применением шагов 4–6. Программный комплекс состоит из нескольких компонент: подпрограмма задания граничных условий, подпрограмма формирования конечно-разностного разбиения физической области, основная программа расчета динамики неоднородной среды.

На рис. 1а изображена структура программы моделирования динамики однофазной сплошной среды. На рис. 1б представлена структура программы численного моделирования динамики неоднородной среды, реализующей континуальную методику моделирования неоднородной среды. В структуре программы численной реализации континуальной методики моделирования динамики неоднородных сред присутствует два отличия: в основной программе численно интегрируется полная гидродинамическая система уравнений для всей совокупности компонент смеси, также присутствует подпрограмма учета межфазного взаимодействия.



Рис. 1. Схема программы численного моделирования течения однородной среды (а) и многофазной среды, реализующей континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред (б)
 Fig. 1. Scheme of the program for numerical simulation of the flow of a homogeneous medium (a) and of a multiphase medium, which implements the continuum method for modeling the dynamics of inhomogeneous media (b)

Результаты расчетов

Для сопоставления различных моделей динамики многофазных сред рассматривался процесс распада разрыва [21] в газозвеси [5, 6].

Предполагалось, что канал разделен разделяющей поверхностью на две части: в одной половине давление газа $p_1 = 100$ кПа, в другой части канала давление газа p_2 , $p_2 > p_1$ (рис. 2). После разрушения разделяющей поверхности формируется ударная волна, движущаяся из области с высоким давлением в область с низким давлением, при этом происходит изменение физических параметров газа. Длина канала $L = 10$ м, количество узлов сетки $N = 500$. Несущая среда описывалась как воздух. Физическая плотность материала дисперсной компоненты и теплоемкость материала дисперсной компоненты составляла $\rho_{20} = 2500$ кг/м³, $C_{p1} = 903$ Дж/кг·К, объемное содержание $\alpha = 0,0005$, дисперсность частиц $d = 2$ мкм.

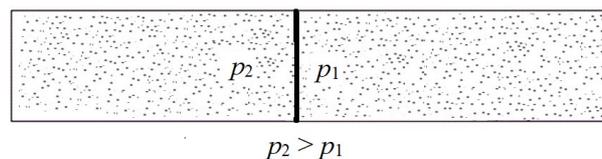


Рис. 2. Схематическое изображение начального момента распада прямого скачка уплотнения в газозвеси
 Fig. 2. Schematic representation of the initial moment of the collapse of a direct shock wave in a gas suspension

В процессе распространения ударной волны в газе происходит существенное изменение плотности газа [21] (рис. 3).

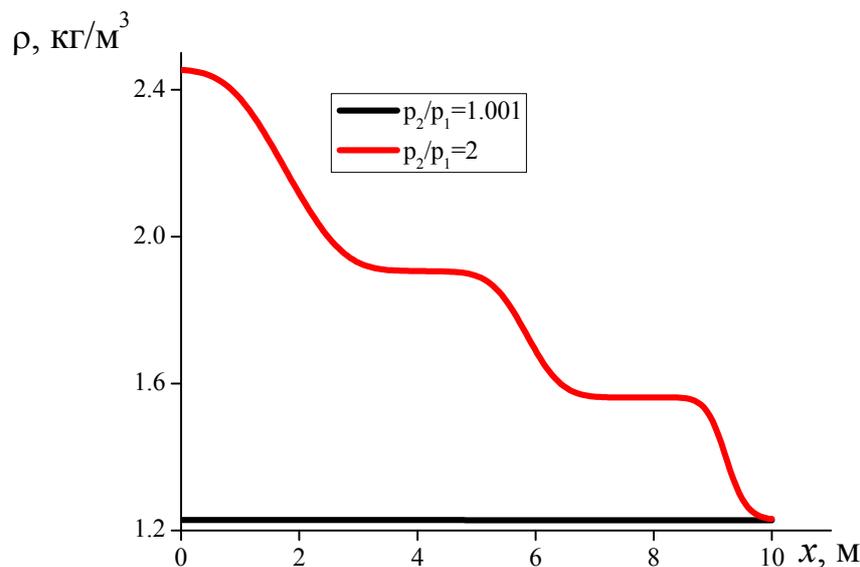


Рис. 3. Пространственное распределение плотности газа при различных интенсивностях распада разрыва в однородном газе
Fig. 3. Spatial distribution of gas density at different intensities of discontinuity decay in a homogeneous gas

На рис. 4 изображено пространственное распределение скорости газа при моделировании процесса распада разрыва при интенсивности разрыва $(p_2 - p_1)/p_1 = 0,001$. В полученных расчетах отличие скоростей газа, полученных по модели идеального и вязкого теплопроводного газа составляет $|u_i - u_v| \approx 10\% u_i$.

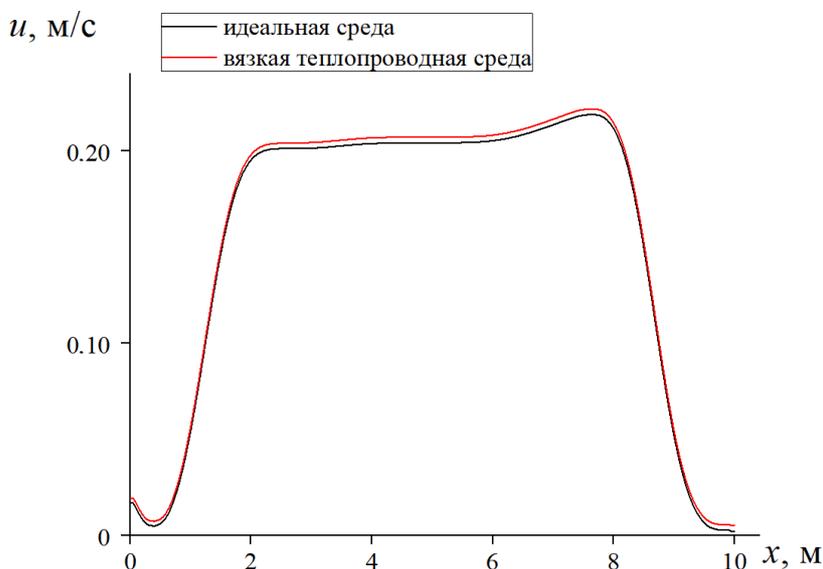


Рис. 4. Пространственное распределение скорости газа в однородном газе для различных моделей динамики газа, момент времени $t = 15$ мс, интенсивность перепада давлений $p_2/p_1 = 1,001$
Fig. 4. Spatial distribution of gas velocity in a homogeneous gas for various models of gas dynamics, time $t = 15$ ms, intensity of pressure drop $p_2/p_1 = 1,001$

При этом для ударно-волнового течения $(p_2 - p_1)/p_1 = 1$ различия для скоростей, полученных по двум различным моделям динамики газа, не являются существенными (рис. 5).

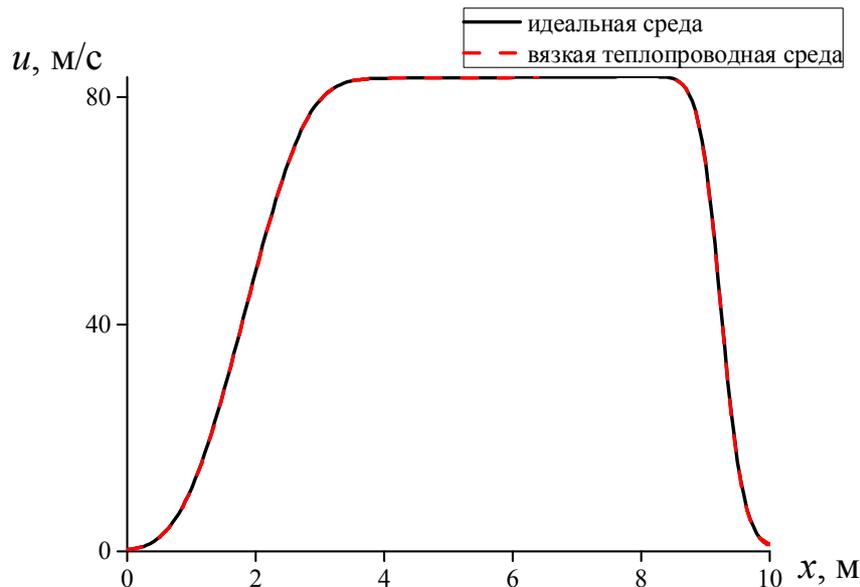


Рис. 5. Пространственное распределение скорости газа в однородном газе для различных моделей динамики газа, момент времени $t = 12$ мс, интенсивность перепада давлений $p_2/p_1 = 2$

Fig. 5. Spatial distribution of gas velocity in a homogeneous gas for various models of gas dynamics, time $t = 12$ ms, intensity of pressure drop $p_2/p_1 = 2$

В абсолютных значениях разность скоростей между вязким теплопроводным и идеальным газом возрастает вместе со скоростью течения, но составляет не более $|u_i - u_v|/u_i \approx 0,5\%$ от скорости движения газа u_i в ударно-волновом течении (рис. 6). Для течений с различными интенсивностями распределение плотности газа существенно отличается, при малых интенсивностях течений возможно пренебречь изменениями плотности среды, тогда как для ударно-волнового течения изменения в плотности среды более существенны (см. рис. 6).

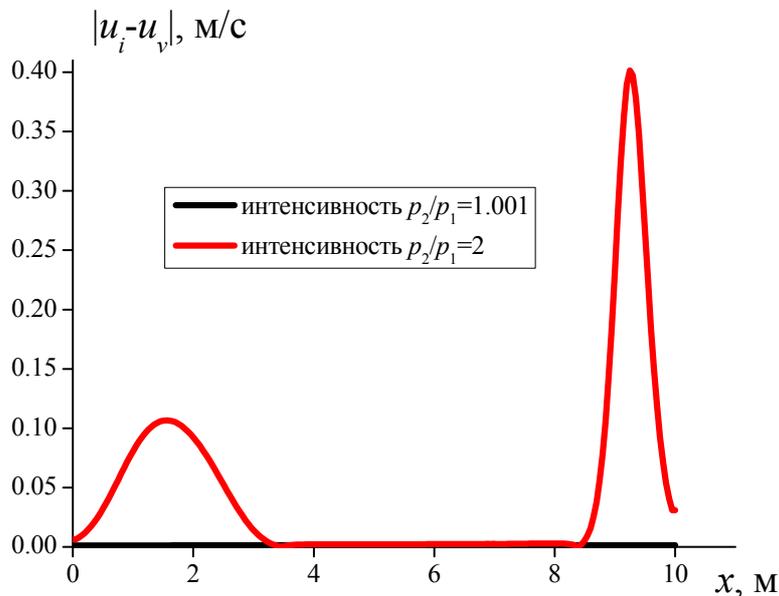


Рис. 6. Пространственное распределение модуля разности скоростей газа, вычисленных при моделировании динамики однородного газа моделью вязкого теплопроводного газа и идеального газа, $t = 12$ мс

Fig. 6. Spatial distribution of the modulus of the difference in gas velocities calculated when modeling the dynamics of a homogeneous gas with a model of a viscous heat-conducting gas and an ideal gas, $t = 12$ ms

Отличие континуальной и равновесной моделей динамики газозвесей заключается в том, что при моделировании движения однородной среды и динамики несущей фазы газозвеси в континуальной модели начальные распределения давления газа совпадают, тогда как в равновесной модели при тех же параметрах несущей среды начальное давление газа имеет меньшее значение (рис. 7). Давление газа при моделировании динамики газозвеси равновесной моделью составляет 99,95 % от давления в однородном газе или газовой фазе, моделируемой континуальной моделью. Отличием континуальной модели динамики многофазных сред является наличие температурной неравновесности. Даже при равной начальной температуре фаз в процессе движения газозвеси формируется разность температур несущей и дисперсной фазы газозвеси.

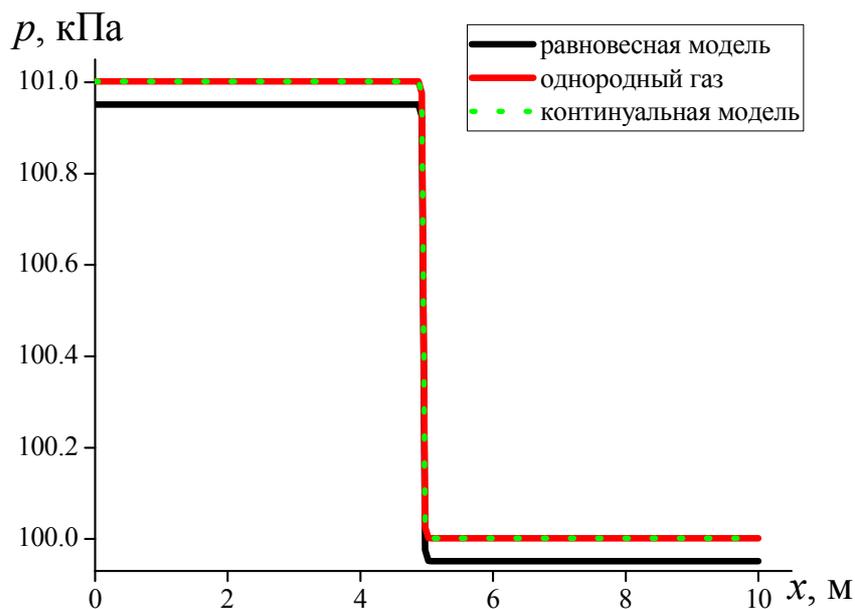


Рис. 7. Начальные распределения давления при моделировании распада разрыва в однородном газе и в газозвеси при динамике газозвеси континуальной и равновесной моделях при одинаковых начальных параметрах газа

Fig. 7. Initial pressure distributions in modeling the discontinuity decay in a homogeneous gas and in a gas suspension with the gas suspension dynamics by the continuum and equilibrium models for the same initial gas parameters

На рис. 8 представлено сопоставление модуля разности температуры несущей и дисперсной компоненты для двух различных интенсивностей перепада давления $p_2/p_1 = 1,01$, $p_2/p_1 = 2$. Даже при малых интенсивностях течений (см. рис. 8), в континуальной модели с вязкой и теплопроводной несущей средой и несущей средой – идеальным газом существенно отличаются температуры газовой и дисперсной фаз смеси. Для начального перепада давлений $p_2/p_1 = 2$ для несущей среды – идеального газа величина разности температур фаз существенно больше – $|T_1 - T_2| = 14,32$ К, чем если модель учитывает вязкость и теплопроводность среды – $|T_1 - T_2| = 0,35$ К. Для начального перепада давлений $p_2/p_1 = 1,01$ в модели с несущей средой – идеальным газом величина интенсивности разности температур – $|T_1 - T_2| = 0,23$ К, если модель учитывает вязкость и теплопроводность несущей среды тот же параметр – $|T_1 - T_2| = 0,0026$ К.

Равновесная модель, как и модель динамики идеального газа, позволяет получить аналитические решения [21]. Сопоставление численных расчетов, полученных как для однородной идеальной среды, так и для равновесной модели динамики газозвеси, демонстрирует приемлемое соответствие 75 % от аналогичных аналитических решений, что связано с диссипацией численного решения [1, 5, 6] (рис. 9).

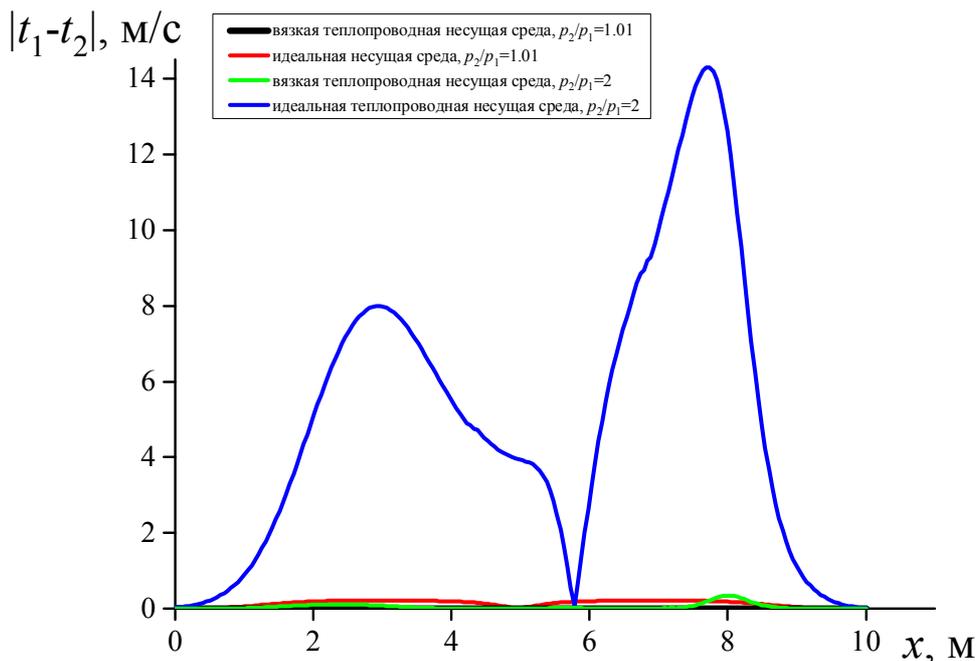


Рис. 8. Пространственное распределение модуля разности температуры фаз при моделировании динамики газозвеси континуальными моделями с вязкой теплопроводной и идеальной несущей средой для разных интенсивностей начального перепада давлений

Fig. 8. Spatial distribution of phase temperature difference modulus when modeling gas suspension dynamics by continual models with a viscous heat-conducting and ideal carrier medium for different intensities of the initial pressure drop

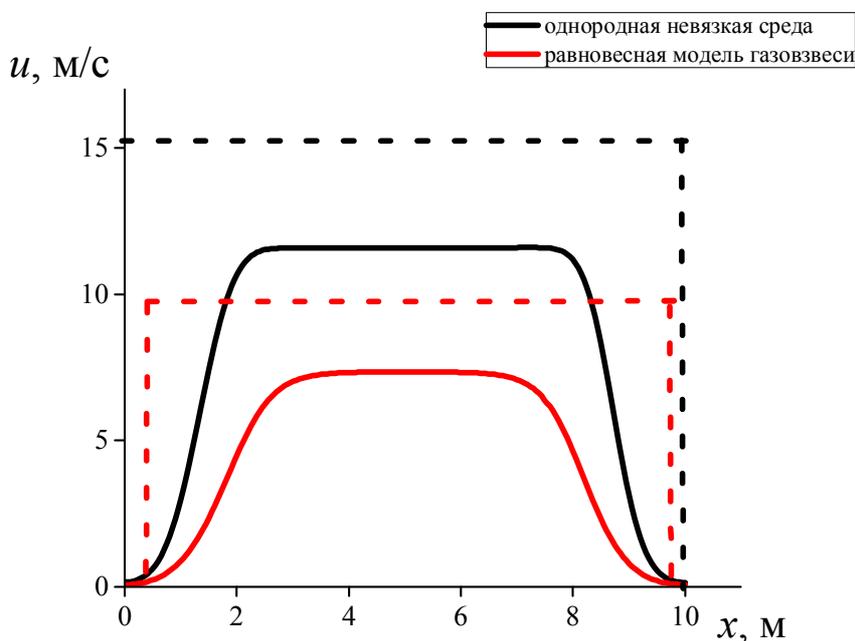


Рис. 9. Сопоставление численных расчетов – сплошной линией и аналитических расчетов – пунктирной линией. Интенсивность начального перепада давления $p_2/p_1 = 1,1$

Fig. 9. Comparison of numerical calculations – a solid line and analytical calculations – a dotted line. The intensity of the initial pressure drop $p_2/p_1 = 1.1$

На рис. 10 представлены результаты численных расчетов давления и температуры газа в газозвеси при интенсивности распада разрыва давления $(p_2 - p_1)/p_1 = 0,01$ в два различных момента

времени – $t = 5$ мс и $t = 8$ мс, из рис. 10 следует, что наибольшая скорость распространения ударной волны наблюдается в равновесной модели, меньшая скорость наблюдается в континуальной модели с идеальной несущей средой, еще меньшая скорость распространения в ударной волне с вязкой теплопроводной средой (см. рис. 10а). При этом, чем выше скорость распространения возмущения, тем меньше температура газа, достигаемая в ударной волне, наименьшая скорость и наибольшая температура газа в модели динамики газозвеси с вязкой теплопроводной средой (см. рис. 10б).

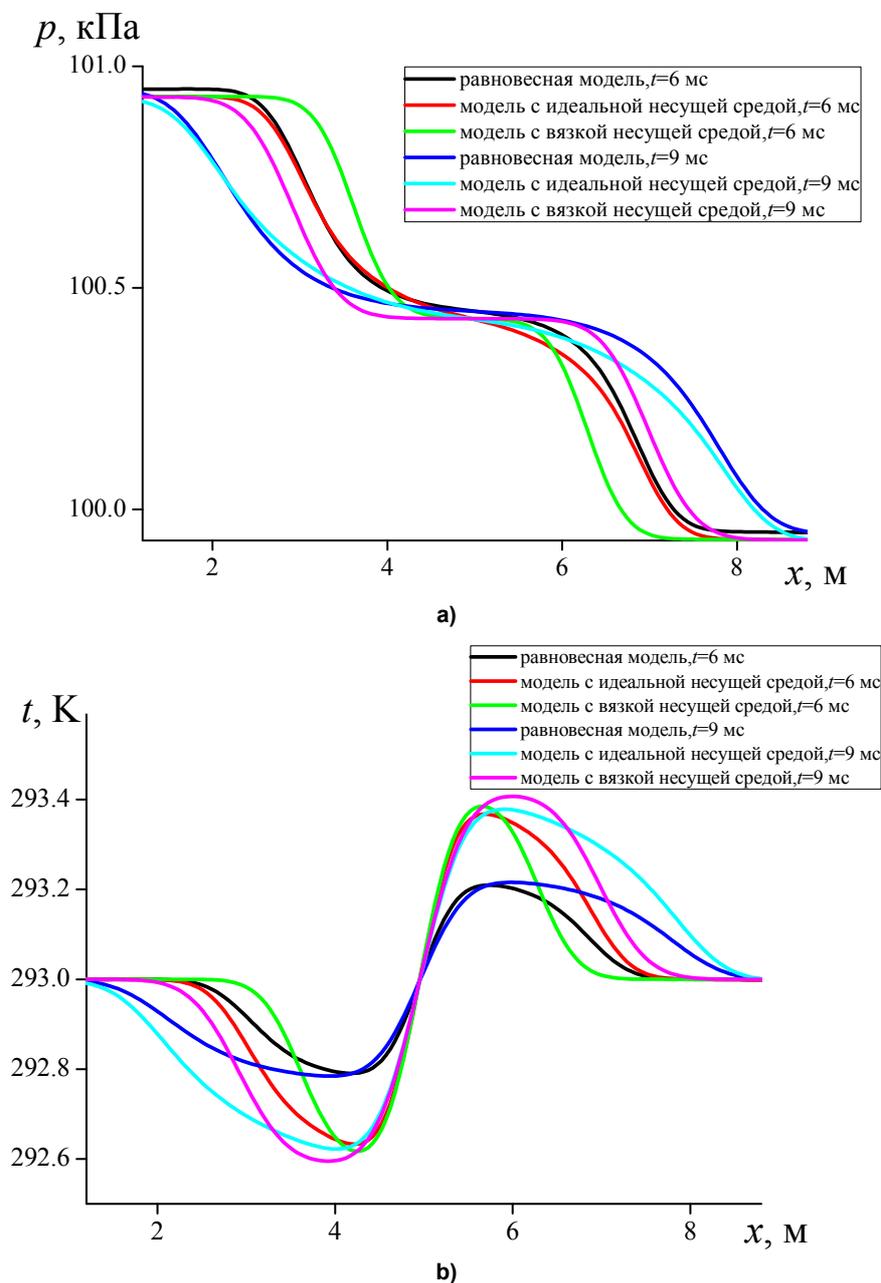


Рис. 10. Пространственные распределения в различные моменты времени давления газа (а) и температуры газа (б) при моделировании динамики газозвеси различными математическими моделями
Fig. 10. Spatial distributions at different times of gas pressure (a) and gas temperature (b) when modeling the dynamics of a gas suspension by various mathematical models

При уменьшении интенсивности течения увеличиваются различия в результатах расчетов скорости однородного газа и скорости газовой фазы в газозвеси, а также скорости среды в равновесной модели (рис. 11). Для интенсивностей начального перепада давления $p_2/p_1 = 2$,

$p_2/p_1 = 1,1$, $p_2/p_1 = 1,01$ отношения к максимальной скорости идеального однородного газа (u_{ig}) максимальной скорости газа в континуальной модели динамики газозвеси с идеальной средой – u_{gsi}/u_{ig} , газозвеси с вязкой теплопроводной несущей средой – u_{gsv}/u_{ig} , максимальной скорости среды в равновесной модели газозвеси – u_{gse}/u_{ig} (см. таблицу). Из таблицы следует, что наиболее существенно скорость течения газа в газозвеси уменьшается относительно однородной идеальной среды (при той же интенсивности начального перепада давления) для расчетов течения газозвеси континуальной методикой моделирования с вязкой теплопроводной средой, менее интенсивно скорость среды уменьшается в равновесной модели, еще меньше уменьшается в континуальной модели с идеальной средой.

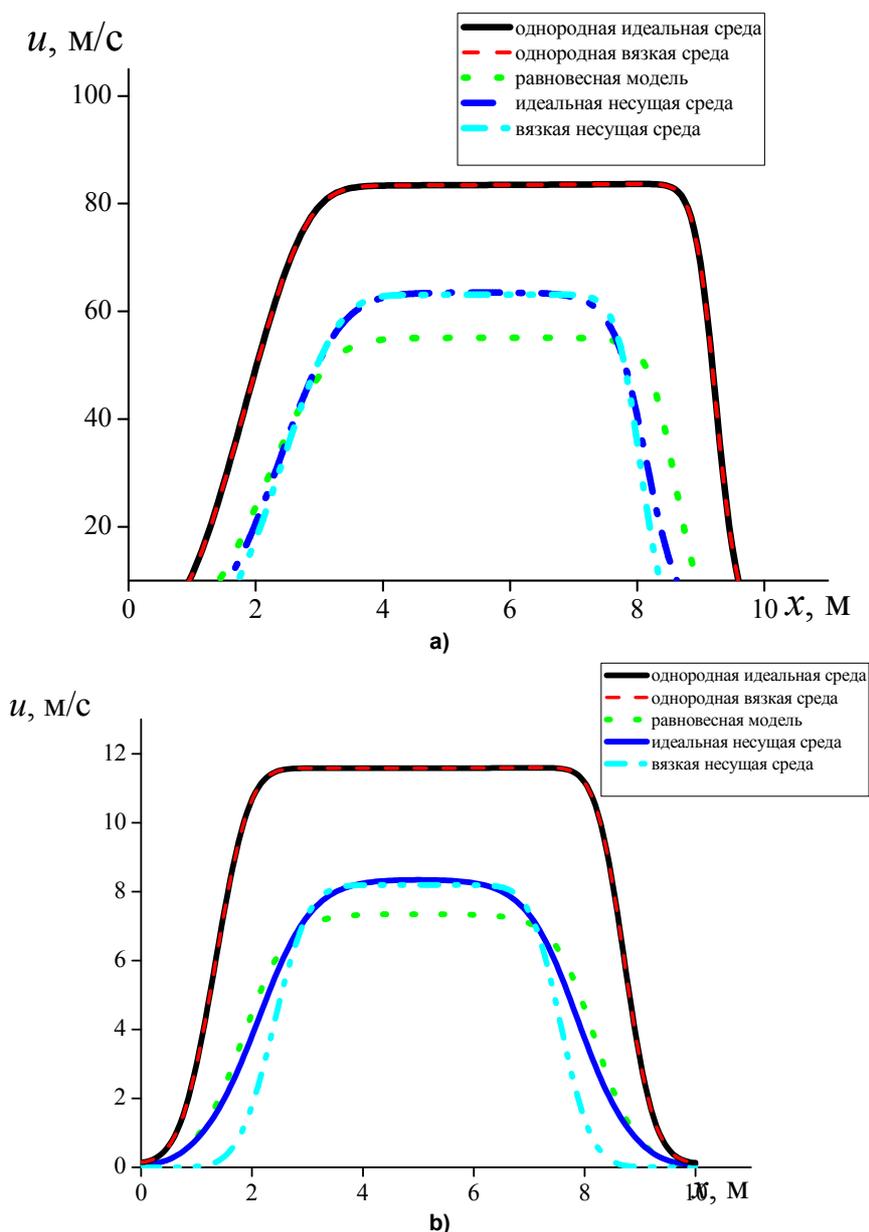


Рис. 11. Пространственное распределение скорости газа при моделировании распада разрыва в однородном газе и в газозвеси равновесной и континуальной математическими моделями при начальной интенсивности разрыва давлений $p_2/p_1 = 2$ (а); $p_2/p_1 = 1,1$ (б); $p_2/p_1 = 1,01$ (с)

Fig. 11. Spatial distribution of gas velocity when modeling discontinuity decay in a homogeneous gas and in a gas suspension by equilibrium and continuum mathematical models at the initial intensity of pressure discontinuity $p_2/p_1 = 2$ (a); $p_2/p_1 = 1.1$ (b); $p_2/p_1 = 1.01$ (c) (см. также с. 72)

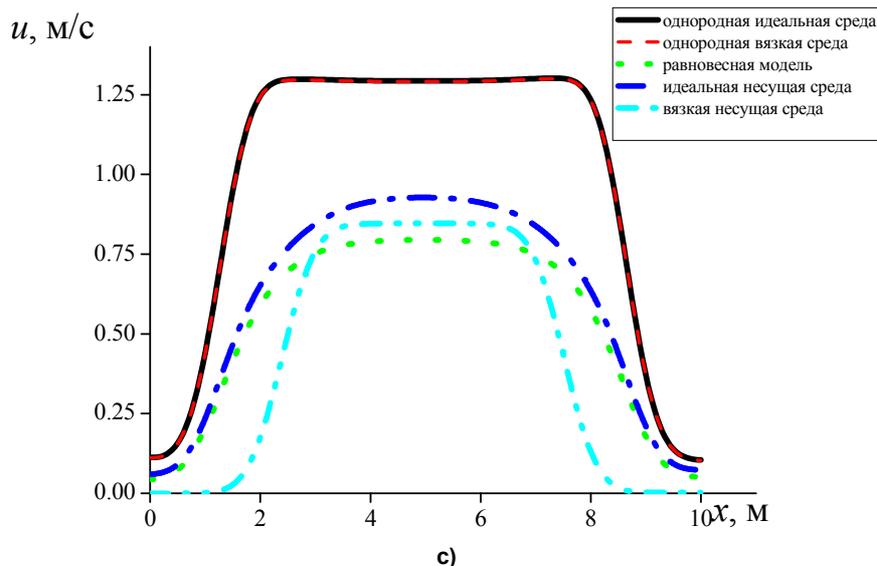


Рис. 11. Окончание
Fig. 11. End

Отношения максимальных значений скоростей несущей среды
Ratios of the maximum values of the carrier medium

p_2/p_1	u_{gsi}/u_{ig}	u_{gsv}/u_{ig}	u_{gse}/u_{ig}
$p_2/p_1 = 2$	76,86 %	75,17 %	69,68 %
$p_2/p_1 = 1,1$	72 %	70 %	63,28 %
$p_2/p_1 = 1,01$	71 %	64 %	60,5 %

Выводы

В данной работе представлены сопоставления расчетов численных реализаций математических моделей одномерных течений газозвесей. Сопоставлялись равновесная методика моделирования динамики многофазной среды с континуальной методикой моделирования динамики многофазных сред, в рамках которой были получены модели, описывающие несущую фазу смеси как идеальный газ и как вязкую теплопроводную среду. Определено, что наибольшая скорость распространения возмущения в газозвеси наблюдается в равновесной модели, меньшая скорость распространения – в континуальной модели с идеальной средой, наименьшая скорость наблюдается в газозвеси с вязкой теплопроводной средой. Выявлено, что при различных интенсивностях течений наличие дисперсной фазы в смеси оказывает различное влияние. Полученные закономерности возможно использовать при разработке компьютерных моделей динамики многофазных сред.

Список литературы

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т.: пер. с англ. М.: Мир, 1991. Т. 2. 552 с.
2. Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.
3. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. № 3. С. 74–83.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах, СПб.: Недра, 2003. 284 с.
6. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газозвесах частиц металлов. Новосибирск, 2015. 301 с.

7. Numerical Simulation of Condensation of Natural Fog Aerosol under Acoustic Wave Action / C. Liu, Y. Zhao, Z. Tian, H. Zhou // *Aerosol Air and Quality Reserch*. 2021. Vol. 21, iss. 4. P. 1–21. DOI: 10.4209/aaqr.2020.06.0361
8. Yeom G.S., Chang K.S. Shock wave diffraction about a wedge in a gas-microdroplet mixture // *International journal of heat and mass transfer*. 2010. Vol. 53. P. 5073–5088. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.056
9. Saurel R., Boivin P., Le Metayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows // *Computers and Fluids*. 2016. Vol. 128. P. 53–64. DOI: 10.1016/j.compfluid.2016.01.004
10. Прокудина Л.А., Саламатов Е.А. Математическое моделирование неустойчивости тонкого слоя вязкой жидкости // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2009. № 3 (136). С. 48–54.
11. Ковалев Ю.М., Шестаковская Е.С. Численное исследование распространения цилиндрических ударных волн в гетерогенных средах // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2013. Т. 13, № 3. С. 102–108.
12. Карташев А.Л., Карташева М.А. Система математического моделирования течений в управляемых газоструйных системах и гидропневмоагрегатах с кольцевыми соплами // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2013. Т. 13, № 4. С. 30–37.
13. Ковалев Ю.М., Ковалева Е.А. Анализ возможности применения некоторых численных методов для решения задач механики многокомпонентных сред // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2014. Т. 14, № 1. С. 57–62.
14. Карташев А.Л., Кривоногов А.А. Математическая модель трансформации двумерного течения в проточном тракте вихревого расходомера в трехмерное течение // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2017. Т. 17, № 2. С. 93–102. DOI: 10.14529/ctcr170208
15. Суоров В.С. Гиперболическая модель односкоростной теплопроводной смеси с учетом межфракционного теплообмена // *Теплофизика высоких температур*. 2018. Т. 56, № 6. С. 975–985. DOI: 10.31857/S004036440003570-1
16. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Т. 22, №1. С. 90–102. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102
17. Tukmakov D.A. Nonstationary one-dimensional mathematical model of the dynamics of incompressible two-phase medium // *Technical Physics*. 2023. No. 1. DOI: 10.1134/S1063784222100097
18. Tukmakov D.A. One-dimensional unsteady numerical model of gas suspension flow caused by gravitational sedimentation of particles with a constant velocity // *Journal of applied mechanics and technical physics*. 2022. Vol. 63, iss. 7. P. 1218–1226. DOI: 10.1134/S0021894422070148
19. Тукмаков Д.А. Численное моделирование взаимодействия газовзвеси с ударной волной континуальными математическими моделями с идеальной и диссипативными несущими средами // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика»*. 2022. Т. 11, № 4. С. 67–87. DOI: 10.14529/cmse220405
20. Тукмакова Н.А., Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики испаряющейся многофракционной парок капельной смеси метана в трубе с учетом закрутки потока // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика»*. 2023. Т. 23, № 1. С. 106–118. DOI: 10.14529/power230111
21. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
22. Базаров И.П. Термодинамика. СПб.: Лань, 2010. 384 с.

References

1. Fletcher C.A. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlang, Berlin et al.;1988. 502 p.
2. Tukmakov A.L. Numerical simulation of acoustic flows at resonance gas oscillations in a closed tube // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatcionnaya tekhnika*. 2006;4:33–36. (In Russ.)
3. Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. [Application of compact difference schemes to the study of unsteady compressible gas flows]. *Mathematical modeling*. 1993;3:74–83. (In Russ.)

4. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moscow: Nauka; 1978. 336 p. (In Russ.)
5. Kutushev A.G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodisperse and powder media]. St. Petersburg: Nedra; 2003. 284 p. (In Russ.)
6. Fedorov A.V., Fomin V.M., Khmel T.A. *Volnovye processy v gazovzvesyakh chastic metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk; 2015. 301 p. (In Russ.)
7. Liu C., Zhao Y., Tian Z., Zhou H. Numerical Simulation of Condensation of Natural Fog Aerosol under Acoustic Wave Action. *Aerosol Air and Quality Research*. 2021;21(4):1–21. DOI: 10.4209/aaqr.2020.06.0361
8. Yeom G.S., Chang K.S. Shock wave diffraction about a wedge in a gas-microdroplet mixture. *International journal of heat and mass transfer*. 2010;53:5073–5088. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.056
9. Saurel R., Boivin P., Le Metayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows. *Computers and Fluids*. 2016;128:53–64. DOI: 10.1016/j.compfluid.2016.01.004
10. Prokudina L.A., Salamatov E.A. Mathematical simulation of treacle slice unsteadiness. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2009;3(136):48–54. (In Russ.)
11. Kovalev Yu.M., Shestakovskaya E.S. Numerical analysis of cylindrical shock waves in heterogeneous environments. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2013;13(3):102–108. (In Russ.)
12. Kartashov A.L., Kartasheva M.A. System of mathematical modeling of flows in controlled gas-jet systems and hydropneumatic devices with annular nozzles. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2013;13(4):30–37. (In Russ.)
13. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A. The analysis of some numerical methods application for the solution of multicomponent media mechanics tasks. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2014;14(1):57–62. (In Russ.)
14. Kartashev A.L., Krivonogov A.A. Mathematical model of transformation a 2D simulation flowing part of vortex flowmeter to 3D case. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2017;17(2): 93–102. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr170208
15. Surov V.S. Hyperbolic model of a single-speed, heat-conductive mixture with interfractional heat transfer. *High Temperature*. 2018;56(6):890–899. DOI: 10.1134/S0018151X1806024X
16. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension. *Izvestiya of Saratov university. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022; 22(1):90–102. (In Russ.) DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102
17. Tukmakov D.A. Nonstationary one-dimensional mathematical model of the dynamics of incompressible two-phase medium. *Technical Physics*. 2023;(1). DOI: 10.1134/S1063784222100097
18. Tukmakov D.A. One-dimensional unsteady numerical model of gas suspension flow caused by gravitational sedimentation of particles with a constant velocity. *Journal of applied mechanics and technical physics*. 2022;63(7):1218–1226. DOI: 10.1134/S0021894422070148
19. Tukmakov D.A. Numerical Simulation of the Interaction of a Gas Suspension with a Shock Wave by Continual Mathematical Models with Ideal and Dissipative Carrier Media. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2022;11(4): 67–87. (In Russ.) DOI: 10.14529/cmse220405
20. Tukmakova N.A., Tukmakov D.A. The numerical simulation of an evaporating multifraction vapor-droplet mixture of methane in a pipe taking into account the swirling flow. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering*. 2023;23(1):106–118. (In Russ.) DOI: 10.14529/power230111
21. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki* [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow; Izhevsk: Institute for Computer Research; 2003. 336 p. (In Russ.)
22. Bazarov I.P. *Termodinamika* [Thermodynamics]. St. Petersburg: Lan Publ.; 2010. 384 p. (In Russ.)

Информация об авторе

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия; tukmakovda@imm.knc.ru.

Information about the author

Dmitry A. Tukmakov, Cand. Sci. (Phys. and Math.), Researcher, Institute of Mechanics and Engineering – Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russia; tukmakovda@imm.knc.ru.

Статья поступила в редакцию 17.04.2023

The article was submitted 17.04.2023