Научная статья
УДК 004.942
DOI: 10.14529/ctcr240109

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМОЙ РЫНКА ТРУДА НА ЗАДАННОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

С.А. Федосеев, *fsa@gelicon.biz*
Д.Л. Горбунов, *call-of-monolit@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-3186-3680*
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Аннотация. Соотношение спроса и предложения на рынке труда – один из важнейших критериев эффективности функционирования экономической системы на макроуровне. Решение вопросов управления и прогнозирования динамики кадров на рынке труда является важным в силу того, что качество продукции напрямую зависит от уровня квалифицированности рабочей силы. Повышение эффективности кадровой политики работодателей требует разработки новых инструментов управления и прогнозирования динамических процессов рынка труда на макро- и микроуровнях. Рассматривается задача оптимального управления предложенной ранее замкнутой системой рынка труда. Сформулирована в общем виде задача оптимального управления системой, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений. **Цель исследования:** нахождение кусочно-постоянных значений управления, при которых соотношение «цена – качество» на рынке труда будет максимальным в течение ближайших трёх лет. **Материалы и методы.** Согласно концепции модели, субъекты рынка труда делятся на три категории в зависимости от величины спроса на их труд: субъекты высокой, низкой и средней квалификации. Принята гипотеза, согласно которой вакантные места на рынке труда считаются занятыми субъектами низкой квалификации. В силу доказанной ранее единственности решения задачи оптимального управления замкнутым рынком труда обоснован жадный алгоритм нахождения максимального значения соотношения «цена – качество» на рынке труда. С помощью Wolfram Mathematica по найденному ранее способу сформулированная задача оптимального управления решена на каждом временном полуинтервале. **Результаты.** Получены значения управления, при которых соотношение «цена – качество» на рынке труда посёлка Сылва Пермского края в течение ближайших трёх лет будет максимальным. Результаты обосновывают рекомендацию ввести более строгие требования к соискателям вакантных должностей на градообразующем предприятии посёлка Сылва Пермского края.

Ключевые слова: дифференциальная модель, система нелинейных дифференциальных уравнений, замкнутый рынок труда, оптимальное управление, кусочно-постоянные функции

Для цитирования: Федосеев С.А., Горбунов Д.Л. Алгоритм оптимального управления замкнутой системой рынка труда на заданном временном интервале // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24, № 1. С. 96–105. DOI: 10.14529/ctcr240109

Original article
DOI: 10.14529/ctcr240109

AN ALGORITHM FOR OPTIMAL CONTROL OF A CLOSED LABOR MARKET SYSTEM AT A GIVEN TIME INTERVAL

S.A. Fedoseev, *fsa@gelicon.biz*
D.L. Gorbunov, *call-of-monolit@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-3186-3680*
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. The ratio of supply and demand in the labor market is an important criteria for the effectiveness of the functioning of the economic system at the macro level. Improving the effectiveness of employers' personnel policy requires the development of new control tools and forecasting of dynamic labor market processes at the macro and micro levels. The problem of optimal control of the previously proposed closed labor market system is considered. The problem of optimal control of a system described by a system of nonlinear differential equations is formulated in general form. **Aim.** Finding piecewise constant control values at which the price-quality ratio in the labor market will be maximum over the next three years. **Materials and methods.** According to the concept of the model, the subjects of the labor market are divided into three categories depending on the amount of demand for their labor: subjects of high, low and medium qualifications. A hypothesis has been adopted according to which vacant places in the labor market are considered to be occupied by low-skilled subjects. Due to the previously proven uniqueness of solving the problem of optimal control of a closed labor market, a greedy algorithm for finding the maximum value of the price-quality ratio in the labor market is justified. Using Wolfram Mathematica, according to the method found earlier, the formulated optimal control problem was solved at each time half-interval. **Results.** Control values have been obtained at which the price-quality ratio in the labor market of the village of Sylva in the Perm Territory will be maximum over the next three years. The results substantiate the recommendation to introduce stricter requirements for applicants for vacant positions at the city-forming enterprise of the village of Sylva in the Perm Territory.

Keywords: differential model, system of nonlinear differential equations, closed labor market, optimal control, piecewise constant functions

For citation: Fedoseev S.A., Gorbunov D.L. An algorithm for optimal control of a closed labor market system at a given time interval. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2024;24(1):96–105. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr240109

Введение

Соотношение спроса и предложения на рынке труда – один из важнейших критериев эффективности функционирования экономической системы на макроуровне. Участником процесса создания продуктов как объектов товарооборота государства является трудоустроенное население, которому, в свою очередь, можно противопоставить безработных. Решение вопросов управления и прогнозирования динамики кадров на рынке труда влияет на качество функционирования всей экономики в целом, поэтому они никогда не теряют своей актуальности.

Например, в [1, 2] осуществлён всесторонний обзор проблемы текучести кадров на рынке труда. В работах [3, 4] исследуются математические закономерности текучести кадров на рынке труда – этот вопрос перекликается с настоящим исследованием. Также с настоящим исследованием перекликается теория коллективной текучести кадров, где анализируется соотношение количества ушедших работников с их качеством (квалификацией) [5]. Что касается работ, посвящённых вопросам оптимального управления рынка труда, то в [6] к стохастической дифференциальной модели рынка труда из [7] применён аппарат оптимального управления.

Для предложенной авторами в [8, 9] конечномерной детерминированной математической модели рынка труда в [10] также сформулирована и решена задача оптимального управления. Здесь предлагается задача оптимального управления замкнутым детерминированным рынком труда в пространстве кусочно-постоянных функций на конечном временном интервале [11]. В общем виде задача кусочно-непрерывного управления объектом, описываемым системой нелинейных дифференциальных уравнений, формулируется следующим образом [12].

Пусть состояние управляемого объекта определяется задачей Коши: $\dot{x}(t) = f(x,u,t)$, $t \in (0;T]$, $x(0) = x_0$, где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0;T]$ – фазовое состояние объекта; управление $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ постоянно на каждом полуинтервале $(t_{j-1};t_j]$, $j = \overline{1,p}$, полученном разбиением отрезка $[0;T]$ на p полуинтервалов, т. е. [13]: $u(t) = k_j = const$, $k_j \in \mathbb{R}^m$, $t \in (t_{j-1};t_j]$, $t_0 = 0$, $t_p = T$; функционал качества $I_j = I(u(t), x_j(t))$ на каждом полуинтервале. Задача заключается в нахождении кусочно-постоянных значений управления $u(t)$, при которых функционал качества $J = \sum_{j=1}^{p} I(u(t), x_j(t)) \to \max$ при ограничениях типа равенств: $F(u(t), x(t), \dot{x}(t)) = 0$, $x(t_{j-1}) = x_{j-1}^{*}$ $x(t_j) = x_j^{**}$ и неравенств: $|u(t)| \le u^{*}$, $t \in [0;t_p]$.

Для общего случая условие существования экстремали и условие экстремума сформулированы в виде теоремы Понтрягина в [14].

1. Оптимальное управление замкнутым рынком труда с кусочно-постоянным коэффициентом селекции

В [8] представлена следующая модель замкнутого рынка труда:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1(t) = \dfrac{A - M\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(t)}{N}\left(\gamma_1(t) + \hat{k}\beta_1(t)\right), \\ \dots \\ \dot{\alpha}_n(t) = \dfrac{A - M\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(t)}{N}\left(\gamma_n(t) + \hat{k}\beta_n(t)\right); \\ \dot{\beta}_1(t) = \dfrac{B - M\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i(t)}{N}\left(\gamma_1(t) + \hat{k}\beta_1(t)\right) - \hat{k}\beta_1(t), \\ \dots \\ \dot{\beta}_n(t) = \dfrac{B - M\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i(t)}{N}\left(\gamma_n(t) + \hat{k}\beta_n(t)\right) - \hat{k}\beta_n(t); \\ \dot{\gamma}_1(t) = \dfrac{G - M\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i(t)}{N}\left(\gamma_1(t) + \hat{k}\beta_1(t)\right) - \gamma_1(t), \\ \dots \\ \dot{\gamma}_n(t) = \dfrac{G - M\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i(t)}{N}\left(\gamma_n(t) + \hat{k}\beta_n(t)\right) - \gamma_n(t). \end{cases} \tag{1}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t) \equiv 1; \tag{2}$$

$$\begin{cases} \alpha_i(t) \in [0;1]; \\ \beta_i(t) \in [0;1]; \\ \gamma_i(t) \in [0;1]; \\ k_i \in (0;1]. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь A – общее число специалистов высокой категории на рынке труда; B – общее число специалистов средней категории на рынке труда; G – общее число специалистов низкой категории на рынке труда; M – общее число рабочих мест, занятых на предприятии; N – общее число безработных на рынке труда; q – количество подразделений предприятия; k_i – коэффициент селекции [15, 16]. Далее $\alpha_i(t)$ – доля специалистов высокой категории i-го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда; $\beta_i(t)$ – доля специалистов средней категории i-го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда; $\gamma_i(t)$ – доля специалистов низкой категории i-го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда. Отметим, что $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t), \gamma_i(t)$ – неизвестные функции, тогда как A, B, G, M, N, n, k_i – целые.

В [10] решена задача управления для замкнутого рынка труда, где $\hat{k} = \text{const}$ на всём временном отрезке $t \in [0; T]$. Рассмотрим случай, когда $\hat{k} = \hat{k}(t)$ – кусочно-постоянная функция, заданная таблично для p промежутков времени:

$\hat{k}(t)$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	…	$\hat{k}_p$
t	$[0; t_1]$	$(t_1; t_2]$	…	$(t_{p-1}; t_p]$

(4)

где $\hat{k}_j \in (0;1]$, $j = \overline{1, p}$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{1j}(t) = \dfrac{A - M\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}(t)}{N}\left(\gamma_{1j}(t) + \hat{k}_j(t)\beta_{1j}(t)\right), \\ \ldots \\ \dot{\alpha}_{nj}(t) = \dfrac{A - M\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}(t)}{N}\left(\gamma_{nj}(t) + \hat{k}_j(t)\beta_{nj}(t)\right); \\ \dot{\beta}_{1j}(t) = \dfrac{B - M\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{ij}(t)}{N}\left(\gamma_{1j}(t) + \hat{k}_j(t)\beta_{1j}(t)\right) - \hat{k}_j(t)\beta_{1j}(t), \\ \ldots \\ \dot{\beta}_{nj}(t) = \dfrac{B - M\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{ij}(t)}{N}\left(\gamma_{nj}(t) + \hat{k}_j(t)\beta_{nj}(t)\right) - \hat{k}_j(t)\beta_{nj}(t); \\ \dot{\gamma}_{1j}(t) = \dfrac{G - M\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_{ij}(t)}{N}\left(\gamma_{1j}(t) + \hat{k}_j(t)\beta_{1j}(t)\right) - \gamma_{1j}(t), \\ \ldots \\ \dot{\gamma}_{nj}(t) = \dfrac{G - M\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_{ij}(t)}{N}\left(\gamma_{nj}(t) + \hat{k}_j(t)\beta_{nj}(t)\right) - \gamma_{nj}(t). \end{cases} \quad (5)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}(t) + \sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}(t) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}(t) \equiv 1; \quad (6)$$

$$\begin{cases} \alpha_{ij}(t) \in [0;1]; \\ \beta_{ij}(t) \in [0;1]; \\ \gamma_{ij}(t) \in [0;1]; \\ k_j \in (0;1] \end{cases}$$

для каждого из p промежутков времени ($j = \overline{1, p}$).

Пусть $\hat{k}(t)$ описывается функцией (4). Тогда

- управление $u(\cdot) \equiv \hat{k}(t)$, где $\hat{k} \in (0;1]$;

- функции состояния системы на *j*-м промежутке времени ($j = \overline{1, p}$):

$x_j(\cdot) = (\alpha_{1j}(t), \ldots, \alpha_{nj}(t), \beta_{1j}(t), \ldots, \beta_{nj}(t), \gamma_{1j}(t), \ldots, \gamma_{nj}(t));$

- функционал качества управления системой на *j*-м промежутке времени ($j = \overline{1, p}$):

$I(u, x_j) = r_{\alpha j}\sigma_{\alpha j}(\hat{k}, t) + r_{\beta j}\sigma_{\beta j}(\hat{k}, t) + r_{\gamma j}\sigma_{\gamma j}(\hat{k}, t)$, где

○ $\sigma_{\alpha j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(\hat{k}_j, t),\ \ \sigma_{\beta j} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}(\hat{k}_j, t),\ \ \sigma_{\gamma j} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}(\hat{k}_j, t);$

○ $r_{\alpha j}$, $r_{\beta j}$, $r_{\gamma j}$ – коэффициенты качества [10].

На каждом из *p* временных промежутков найти $\hat{k} = \hat{k}_j^*$ такое, что $\sum_{j=1}^{p} I(u, x_j) \to \max$ при ограничениях типа равенств (5) и (6) и неравенств (7).

В силу единственности оптимального управления для каждого из *p* временных промежутков, показанной в [10], задачу максимизации суммы можно решить путём максимизации каждого *j*-го слагаемого, т. е. уместно использовать жадный алгоритм [17]. Таким образом, задача оптимального управления замкнутым рынком труда с *n* источниками спроса разбивается на *p* подзадач, связанных между собой таким образом, что результаты *j*-й подзадачи являются входными данными для *j*+1-й подзадачи, поэтому их необходимо решать последовательно для каждой $j = \overline{1, p}$.

Нахождение $\hat{k}_1^*$ на первом временном промежутке для $t \in (0; t_1]$ осуществляется по аналогии с решением задачи управления замкнутым рынком труда, где $\hat{k} = \text{const}$ на всём временном отрезке $t \in [0; T]$, которое приведено в [10]. Значения функций состояния $x_1(\cdot)$ в момент времени t_1 будут выбраны в качестве исходных значений для нахождения $\hat{k}_2^*$ на втором временном промежутке и т. д. Решением задачи оптимального управления рынка труда будет функция (4) с найденными значениями в каждый временной промежуток.

2. Пример оптимального управления рынком труда посёлка Сылва Пермского края в течение трёх лет

По официальным данным [18, 19] рассчитаем текущие значения входных параметров системы (5) для рынка труда посёлка Сылва Пермского края, приняв «гипотезу С» из [15, 16], согласно которой вакантные места считаются занятыми субъектами низкой категории. Отсюда на градообразующем предприятии АО «Пермская птицефабрика» положим $r_{\alpha j} = r_\alpha = \text{const}$, $r_{\beta j} = r_\beta = \text{const}$, $r_{\gamma j} = r_\gamma = 0$ и $r_\alpha > r_\beta > r_\gamma$. Найдём оптимальное управление рынком труда посёлка Сылва Пермского края в 2024–2026 гг., т. е. на трёхлетнем промежутке, при условии, что для АО «Пермская птицефабрика» $\hat{k} = \hat{k}(t)$. Тогда управление $u \equiv \hat{k}(t)$ описывается функцией (4), где $p = 3$.

Решим последовательно задачи оптимального управления для каждого из трёх временных промежутков, начиная с 2024 года. Аналогично [10] с помощью Wolfram Mathematica построим график $I(u, x_1)$ при заданных начальных условиях таких, что значения констант функций состояния системы $x_1(\cdot)$ характеризуют рынок труда посёлка Сылва Пермского края на конец 2023 года [18, 19]. Тогда уравнение $\partial I / \partial \hat{k} = 0$ имеет решение на отрезке $\hat{k} \in (0;1]$, и $\exists \hat{k}^* \in (0;1] : \forall \hat{k} \in (0;1] / \{\hat{k}^*\}\ I(\hat{k}^*) > I(\hat{k})$ в момент времени $t = t_1$, показанное на рис. 1.

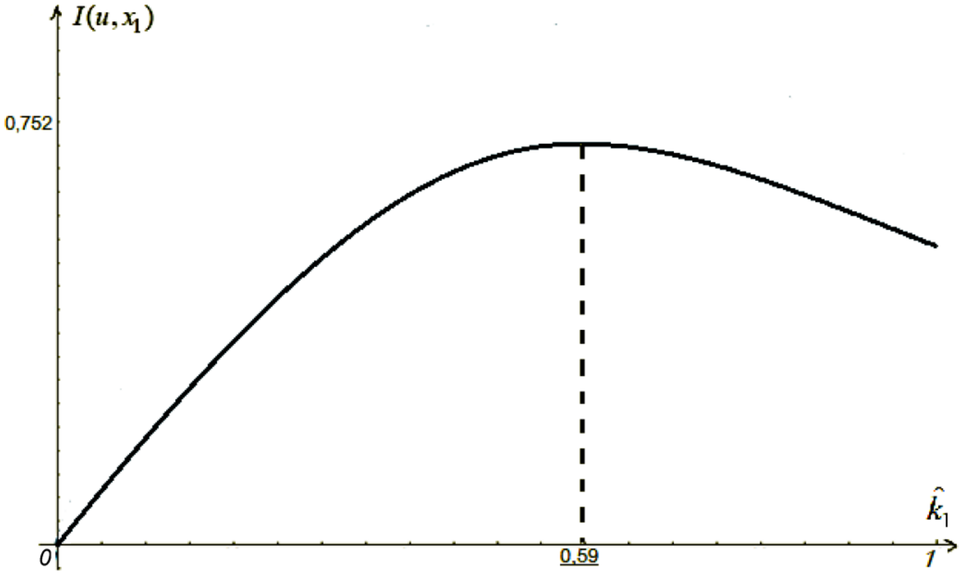

Рис. 1. График функции соотношения «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда посёлка Сылва Пермского края на 2024 г.
Fig. 1. Graph of the price-quality ratio function for all employed personnel in the labor market of the village Sylva in the Perm Territory for 2024

Как видно из графика, $\hat{k}_1^* = 0,59$.

Следующим шагом построим график $I(u,x_2)$ при заданных начальных условиях таких, что значения констант функций состояния системы $x_2(\cdot)$ характеризуют рынок труда посёлка Сылва Пермского края на конец 2024 года при $\hat{k}_1^* = 0,59$. Получим график $I(u,x_2)$, показанный на рис. 2.

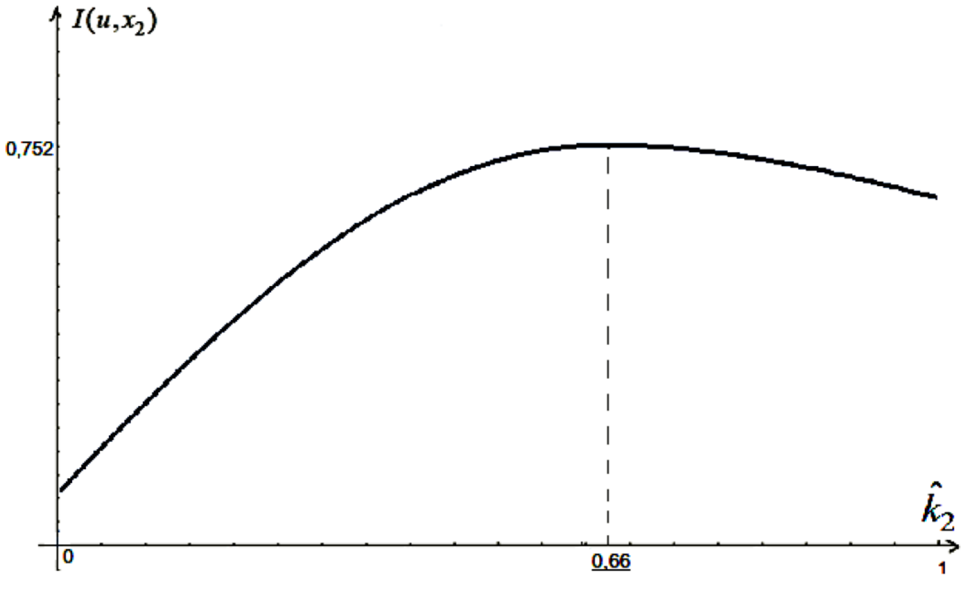

Рис. 2. График функции соотношения «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда посёлка Сылва Пермского края на 2025 г.
Fig. 2. Graph of the price-quality ratio function for all employed personnel in the labor market of the village Sylva in the Perm Territory for 2025

Как видно из графика, $\hat{k}_2^* = 0,66$.

Аналогично построим график $I(u,x_3)$ при $\hat{k}_2^* = 0,66$ (рис. 3).

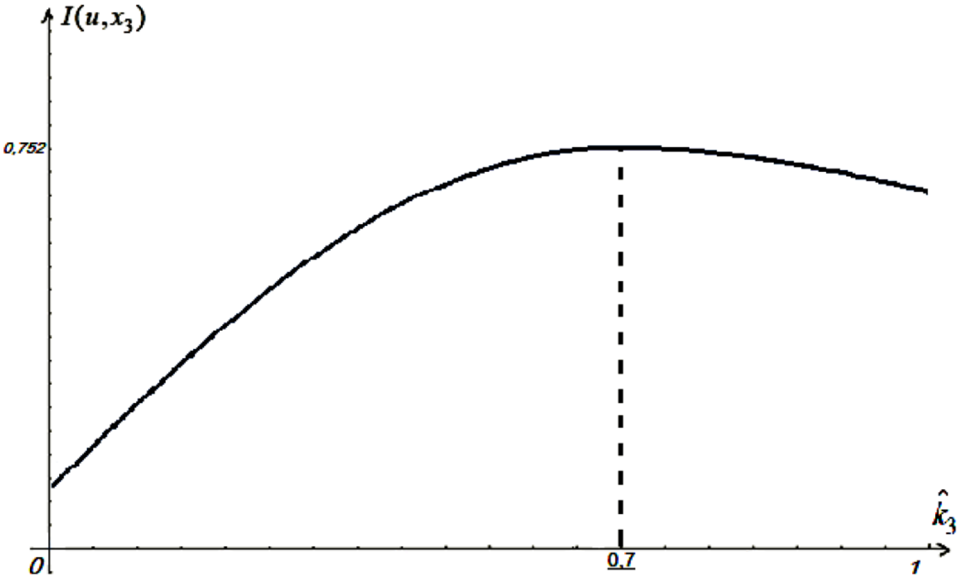

Рис. 3. График функции соотношения «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда посёлка Сылва Пермского края на 2026 г.
Fig. 3. Graph of the price-quality ratio function for all employed personnel in the labor market of the village Sylva in the Perm Territory for 2026

Как видно из графика, $\hat{k}_3^* = 0,7$.

Таким образом, функция $\hat{k} = \hat{k}(t)$ для рынка труда посёлка Сылва Пермского края на промежутке 2024–2026 гг. имеет следующий вид (рис. 4):

$\hat{k}(t)$	$0,59$	$0,66$	$0,7$
t	$[0; t_1]$	$(t_1; t_2]$	$(t_2; t_3]$

(8)

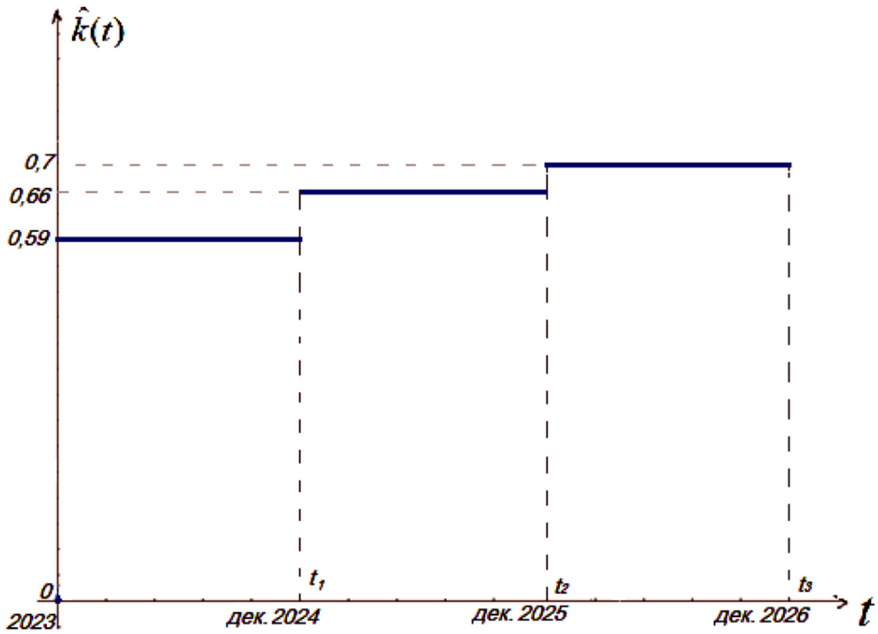

Рис. 4. График функции $\hat{k} = \hat{k}(t)$ для рынка труда посёлка Сылва Пермского края на промежутке 2024–2026 гг.
Fig. 4. Graph of the function $\hat{k} = \hat{k}(t)$ for the labor market of the village Sylva in the Perm Territory for 2024–2026

Очевидно, значение $\hat{k}_i^*$ с каждым годом увеличивается. Такое поведение функции $\hat{k}(t)$ объясняется тем, что при $r_\alpha > r_\beta > r_\gamma$ максимизация функционала соотношения «цена – качество» на рынке труда в общем случае подразумевает увеличение коэффициента селекции [10].

Таким образом, оптимальное управление рынком труда посёлка Сылва Пермского края подразумевает постепенное повышение значения коэффициента селекции на градообразующем предприятии. Учитывая, что на конец 2023 года значение коэффициента селекции АО «Пермская птицефабрика» согласно принятой выше «гипотезе C» [15, 16] равняется 0,44, в будущем году рекомендуется установить более строгие требования к соискателям вакантных должностей.

Заключение

Для предложенной в [9] модели замкнутого рынка труда коэффициент селекции впервые рассмотрен как кусочно-постоянная функция от времени. Сформулирована и решена задача оптимального управления реально существующим рынком труда посёлка Сылва Пермского края на ближайшие три года при условии, что коэффициент селекции градообразующего предприятия меняется каждый год, а коэффициенты качества остаются константами.

В дальнейшем коэффициенты качества также возможно рассмотреть как функции от времени, поскольку усреднённая оплата труда по субъектам всех трёх уровней квалификации в разрезе нескольких лет может меняться как минимум с поправкой на инфляцию и индексацию заработной платы.

Список литературы

1. Porter L., Steers R. Organizational, Work and Personal Factors in Turnover and Absenteeism // Psychological Bulletin. 1973. Vol. 80, no. 2. P. 151–176.

2. Review and Conceptual Analysis of the Employee Turnover Process / W. Mobley, R.W. Griffeth, H. Hand, B. Meglino // Psychological Bulletin. 1979. Vol. 86, no. 3. P. 493–522.

3. Кадырова А.Р. Текучесть кадров: обзор проблемы. Ч. 1. Экономико-математические модели текучести высшего руководства // Проблемы управления. 2015. № 2. С. 2–12.

4. Кадырова А.Р. Текучесть кадров: обзор проблемы. Ч. 2. Экономико-математические модели текучести неруководящих сотрудников // Проблемы управления. 2015. № 3. С. 2–11.

5. Lewin J., Sager J. The influence of personal characteristics and coping strategies on salespersons' turnover intentions // Journal of Personal Selling & Sales Management. 2010. no. 4. P. 355–370.

6. Кисляков С.В. Применение методов теории оптимального управления в регулировании количества рабочих мест на рынке труда // Экономика. Право. Печать. Вестник КСЭИ. 2012. № 3-4 (55-56). С. 174–176.

7. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики // Экономика и математические методы. 2007. Т. 43, № 1. С. 12–22.

8. Gorbunov D.L. Modeling of a closed mono-branch labor market conditions // Вестник Пермского университета. Серия «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2018. Т. 13, № 3. С. 357–371. DOI: 10.17072/1994-9960-2018-3-357-371

9. Горбунов Д.Л., Федосеев С.А. Модель управления конъюнктурой рынка труда предприятия в виде интегрируемой в квадратурах системы нелинейных дифференциальных уравнений // Прикладная математика и вопросы управления. 2019. № 4. С. 90–101. DOI: 10.15593/2499-9873/2019.4.06

10. Горбунов Д.Л. Оптимальное управление рынком труда при ограничениях в виде интегрируемой в квадратурах конечномерной системы нелинейных дифференциальных уравнений // Прикладная математика и вопросы управления. 2023. № 2. С. 83–92. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.08

11. The Control Handbook: Control System Advanced Methods / Ed. W.S. Levine. Boca-Raton; London; New York: CRC Press, 2010. 942 p.

12. Рагимов А.Б. Решение задач оптимального управления при кусочно-постоянных, кусочно-линейных и кусочно-заданных на классе функций управляющих воздействий // Проблемы управления. 2015. № 2. С. 13–23.

13. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций // Автоматика и вычислительная техника. 2007. Т. 41, № 1. С. 27–36.

14. Алексеев А.О., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 384 с.

15. Федосеев С.А., Горбунов Д.Л. Модель прогнозирования муниципального рынка труда // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22, № 3. С. 163–171. DOI: 10.14529/ctcr220315

16. Gorbunov D.L., Fedoseev S.A., Eltsova M.N. System-Dynamic Model for Forecasting Municipal Labour Market Development // 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). 2022. P. 296–300. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9974101

17. Cai X. Canonical Coin Systems for Change-Making Problems // Proceedings of the Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems. 2009. P. 499–504. DOI: 10.1109/HIS.2009.103

18. Численность населения посёлка Сылва Пермского района Пермского края. URL: https://bdex.ru/naselenie/permskiy-kray/n/permskiy/sylva/ (дата обращения: 13.12.2023).

19. АО «Продо птицефабрика Пермская». URL: https://заводы.рф/factory/prodo-pticefabrika-permskaya (дата обращения: 13.12.2023).

References

1. Porter L., Steers R. Organizational, Work and Personal Factors in Turnover and Absenteeism. *Psychological Bulletin*. 1973;80(2):151–176.

2. Mobley W, Griffeth R.W., Hand H., Meglino B. Review and Conceptual Analysis of the Employee Turnover Process. *Psychological Bulletin*. 1979;86(3):493–522.

3. Kadyrova A. R. [Staff turnover: an overview of the problem. Part 1. Economic and mathematical models of senior management turnover]. *Control sciences*. 2015;2:2–12. (In Russ.)

4. Kadyrova A.R. [Staff turnover: an overview of the problem. Part 2. Economic and mathematical models of turnover of non-managerial employees]. *Control sciences*. 2015;3:2–11. (In Russ.)

5. Lewin J., Sager J. The influence of personal characteristics and coping strategies on salespersons' turnover intentions. *Journal of Personal Selling & Sales Management*. 2010;4:355–370.

6. Kislyakov S. V. [Application of optimal management theory methods in regulating the number of jobs in the labor market]. *Economy. Right. Print. Bulletin of the CSEI*. 2012;3-4(55-56):174–176. (In Russ.)

7. Seminichin E.A., Zaytseva I.V. [A mathematical model of self-organization of the labor market for several sectors of the economy]. *Economics and mathematical methods*. 2007;43(1):12–22. (In Russ.)

8. Gorbunov D.L. Modeling of a closed mono-branch labor market conditions. *Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy*. 2018;13(3):357–371. DOI: 10.17072/1994-9960-2018-3-357-371

9. Gorbunov D.L., Fedoseev S.A. The model of control labor market conditions company as a integrability in quadratures system of nonlinear differencial equations. *Applied mathematics and control sciences*. 2019;4:90–101. (In Russ.) DOI: 10.15593/2499-9873/2019.4.06

10. Gorbunov D.L. Optimal labor market management under constraints in the form of a finite-dimensional system of nonlinear differential equations integrated by quadratures. *Applied mathematics and control sciences*. 2023;2:83–92. (In Russ.) DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.08

11. Levine W.S. (Ed.). The Control Handbook: Control System Advanced Methods. Boca-Raton; London; New York: CRC Press; 2010. 942 p.

12. Ragimov A.B. [Solving optimal control problems with piecewise constant, piecewise linear and piecewise set control actions on a class of functions]. *Control Sciences*. 2015;2:13–23. (In Russ.)

13. Ayda-zade K.R., Ragimov A.B. [On solving optimal control problems in the class of piecewise constant functions]. *Automation and Computer Engineering*. 2007;41(1):27–36. (In Russ.)

14. Alekseev A.O., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 384 p. (In Russ.)

15. Fedoseev S.A., Gorbunov D.L. Forecasting model municipal labor market. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2022;22(3):163–171. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr220315

16. Gorbunov D.L., Fedoseev S.A., Eltsova M.N. System-Dynamic Model for Forecasting Municipal Labour Market Development. In: *2022 4th International Conference on Control Systems,*

Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). 2022. P. 296–300. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9974101

17. Cai X. Canonical Coin Systems for Change-Making Problems. In: *Proceedings of the Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*. 2009. P. 499–504. DOI: 10.1109/HIS.2009.103

18. *Chislennost' naseleniya poselka Sylva Permskogo rayona Permskogo kraya* [The population of the village. Sylva of Permsky district of Perm Krai]. (In Russ.) Available at: https://bdex.ru/naselenie/permskiy-kray/n/permskiy/sylva/ (accessed 13.12.2023)

19. *AO "Prodo ptitsefabrika Permskaya"* [JSC "Prodo Ptitsefabrika Permskaya"]. (In Russ.) Available at: https://zavody.rf/factory/prodo-pticefabrika-permskaya/ (accessed 13.12.2023).

Информация об авторах

Федосеев Сергей Анатольевич, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; fsa@gelicon.biz.

Горбунов Даниил Львович, аспирант кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; call-of-monolit@yandex.ru.

Information about the authors

Sergey A. Fedoseev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics Department, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; fsa@gelicon.biz.

Daniil L. Gorbunov, Postgraduate Student of the Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics Department, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; call-of-monolit@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 15.12.2023
The article was submitted 15.12.2023