

ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ШАГАЮЩИХ И КОЛЕСНО-ШАГАЮЩИХ МАШИН

А.И. Телегин¹, teleginai@susu.ru

Е.В. Гусев², gusev@susu.ru

Г.И. Волович³, g_volovich@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3572-1823>

С.Г. Некрасов², nekrasovsg@susu.ru

¹ Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе,
Миасс, Россия

² Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

³ ООО «Челэнергоприбор», Челябинск, Россия

Аннотация. Целью исследования является решение первой задачи динамики машин, перемещающих свой корпус при помощи ног, т. е. вычисление управляющих воздействий приводов ног, обеспечивающих заданную динамику абсолютного движения корпуса и удовлетворяющих ограничениям, при выполнении которых отсутствует скольжение опорных ног относительно опорной поверхности. **Методы исследования** относятся к системному анализу, механике систем тел и робототехнике. Рассматриваются шагающие и колесно-шагающие машины, к корпусу которых подвешены ноги, у которых последняя кинематическая пара является поступательной, управляемая стопа отсутствует и нога с опорной поверхностью взаимодействуют в одной точке. **Результаты исследования** содержат аналитические формулы для вычисления динамических реакций в точках контакта ног с опорной поверхностью, а также движущие силы и моменты сил в приводах опорных и переносных ног, обеспечивающих заданное движение корпуса относительно опорной поверхности, а также ему соответствующие относительные движения тел опорных ног. Описывается формализм решения таких задач, основанный на обратных векторных рекуррентных формулах вычисления сил и моментов сил динамических реакций в кинематических парах древовидных систем тел с замыканием последнего тела ветви на опорную поверхность. Этот формализм распространяется на колесные, колесно-шагающие и шагающие машины, что продемонстрировано на соответствующих примерах. Записываются аналитические условия реализации шага без проскальзывания опорных ног относительно опорной поверхности. Предложены две простые колесно-шагающие машины, состоящие из линейного электропривода и ведомой (пассивной) колесной пары, которые предназначены для экспериментального определения значений коэффициентов трения скольжения и качения. В аналитических видах выведенных расчетных формул (уравнений и неравенств) явно выражены структурные, геометрические, инерционные и кинематические параметры исследуемых машин. Предложенный формализм демонстрируется на решениях четырех задач от простого к сложному через повторное использование формул. **Заключение.** Полученные математические модели можно использовать в процессах расчета и конструирования аналогичных машин и их макетов.

Ключевые слова: шагающая машина, колесно-шагающая машина, рекуррентные формулы, уравнения динамики, динамические реакции, трение скольжения, трение качения

Для цитирования: Формализм решения первой задачи динамики шагающих и колесно-шагающих машин / А.И. Телегин, Е.В. Гусев, Г.И. Волович, С.Г. Некрасов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24, № 2. С. 39–55. DOI: 10.14529/ctcr240204

FORMALISM FOR SOLVING THE FIRST PROBLEM OF THE DYNAMICS OF WALKING AND WHEEL-WALKING MACHINES

A.I. Telegin¹, teleginai@susu.ru

E.V. Gusev², gusevev@susu.ru

G.I. Volovich³, g_volovich@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3572-1823>

S.G. Nekrasov², nekrasovsg@susu.ru

¹ South Ural State University, Miass, Russia

² South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

³ LLC Chelenergopribor, Chelyabinsk, Russia

Abstract. The aim is to solve the first problem of the dynamics of machines moving their bodies with the help of legs, i.e., to calculate the control actions of the leg actuators that provide the given dynamics of the absolute motion of the body and satisfy the constraints, when fulfilled, there is no sliding of the supporting legs relative to the supporting surface. The research methods are related to system analysis, mechanics of body systems and robotics. We consider walking and wheel-walking machines with legs suspended from the body, in which the last kinematic pair is translational, there is no controlled foot, and the foot and the supporting surface interact at a single point. The results of the study contain analytical formulas for calculating dynamic reactions at the points of contact between the legs and the supporting surface, as well as driving forces and moments of forces in the drives of the supporting and carrying legs, providing a given motion of the body relative to the supporting surface, as well as its corresponding relative motion of the bodies of the supporting legs. A formalism for solving such problems is described, based on inverse vector recurrence formulas for calculating forces and moments of forces of dynamic reactions in kinematic pairs of tree-like systems of bodies with closure of the last body of the branch on the supporting surface. This formalism is extended to wheeled, wheel-walking and walking machines, which is demonstrated by appropriate examples. Analytical conditions for realizing a step without slipping of the support legs relative to the support surface are written down. Two simple wheel-walking machines, consisting of a linear electric drive and a driven (passive) wheelset, are proposed for the experimental determination of sliding and rolling friction coefficient values. In analytical forms of deduced calculation formulas (equations and inequalities) the structural, geometric, inertial and kinematic parameters of the investigated machines are explicitly expressed. The proposed formalism is demonstrated on the solutions of four problems from simple to complex through the reuse of formulas. **Conclusion.** The obtained mathematical models can be used in the processes of calculation and design of similar machines and their layouts.

Keywords: walking machine, wheel-walking machine, recurrence formulas, equations of dynamics, dynamic reactions, sliding friction, rolling friction

For citation: Telegin A.I., Gusev E.V., Volovich G.I., Nekrasov S.G. Formalism for solving the first problem of the dynamics of walking and wheel-walking machines. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics.* 2024;24(2):39–55. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr240204

Введение

Шагающая машина (ШМ) – это древовидная система тел с переменной структурой, ветви которой периодически замыкаются на опорную поверхность (ОП) и размыкаются в процессе перехода ноги из опорного состояния в переносное. ШМ обеспечивает перемещение своего корпуса за счет относительных движения тел опорных ног. Во многих областях деятельности человека по сравнению с традиционными транспортными средствами автоматически управляемые ШМ оказываются вне конкуренции. К таким областям относятся: транспортные, грузоподъемные и монтажные операции на сложной местности и в условиях чрезвычайных ситуаций (зоны разрушений, горная местность, откосы дорожного полотна и др.); перемещение при минимальных повреждениях поверхностного слоя земли; перемещение в среде, для которой характерны узкие проходы, спуски, подъемы, выступы и т. п. [1–3].

Использование ног в качестве движителей позволяет повысить профильную проходимость и перемещаться по сильно пересеченной местности. За счет изменения движения ног относительно корпуса ШМ может обеспечить комфортабельное движение своего корпуса при перемещении по поверхности с неровностями, достигающими величины дорожного просвета, и компенсировать деформацию грунта в точках опоры ног. Высокая маневренность и возможность адаптации позволяют использовать ШМ в помещениях, приспособленных для человека (лестничные марши, узкие коридоры с поворотами на 90 градусов, дверные проемы). ШМ способны перемещаться вперед, назад, вбок, совершать повороты и развороты на месте, перемещаться под произвольным углом между направлением движения и продольной осью ШМ [4, 5].

ШМ можно использовать в качестве многоцелевой шасси-платформы, имеющей высокую проходимость и способную доставлять в нужное место и обеспечивать функционирование технологического оборудования, средств обезвреживания мин, доставки на исходную позицию средств ведения боевых действий с танками, вертолетами и другими боевыми единицами противника с максимальной эффективностью и минимальным риском для личного состава армии [6].

В середине 80-х годов прошлого столетия во многих странах приступили к созданию ШМ, предназначенных для ликвидации последствий аварий на АЭС. Они конструировались для целей перемещения в замкнутых пространствах (в помещениях ограниченного объема). Такие ШМ способны протискиваться в проломы, спускаться и подниматься по лестничным маршам, избегать провалов в полу и т. д. При ликвидации последствий крупных техногенных аварий и катастроф возникает потребность проведения ремонтных и спасательных работ, разведки местности и очистки территорий в особо опасных условиях для людей (радиоактивных, токсичных, взрывоопасных средах, под водой, в шахтах, в завалах и др.), в которых колесные и гусеничные автоматические управляемые транспортные средства не работоспособны [7–9].

Одной из ключевых задач при организации движения ШМ по ОП является определение динамических реакций в точках опоры ног. Для заданного движения корпуса и ног реакции в точках опоры определены, как правило, неоднозначно. Эта неопределенность связана с недостаточным количеством уравнений для однозначного вычисления указанных реакций. Задачу снятия этой неопределенности решают по-разному. В монографии [7], например, рассматривается задача оптимального распределения реакций по точкам опоры, которая сводится к задачам линейного и квадратичного программирования. Часто используют датчики, измеряющие опорные реакции в местах контакта ног с ОП [10–12]. В настоящей статье указанная неопределенность снимается либо путем использования пассивных кинематических пар (КП), либо использованием модели Кулона с условием отсутствия проскальзывания опорной ноги относительно ОП. В последнем примере настоящей статьи демонстрируются оба подхода.

Моделирование ШМ иногда начинают с моделирования колесно-шагающей машины (КШМ), у которой конструкция одной или двух ног повторяет конструкцию ног ШМ. Это позволяет на простых моделях решить ряд задач, возникающих в расчетах ШМ.

Постановка задачи: рассмотреть класс ШМ и КШМ, у которых движителем является одна или несколько ног, подвешенных к корпусу, где последняя кинематическая пара каждой ноги является поступательной; разработать формализм вывода формул вычисления динамических реакций в опорных точках ног, а также движущих сил и моментов сил в кинематических парах ног для заданных абсолютных ускорений центров масс и скоростей кинетических моментов относительно центров масс каждого тела рассматриваемых машины; привести примеры, в которых записать условия реализации шага без проскальзывания опорных ног относительно ОП.

1. Основные расчетные формулы

Тело с порядковым номером i и его массу обозначим через m_{oi} . Для сокращения записей будем использовать следующие аббревиатуры: ПТ(i) – полюс тела m_{oi} ; ЦМ(i) – центр масс тела m_{oi} ; БТ(i) – база тела m_{oi} ; КП(i) – кинематическая пара, связывающая тело m_{oi} с БТ(i); ПКП(i) – поступательная КП(i); ВКП(i) – вращательная КП(i). Будем использовать следующие обозначения: O_j – ПТ(j); C_j – ЦМ(j); \overline{W}_{cj} – абсолютное ускорение ЦМ(j); $P_j = m_{oj}g$ – вес тела m_{oj} ; $a_j = |\overline{O_jC_j}|$ – расстояние от ПТ(j) до ЦМ(j); \overline{c}_j – орт, указывающий направление из ПТ(j) в ЦМ(j); \overline{y} – орт вертикали; g – ускорение свободного падения; \overline{K}_{cj} – кинетический момент тела

m_{oj} относительно ЦМ(j); S_j – множество номеров тел, образующих КП с телом m_{oj} ; $\bar{R}_k = \bar{O}_j \bar{O}_k$ – межполюсный вектор КП(k) для $k \in S_j$, т. е. $j = k - 1$; \bar{F}_j^r, \bar{M}_j^r – главный вектор и момент относительно ПТ(j) сил реакций, действующих на тело m_{oj} со стороны мысленно разорванных связей при переходе от древовидной системы тел с циклами (с замкнутыми ветвями) к системе тел с открытыми ветвями, а также изоляции системы тел от действия внешней среды.

Согласно утверждению 7 книги [13] сила \bar{F}_i и момент силы \bar{M}_i относительно ПТ(i), действующие на тело m_{oi} со стороны БТ(i), можно вычислять по следующим векторным обратным рекуррентным формулам (ОРФ):

$$\bar{F}_j = m_{oj} \bar{W}_{cj} + P_j \bar{y} - \bar{F}_j^r + \sum_{k \in S_j} \bar{F}_k, \quad (1)$$

$$\bar{M}_j = a_j \bar{c}_j \times (m_{oj} \bar{W}_{cj} + P_j \bar{y}) + \bar{K}_{cj} - \bar{M}_j^r + \sum_{k \in S_j} (\bar{R}_k \times \bar{F}_k + \bar{M}_k), \quad (2)$$

где $j = N, N - 1, \dots, i$; N – номер последнего тела системы тел.

Если концевое тело m_{ok} является колесом и ЦМ(k) лежит на оси его вращения, то, совместив ПТ(k) с ЦМ(k), получим $a_k = 0$ и уравнение (2) примет вид

$$\bar{M}_k = \bar{K}_{ck} - \bar{M}_k^r. \quad (3)$$

Для системы тел на плоскости

$$\bar{K}_{cj} = I_j^c \ddot{\alpha}_j \bar{q}, \quad (4)$$

где I_j^c – момент инерции тела m_{oj} относительно оси $C_j \bar{q}$; $\ddot{\alpha}_j$ – абсолютное угловое ускорение тела m_{oj} ; \bar{q} – орт нормали к плоскости движения тел.

Из \bar{F}_k и \bar{M}_k можно выделить динамические реакции (реактивные составляющие), движущие силы и моменты сил. Реактивные составляющие удерживают тело m_{ok} от относительных движений, недопускаемых связями. Движущие составляющие обеспечивают относительные движения тела m_{ok} в направлениях, допускаемых связями.

В ПКП(k) тело m_{ok} может двигаться поступательно относительно БТ(k) вдоль оси $O_k \bar{p}_k$, жестко связанной с телом m_{ok} , где \bar{p}_k – орт оси ПКП(k), указывающий положительное направление поступательного движения. В ПКП(k) сила реакции \bar{F}_{rk} , перпендикулярная оси $O_k \bar{p}_k$, и момент силы \bar{M}_k относительно ПТ(k) являются реактивными. Вектор \bar{M}_k неизвестен по модулю и направлению. Для \bar{F}_{rk} неизвестны модуль и направление в плоскости, перпендикулярной оси $O_k \bar{p}_k$. Следовательно,

$$\bar{F}_k = \bar{F}_{rk} + F_k \bar{p}_k, \quad (5)$$

где $\bar{p}_k \cdot \bar{F}_{rk} = 0$, $F_k = \bar{p}_k \cdot \bar{F}_k$ – сумма движущей силы и силы трения в ПКП(k). Если в ПКП движущая сила отсутствует, то F_k – сила трения в ПКП(k).

В ВКП(k) тело m_{ok} может вращаться относительно БТ(k) вокруг оси $O_k \bar{q}_k$, где \bar{q}_k – орт оси ВКП(k) и положительным считается вращение против хода стрелки часов. К реактивным в ВКП(k) относится сила реакции \bar{F}_k , неизвестная по модулю и направлению, и момент \bar{M}_{rk} относительно ПТ(k) силы реакции. Момент \bar{M}_{rk} перпендикулярен оси $O_k \bar{q}_k$. Следовательно,

$$\bar{M}_k = \bar{M}_{rk} + M_k \bar{q}_k, \quad (6)$$

где $\bar{q}_k \cdot \bar{M}_{rk} = 0$, $M_k = \bar{q}_k \cdot \bar{M}_k$ – сумма движущего момента силы и момента силы трения в ВКП(k) относительно оси $O_k \bar{q}_k$. Если в ВКП(k) движущий момент силы отсутствует, то M_k – момент силы трения в ВКП(k) относительно оси $O_k \bar{q}_k$.

2. Колесно-шагающие машины и виды трения

Для исследования необходимых условий выполнения шага рассмотрим примеры моделирования КШМ.

КШМ состоит из корпуса m_{o1} , на одном конце которого установлена колесная пара, а на другом подвешены одна или две ноги. КШМ с одной ногой предназначена для исследования необходимых условий выполнения одного шага, энергетических затрат на его реализацию, потребляемой и рассеиваемой мощности привода ноги, а также экспериментального определения трения скольжения, качения и верчения. КШМ с двумя ногами часто называют – рикша, которую в основном

используют для исследования ходьбы по горизонтальной или наклонной прямой. На рис. 1 изображена простейшая КШМ в вертикальной плоскости с одной однозвенной ногой, образующей с корпусом ПКП, в которой горизонтальный корпус является направляющей. На рис. 2 изображена КШМ с полярной ногой, в которой корпус и нога меняют свою ориентацию в процессе выполнения шага. Для создания макетов таких КШМ необходима одна ПКП и колесная пара. КШМ на рис. 1, 2 состоят из трех тел, их движителем является ПКП с приводом (активная ПКП). КШМ на рис. 3, 4 состоят из четырех тел. Движитель (нога) КШМ на рис. 3 состоит из двух активных ПКП. Нога КШМ на рис. 4 содержит активную ВКП, за которой следует активная ПКП.

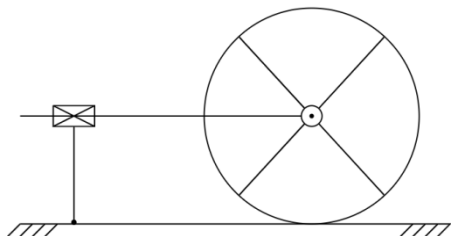


Рис. 1. Простейшая колесно-шагающая машина
Fig. 1. The simplest wheeled walking machine

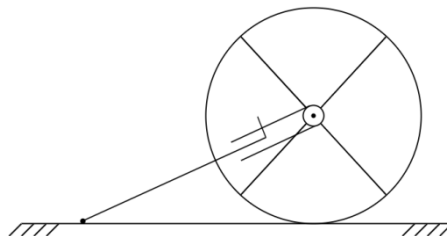


Рис. 2. Колесно-шагающая машина с полярной ногой
Fig. 2. A wheel-walking machine with a polar foot

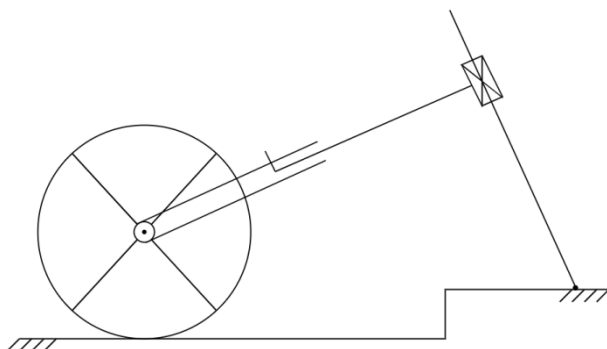


Рис. 3. Колесно-шагающая машина
с декартовой ногой
Fig. 3. Wheel-walking machine with a Cartesian foot

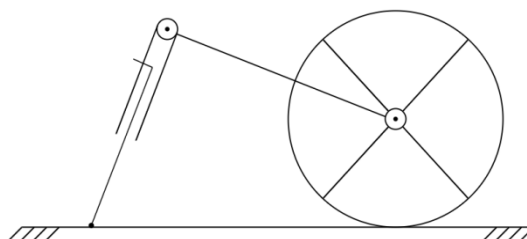


Рис. 4. Колесно-шагающая машина
с полярной ногой и корпусом
Fig. 4. Wheel-walking machine with polar foot and hull

КШМ в горизонтальной плоскости с двумя трехзвенными декартовыми, цилиндрическими или ангулярными ногами моделируют для исследования ходьбы по горизонтальной и наклонной плоскости. КШМ с двумя трехзвенными сферическими или ангулярными ногами моделируют для исследования ходьбы по сложной ОП в пространстве. Смотрите, например, двухногую КШМ в монографии [8, с. 239].

В процессе моделирования, расчета, конструирования и создания прототипа ШМ рекомендуется создать и исследовать макет КШМ, у которой конструкция ноги совпадает с конструкциями ног ШМ [8]. Например, перед моделированием ШМ на рис. 5 рекомендуется рассмотреть КШМ на рис. 4.

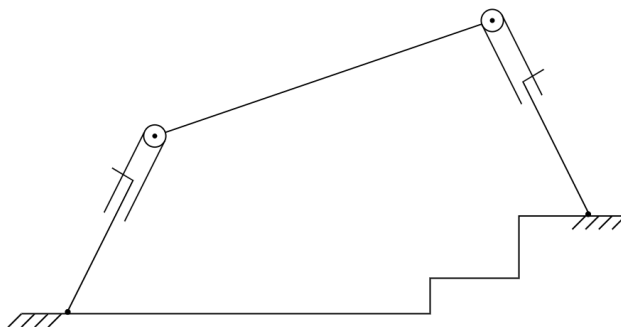


Рис. 5. Схема макета шагающей машины для исследования одного шага
Fig. 5. Schematic diagram of a mock-up of a walking machine for a single step study

Без наличия трения в точке контакта стопы КШМ с ОП организовать движение его корпуса относительно ОП невозможно. Поэтому коротко обсудим виды трения, действующие на тела КШМ.

Трение является причиной сопротивления движению соприкасающихся тел относительно друг друга. В зависимости от относительного движения трущихся тел различают трение скольжения, трение качения и трение верчения. На практике перечисленные виды трения могут иметь место одновременно, например, колеса автомобиля могут одновременно катиться, скользить и вертеться на поворотах. В КШМ при взаимодействии колеса с ОП могут иметь место одновременно все три вида трения, а при взаимодействии ноги с ОП может одновременно иметь место трение скольжения и верчения.

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхностей соприкосновения тел возникает сила трения скольжения, которую иногда называют трением первого рода [14]. Эта сила трения препятствует скольжению взаимодействующих тел относительно друг друга. Если колесо катить или стремиться катить по ОП, то кроме силы трения скольжения из-за деформации поверхностей взаимодействующих тел дополнительно возникает пара сил, препятствующая качению колеса, которую иногда называют трением второго рода [14].

ОП является связью для концевых тел (колес и стоп ног) КШМ. Если поверхности соприкасающихся тел абсолютно гладкие, то реакция ОП направлена по нормали к общей касательной в точке контакта и ее направление не зависит от действия на ногу активных сил приводов ее тел. От этих сил зависит только модуль (числовая величина) силы реакции. В действительности абсолютно гладких ОП как и абсолютно твердых тел не бывает. Все тела деформируемы и их поверхности в той или иной степени шероховаты. Поэтому реакция ОП зависит от активных сил приводов ноги как по величине, так и по направлению, т. е. ее можно разложить на составляющие, одна из которых направлена по общей нормали к поверхности соприкосновения, а другая (сила трения скольжения) лежит на этой поверхности.

Если конец последнего тела m_{ok} ноги соприкасается с ОП, то сила \vec{F}_k^r реакции шероховатой ОП, действующая на тело m_{ok} , зависит от активных сил в КП ноги как по величине, так и по направлению. Если \vec{F}_k^r разложить на составляющие, одна из которых \vec{F}_{yk} направлена по общей нормали к поверхности соприкосновения, а другая \vec{F}_{tk} находится в касательной плоскости к этим поверхностям, то составляющая \vec{F}_{tk} является силой трения скольжения, а составляющая \vec{F}_{yk} – нормальной реакцией. По модели Кулона модули этих составляющих связаны друг с другом. Если сила реакции \vec{F}_k^r уравнивает активные силы (движущие силы приводов ноги), то $F_{tk} \leq f_0 F_{yk}$, $F_{tk} = f F_{yk}$ где f_0 – коэффициент трения покоя, f – коэффициент трения скольжения ($f < f_0$). В первой задаче динамики машины абсолютное движение корпуса и ног задается. Поэтому часто удается определить направление реакции \vec{F}_{tk} . Например, если в плоской модели КШМ или ШМ корпус движется вдоль оси $O\bar{x}$, то $\vec{F}_{tk} = -\vec{F}_{xk}$ и

$$\vec{F}_k^r = -F_{xk}\bar{x} + F_{yk}\bar{y}, \quad F_{xk} \leq f_0 F_{yk}, \quad (7)$$

где F_{xk} – модуль силы трения, связанной с силой нормального давления формулой Кулона $F_{xk} = f F_{yk}$. Неравенство в формулах (7) является условием отсутствия проскальзывания ноги ШМ относительно ОП, т. е. это условие реализации шага.

Части тел ВКП, находящиеся в соприкосновении, называют шипом и подшипником. Подшипник воспринимает как радиальную (перпендикулярную оси ВКП), так и аксиальную (коллинарную оси ВКП) нагрузку со стороны шипа. Моменты сил трения, вызванные каждой нагрузкой, определяются отдельно. От радиальной нагрузки модуль момента силы трения в ВКП(k) вычисляется по формуле [15]

$$M_k = r f N_{rk}, \quad (8)$$

где r – радиус шипа и подшипника; f – приведенный коэффициент трения, N_{rk} – радиальная нагрузка в ВКП(k). Величина f безразмерная и зависит от конструкции ВКП [15].

При качении колеса m_{ok} по горизонтальной ОП в результате их деформаций соприкосновение m_{ok} с ОП происходит по небольшой дуге, смещенной в сторону движения вместе с точкой

приложения вектора \vec{F}_k^r . Величину f_t этого смещения называют коэффициентом трения качения. Поэтому модуль силы трения качения, приведенной к оси вращения колеса, вычисляется по формуле [15]

$$M_k^r = |f_t F_{yk} - R F_{xk}|, \quad (9)$$

где R – радиус колеса; F_{xk}, F_{yk} – касательная и нормальная составляющая реакции \vec{F}_k^r ; f_t – коэффициент трения качения.

3. Общий формализм решения первой задачи динамики машин

Для решения первой задачи динамики колесных, колесно-шагающих и шагающих машин рекомендуем последовательно выполнить действия следующих девяти этапов. Подробности этого формализма рассмотрим в процессе решения конкретных задач в порядке от простого к сложному.

Этап 1. Корпус и тела всех движителей (ног и колес с их подвеской) последовательно занумеровать числами 1, 2, 3, 4, ..., N , где N – общее количество подвижных тел машины. Тогда m_{o1} – корпус, m_{o2} – первое тело первого движителя (для ШМ первой ноги), m_{o3} – второе тело первого движителя, m_{o4} – третье тело первого движителя, m_{o5} – первое тело второго (трехзвенного) движителя и так далее. Изобразить кинематическую схему машины в исходном относительном положении тел ВКП, указать ПТ(i) и ЦМ(i), мысленно закрепить за телами связанные системы координат ССК(i) $O_i \vec{x}_i \vec{y}_i \vec{z}_i$, где \vec{x}_i – орт горизонтали, \vec{y}_i – орт вертикали, \vec{z}_i – орт, дополняющий орты \vec{x}_i, \vec{y}_i до правого репера. При необходимости описать параметры q_j относительного положения тел машины. Перечислить нулевые и постоянные значения величин, входящих в формулы (1), (2). Выразить орты $\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{c}_i$ и межполюсные векторы \vec{R}_i через орты ССК тел или орты $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ правой неподвижной системы координат, где ось $O\vec{x}$ горизонтальна, ось $O\vec{y}$ вертикальна, т. е. $\vec{g} = -g\vec{y}$.

Этап 2. Мысленно устранить связи движителей (колес, ног) с ОП, заменив их реакциями \vec{F}_i^r, \vec{M}_i^r , где $i \in N_o$ – множество номеров последних тел опорных движителей машины (опорных ног). Если на корпус (тело m_{o1}) действуют внешние силы и/или моменты сил, например, порывы ветра, то необходимо их заменить соответствующими реакциями \vec{F}_1^r и/или \vec{M}_1^r .

Этап 3. Для конечного тела m_{oi} по ОРФ (1) выписать формулу

$$\vec{F}_i = m_{oi} \vec{W}_{ci} + P_i \vec{y} - \delta_i \vec{F}_i^r, \quad (10)$$

где $i \in N_e$ – множество номеров конечных тел машины; $\delta_i = 1$ если $i \in N_o$, иначе $\delta_i = 0$.

Если m_{oi-1} – предпоследнее тело движителя, то по ОРФ (1) с учетом (10) выписать формулу

$$\vec{F}_{i-1} = m_{oi-1} \vec{W}_{ci-1} + P_{i-1} \vec{y} + \vec{F}_i = \sum_{j=i-1}^i m_{oj} \vec{W}_{cj} + P_{i-1}^p \vec{y} - \delta_i \vec{F}_i^r, \quad (11)$$

где $P_{i-1}^p = P_{i-1} + P_i = (m_{oi-1} + m_{oi})g$ – вес двух последних тел движителя.

Аналогично, если m_{oi-2} – первое тело движителя, то по ОРФ (1) с учетом (11) выписать формулу

$$\vec{F}_{i-2} = m_{oi-2} \vec{W}_{ci-2} + P_{i-2} \vec{y} + \vec{F}_{i-1} = \sum_{j=i-2}^i m_{oj} \vec{W}_{cj} + P_d \vec{y} - \delta_i \vec{F}_i^r, \quad (12)$$

где $P_d = \sum_{j=i-2}^i P_j = g \sum_{j=i-2}^i m_{oj}$ – вес движителя (ноги).

Этап 4. Для каждой ПКП(i), используя выписанные на этапе 3 силы, записать формулу вычисления искомой движущей силы $F_i = \vec{p}_i \cdot \vec{F}_i$.

Этап 5. По ОРФ (1), используя формулы (12), выписать векторное уравнение

$$\vec{F}_1 = m_{o1} \vec{W}_{c1} + P_1 \vec{y} - \delta_1 \vec{F}_1^r + \sum_{k \in S_1} \vec{F}_k = \sum_{j=1}^N m_{oj} \vec{W}_{cj} + P \vec{y} - \sum_{i \in N_o} \vec{F}_i^r - \delta_1 \vec{F}_1^r = 0, \quad (13)$$

где S_1 – множество номеров тел, смежных корпусу m_{o1} ; $P = \sum_{j=1}^N P_j = g \sum_{j=1}^N m_{oj}$ – вес машины. $\delta_1 = 1$, если \vec{F}_1^r – сила реакции внешней среды, введенная в обращение в процессе изоляции машины от действия внешней среды. Иначе $\delta_1 = 0$. Из векторного уравнения (13) получить два (для модели машины на плоскости) или три скалярных уравнения, т. е. проекции уравнения (13) на оси $O\vec{x}, O\vec{y}, O\vec{z}$. Подробности рассмотрим в конкретных примерах.

Этап 6. По аналогии с этапом 3 для каждого движителя по ОРФ (2) выписать формулы вычисления векторов \vec{M}_i^r , где i пробегает номера тел движителя от последнего до первого.

Для концевой тела m_{oi} по ОРФ (2) выписать формулу

$$\bar{M}_i = a_i \bar{c}_i \times (m_{oi} \bar{W}_{ci} + P_i \bar{y}) + \bar{K}_{ci} - \delta_i \bar{M}_i^r. \quad (14)$$

Если m_{oi-1} – тело движителя, то по ОРФ (2) выписать формулу

$$\bar{M}_{i-1} = a_{i-1} \bar{c}_{i-1} \times (m_{oi-1} \bar{W}_{ci-1} + P_{i-1} \bar{y}) + \bar{K}_{ci-1} + \bar{R}_i \times \bar{F}_i + \bar{M}_i,$$

где с учетом формул (10), (14) имеем

$$\bar{R}_i \times \bar{F}_i + \bar{M}_i = \bar{R}_i \times (m_{oi} \bar{W}_{ci} + P_i \bar{y} - \delta_i \bar{F}_i^r) + a_i \bar{c}_i \times (m_{oi} \bar{W}_{ci} + P_i \bar{y}) + \bar{K}_{ci} - \delta_i \bar{M}_i^r.$$

Следовательно,

$$\bar{M}_{i-1} = \sum_{j=i-1}^i [a_j \bar{c}_j \times (m_{oj} \bar{W}_{cj} + P_j \bar{y}) + \bar{K}_{cj}] + \bar{R}_i \times (m_{oi} \bar{W}_{ci} + P_i \bar{y} - \delta_i \bar{F}_i^r) - \delta_i \bar{M}_i^r. \quad (15)$$

Аналогично, если m_{oi-2} – тело движителя, то по ОРФ (2) выписать формулу

$$\bar{M}_{i-2} = a_{i-2} \bar{c}_{i-2} \times (m_{oi-2} \bar{W}_{ci-2} + P_{i-2} \bar{y}) + \bar{K}_{ci-2} + \bar{R}_{i-1} \times \bar{F}_{i-1} + \bar{M}_{i-1},$$

где с учетом формул (11), (15) имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{i-1} \times \bar{F}_{i-1} + \bar{M}_{i-1} = & \bar{R}_{i-1} \times (m_{oi-1} \bar{W}_{ci-1} + m_{oi} \bar{W}_{ci} + P_{i-1}^p \bar{y} - \delta_i \bar{F}_i^r) + \\ & + \sum_{j=i-1}^i [a_j \bar{c}_j \times (m_{oj} \bar{W}_{cj} + P_j \bar{y}) + \bar{K}_{cj}] + \bar{R}_i \times (m_{oi} \bar{W}_{ci} + P_i \bar{y} - \delta_i \bar{F}_i^r) - \delta_i \bar{M}_i^r. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{i-2} = & \sum_{j=i-2}^i [a_j \bar{c}_j \times (m_{oj} \bar{W}_{cj} + P_j \bar{y}) + \bar{K}_{cj}] + m_{oi-1} \bar{R}_{i-1} \times \bar{W}_{ci-1} + \\ & + m_{oi} (\bar{R}_{i-1} + \bar{R}_i) \times \bar{W}_{ci} + (P_{i-1}^p \bar{R}_{i-1} + P_i \bar{R}_i) \times \bar{y} - \delta_i (\bar{R}_{i-1} + \bar{R}_i) \times \bar{F}_i^r - \delta_i \bar{M}_i^r. \end{aligned} \quad (16)$$

Этап 7. Для каждой активной ВКП(i), используя выписанные на этапе 6 моменты сил, выведем формулы вычисления искомых движущих моментов сил $M_i = \bar{q}_i \cdot \bar{M}_i$.

Этап 8. По ОРФ (2), используя формулы (16), выписать уравнение

$$\bar{M}_1 = a_1 \bar{c}_1 \times (m_{o1} \bar{W}_{c1} + P_1 \bar{y}) + \bar{K}_{c1} - \bar{M}_1^r + \sum_{k \in S_1} (\bar{R}_k \times \bar{F}_k + \bar{M}_k) = 0. \quad (17)$$

Из векторного уравнения (17) получить его проекции на одну, две или три оси $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$ в зависимости от подпространства, в котором движется ШМ (вертикальная плоскость, горизонтальная плоскость или пространство $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$).

Этап 9. Из уравнений, полученных на пятом и восьмом этапах, выразить динамические реакции и подставить их в искомые формулы вычисления движущих сил и/или моментов сил, полученных на четвертом и седьмом этапах. Записать условия реализации шага. Подробности продемонстрируем на конкретных примерах.

4. Решение первой задачи динамики колесной машины

Рассмотрим пример решения первой задачи динамики колесной машины с учетом сил трения в ВКП, связывающих кузов (корпус) с колесными парами. В книге [15, с. 205–206] эта задача решена с использованием принципа Даламбера – Лагранжа. В ней рассмотрен прицеп, изображенный на рис. 6 в виде кузова с грузом на двух колесных парах, которые катятся по ОП без скольжения. Корпус движется вдоль оси $O\bar{x}$ с заданным ускорением \ddot{q}_1 . Решим эту задачу по описанному формализму.

Этап 1. Машина состоит из трех тел, т. е. $N = 3$, m_{o1} – корпус, m_{o2} – переднее колесо (колесная пара), m_{o3} – заднее колесо (колесная пара). Колеса взаимодействуют с горизонтальной ОП.

Параметры относительного положения тел: q_1 – величина поступательного перемещения корпуса относительно ОП; $q_2 = q_3$ – углы поворота колес относительно корпуса.

$$a_2 = a_3 = 0, \bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \bar{z}, \bar{K}_{c1} = 0, \delta_i = 1, \bar{c}_i = 0, I_2^c = I_3^c.$$

Этап 2. Мысленно разорванные связи колес с ОП в точках A_j заменены реакциями \bar{F}_j^r , \bar{M}_j^r , где $j = 2, 3$. Разложение \bar{F}_j^r на составляющие вдоль осей $O\bar{x}$, $O\bar{y}$ имеет вид (7)

$$\bar{F}_j^r = -F_{xj} \bar{x} + F_{yj} \bar{y}, \quad (18)$$

где F_{xj} – сила трения, приложенная к колесу m_{oj} , F_{yj} – нормальная реакция. Следовательно, согласно (9) момент силы трения относительно оси ВКП(j), действующий со стороны ОП на колесо m_{oj} , вычисляется по формуле

$$\bar{M}_j^r = (f_t F_{yj} - R F_{xj}) \bar{q}_j, \quad (19)$$

где f_t – коэффициент трения качения колеса по ОП.

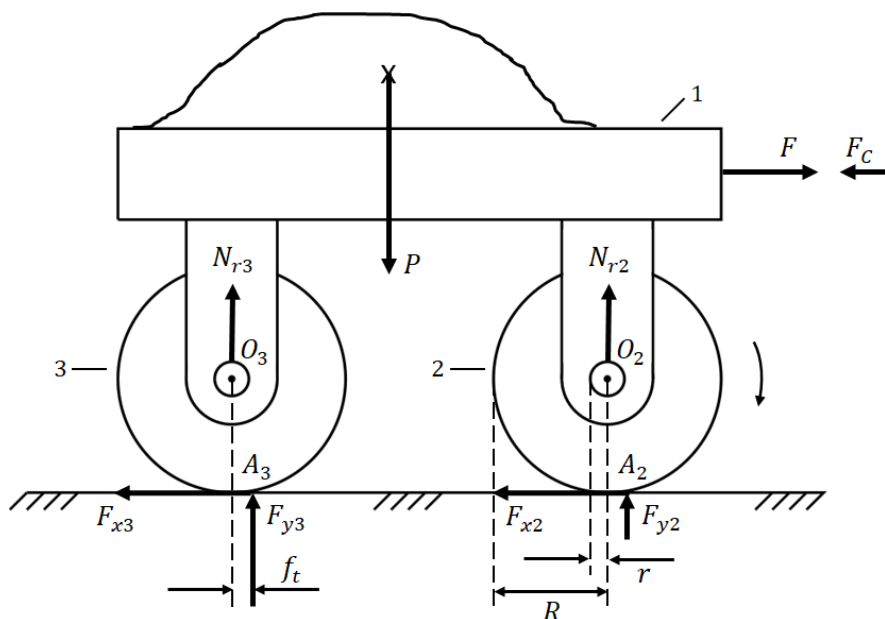


Рис. 6. Колесная машина
Fig. 6. Wheeled car

\bar{F}_1^r – сила реакции внешней среды, введенная в обращение в процессе изоляции машины от действия внешней среды. Прицеп не находится под прикрытием тягача, т. е. сила сопротивления воздуха F_c направлена против тягового усилия F , которое необходимо определить. Таким образом, $\bar{F}_1^r = (F - F_c)\bar{x}$, $\bar{M}_1^r = 0$.

Этап 3. По формуле (10) для $i = 2,3$, учитывая, что $\delta_i = 1$, выпишем

$$\bar{F}_i = m_{oi}\bar{W}_{ci} + P_i\bar{y} - \bar{F}_i^r.$$

Этап 4. ПКП в машине отсутствуют.

Этап 5. По формуле (13) для $i = 1$, учитывая, что $S_1 = \{2,3\}$, $\delta_1 = 1$, получим

$$\bar{F}_1 = \sum_{j=1}^3 (m_{oj}\bar{W}_{cj} - \bar{F}_j^r) + P\bar{y} = 0, \quad (20)$$

где $P = \sum_{j=1}^3 P_j = g \sum_{j=1}^3 m_{oj}$ – вес машины. Проекция уравнения (20) на ось $O\bar{x}$ с учетом (18) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \bar{F}_1 &= \bar{x} \cdot (\sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} + F_{x2}\bar{x} + F_{x3}\bar{x} - F\bar{x} + F_c\bar{x}) = \\ &= \bar{x} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} + F_{x2} + F_{x3} - F + F_c = 0. \end{aligned}$$

Отсюда искомое тяговое усилие

$$F = \bar{x} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} + F_{x2} + F_{x3} + F_c. \quad (21)$$

Проекция уравнения (20) на ось $O\bar{y}$ с учетом равенств (18), $\bar{y} \cdot \bar{W}_{cj} = 0$ имеет вид

$$\bar{y} \cdot \bar{F}_1 = P - \sum_{k=2}^3 F_{yk} = P - F_{y2} - F_{y3} = 0,$$

т. е. $F_{y2} + F_{y3} = P$ – сила нормального давления прицепа на ОП.

Этап 6. По формуле (14) с учетом формул (4), $\alpha_j = -q_j$, (19) для колес m_{oj} ($j = 2,3$) получим

$$\bar{M}_j = -I_j^c \ddot{q}_j \bar{q}_j - \bar{M}_j^r = -I_j^c \ddot{q}_j \bar{q}_j + (RF_{xj} - f_t F_{yj}) \bar{q}_j. \quad (22)$$

Этап 7. Колеса прицепа являются ведомыми, т. е. ВКП пассивные. Тогда по формуле (6) $M_j = \bar{q}_j \cdot \bar{M}_j$ – момент силы трения, действующей в ВКП(j) со стороны m_{o1} на m_{oj} и вычисляемый по формуле (8), т. е. $\bar{M}_j = rfN_{rj}\bar{q}_j$, где r – радиус шипа и подшипника в модели ВКП; f – приведенный коэффициент трения в ВКП(j), N_{rj} – сила давления кузова с грузом на ось колесной пары m_{oj} . Отсюда с учетом (22) получим

$$rfN_{rj} = -I_j^c \ddot{q}_j + RF_{xj} - f_t F_{yj},$$

т. е. $F_{xj}R = I_j^c \ddot{q}_j + rfN_{rj} + f_t F_{yj}$, $j = 2,3$. После суммирования по j и деления на R получим

$$F_{x2} + F_{x3} = 2I_j^c \ddot{q}_j / R + rf(N_{r2} + N_{r3}) / R + f_t(F_{y2} + F_{y3}) / R,$$

т. е.

$$F_{x2} + F_{x3} = 2I_j^c \ddot{q}_j / R + rfP_1 / R + f_t P / R, \quad (23)$$

так как $N_{r2} + N_{r3} = P_1 = m_{o1}g$, $F_{y2} + F_{y3} = P$.

Этап 8. В выписывании уравнения (17) и выполнении последнего этапа нет необходимости, так как, подставив (23) в (21), получим искомую движущую силу, где

$$\bar{W}_{cj} = \ddot{q}_1 \bar{x}, \quad \ddot{q}_j = \ddot{q}_1 / R, \quad \bar{x} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj} \bar{W}_{cj} = \ddot{q}_1 \sum_{j=1}^3 m_{oj}.$$

5. Простейшая КШМ

На рис. 7 изображена КШМ, корпус которой образует с ногой активную ПКП и пассивную ВКП с колесной парой. Эта КШМ предназначена для исследования условий реализации одного шага, а также для экспериментального определения коэффициентов трения скольжения и качения. Здесь для решения первой задачи динамики с выводом условий реализации одного шага будем считать, что колесо катится по ОП без скольжения.

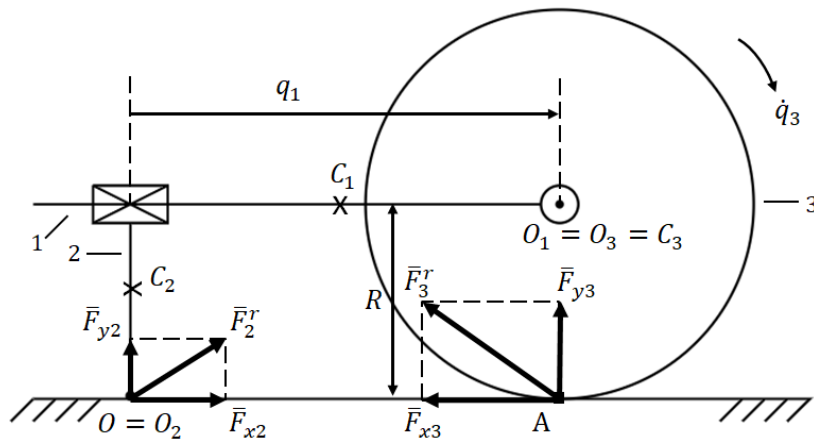


Рис. 7. Простейшая колесно-шагающая машина для исследования одного шага
Fig. 7. The simplest wheel-walking machine for the study of a single step

Этап 1. КШМ состоит из трех тел, т. е. $N = 3$, где m_{o1} – корпус в виде горизонтального цилиндра, m_{o2} – нога в виде вертикального стержня, m_{o3} – колесная пара (далее колесо). Нога и колесо взаимодействуют с ОП.

Параметры относительного положения тел: $q_1 = q_2 = OA$; q_3 – угол поворота колеса относительно корпуса.

$$a_3 = 0, \quad \bar{p}_2 = -\bar{x}, \quad \bar{q}_3 = \bar{z}, \quad \bar{c}_1 = -\bar{x}, \quad \bar{c}_2 = \bar{y}, \quad \bar{c}_3 = 0, \quad \bar{R}_2 = \bar{O}_1 \bar{O}_2 = -q_1 \bar{x} - R \bar{y},$$

$$\bar{R}_3 = \bar{O}_1 \bar{O}_3 = 0, \quad S_1 = \{1, 2\}, \quad \delta_1 = 0, \quad \bar{W}_{c2} = \bar{K}_{c2} = 0, \quad \bar{K}_{c1} = 0.$$

Этап 2. Мысленно разорванные связи ноги и колеса с ОП в точках O_2 и A заменим реакциями \bar{F}_j^r , \bar{M}_j^r , где $j = 2, 3$. Из рис. 7 видно, что разложения \bar{F}_j^r на составляющие вдоль осей $O\bar{x}$, $O\bar{y}$ имеют вид

$$\bar{F}_2^r = F_{x2} \bar{x} + F_{y2} \bar{y}, \quad \bar{F}_3^r = -F_{x3} \bar{x} + F_{y3} \bar{y}. \quad (24)$$

Следовательно, моменты сил \bar{F}_j^r относительно точек O_j , действующие со стороны ОП на тело m_{oj} , вычисляются по формулам

$$\bar{M}_2^r = 0, \quad \bar{M}_3^r = -RF_{x3} \bar{z}. \quad (25)$$

Этап 3. Для ноги и колеса по формуле (10) с учетом равенств $\bar{W}_{c2} = 0$, $\delta_2 = 1$ выпишем

$$\bar{F}_2 = m_{o2} \bar{W}_{c2} + P_2 \bar{y} - \delta_2 \bar{F}_2^r = P_2 \bar{y} - \bar{F}_2^r, \quad \bar{F}_3 = m_{o3} \bar{W}_{c3} + P_3 \bar{y} - \delta_3 \bar{F}_3^r.$$

Этап 4. ПКП(2) активная, т. е. со стороны корпуса (тела m_{o1}) на ногу (на тело m_{o2}) действует движущая сила

$$F_2 = \bar{p}_2 \cdot \bar{F}_2 = -\bar{x} \cdot (P_2 \bar{y} - \bar{F}_2^r) = \bar{x} \cdot \bar{F}_2^r = \bar{x} \cdot (F_{x2} \bar{x} + F_{y2} \bar{y}) = F_{x2}. \quad (26)$$

Этап 5. По формуле (13) выпишем векторное уравнение

$$\bar{F}_1 = \sum_{j=1}^3 m_{oj} \bar{W}_{cj} + P\bar{y} - \sum_{i=2}^3 \delta_i \bar{F}_i^r = 0, \quad (27)$$

где P – вес КШМ. Машина работает в вертикальной плоскости. Поэтому из векторного уравнения (27) с учетом равенств $\bar{y} \cdot \bar{W}_{cj} = 0$, $\bar{x} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj} \bar{W}_{cj} = m_{13} \ddot{q}_1$, где $m_{13} = m_{o1} + m_{o3}$ получим два скалярных уравнения (проекции на оси $O\bar{x}$, $O\bar{y}$)

$$\bar{x} \cdot \bar{F}_1 = m_{13} \ddot{q}_1 - F_{x2} + F_{x3} = 0, \quad \bar{y} \cdot \bar{F}_1 = P - F_{y2} - F_{y3} = 0. \quad (28)$$

Этап 6. Для ноги и колеса по формуле (14) выпишем

$$\bar{M}_2 = a_2 \bar{c}_2 \times (m_{o2} \bar{W}_{c2} + P_2 \bar{y}) + \bar{K}_{c2} - \delta_2 \bar{M}_2^r = a_2 \bar{y} \times P_2 \bar{y} = 0, \quad \bar{M}_3 = \bar{K}_{c3} - \bar{M}_3^r.$$

Этап 7. Колесо пассивное (ведомое), т. е. $M_3 = 0$. Следовательно, с учетом формул (6), (25)

$$M_3 = \bar{q}_3 \cdot \bar{M}_3 = \bar{z} \cdot \bar{K}_{c3} + R F_{x3} \bar{z} \cdot \bar{z} = I_3^c \ddot{\alpha}_3 + R F_{x3} = 0. \quad (29)$$

Этап 8. По формуле (17) с учетом равенств

$$\bar{W}_{c1} = \ddot{q}_1 \bar{x}, \quad \bar{K}_{c1} = 0, \quad \bar{R}_2 = -q_1 \bar{x} - R \bar{y}, \quad \bar{R}_3 = 0, \quad \bar{M}_2 = 0, \quad \bar{c}_1 = -\bar{x}$$

выпишем векторное уравнение

$$\bar{M}_1 = -a_1 P_1 \bar{x} \times \bar{y} + \sum_{k=2}^3 (\bar{R}_k \times \bar{F}_k + \bar{M}_k) = -a_1 P_1 \bar{z} + \bar{M}_3 - (q_1 \bar{x} + R \bar{y}) \times (P_2 \bar{y} - \bar{F}_2^r) = 0.$$

Проекция этого уравнения на ось $O\bar{z}$ с учетом равенств (24), (29) принимает вид

$$-a_1 P_1 - q_1 P_2 + I_3^c \ddot{\alpha}_3 + q_1 F_{y2} - R(F_{x2} - F_{x3}) = 0. \quad (30)$$

Этап 9. Из уравнений (28), (29), (30) получим

$$F_{x2} - F_{x3} = m_{13} \ddot{q}_1, \quad F_{y2} + F_{y3} = P, \quad F_{x3} = -I_3^c \ddot{\alpha}_3 / R, \\ -a_1 P_1 - q_1 P_2 + I_3^c \ddot{\alpha}_3 + q_1 F_{y2} = R(F_{x2} - F_{x3}) = R m_{13} \ddot{q}_1.$$

Отсюда

$$F_{x2} = m_{13} \ddot{q}_1 + F_{x3} = m_{13} \ddot{q}_1 - I_3^c \ddot{\alpha}_3 / R, \\ F_{y2} = (R m_{13} \ddot{q}_1 + a_1 P_1 + q_1 P_2 - I_3^c \ddot{\alpha}_3) / q_1, \quad F_{y3} = P - F_{y2}.$$

Теперь по формуле (26) получим искомую формулу вычисления движущей силы ноги

$$F_2 = F_{x2} = m_{13} \ddot{q}_1 - I_3^c \ddot{\alpha}_3 / R. \quad (31)$$

Условие реализации шага имеет вид $F_{x2} \leq f_0 F_{y2}$. Отсюда

$$m_{13} \ddot{q}_1 - I_3^c \ddot{\alpha}_3 / R \leq f_0 (R m_{13} \ddot{q}_1 + a_1 P_1 + q_1 P_2 - I_3^c \ddot{\alpha}_3) / q_1,$$

где $\ddot{q}_1 = -R \ddot{q}_3$, $\ddot{\alpha}_3 = -\ddot{q}_3$.

6. КШМ с полярной ногой

На рис. 8 изображена КШМ, корпус которой образует с ногой активную ПКП и пассивную ВКП с колесной парой. В отличие от КШМ на рис. 7 здесь корпус и нога меняют свою ориентацию в вертикальной плоскости.

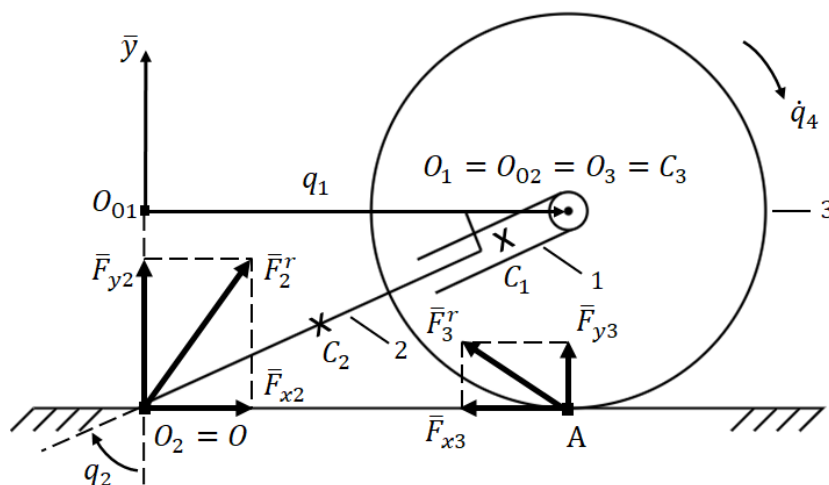


Рис. 8. Колесо-шагающая машина для моделирования одного шага
Fig. 8. A wheel-walking machine for single-step modeling

Этап 1. КШМ состоит из трех тел, т. е. $N = 3$, где m_{o1} – корпус в виде направляющей для ноги, m_{o2} – нога в виде стержня, m_{o3} – колесная пара (далее колесо).

Параметры относительного положения тел: $q_1 = O_{o1}O_1$ – положение полюса O_1 корпуса на оси $O\bar{x}$; q_2 – угол поворота корпуса вокруг оси $O_1\bar{z}$; $q_3 = O_{o2}O_2$ – положение опорной точки ноги относительно полюса корпуса; q_4 – угол поворота колеса относительно корпуса. В исходном положении $q_1 = q_2 = q_4 = 0$, $q_3 = O_1A = R$.

$$a_3 = 0, \bar{p}_2 = -\bar{y}_2, \bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \bar{z}, \bar{c}_1 = -\bar{y}_2, \bar{c}_2 = \bar{y}_2, \bar{c}_3 = 0, \\ \bar{R}_2 = \overline{O_1O_2} = -q_1\bar{x} - R\bar{y}, \bar{R}_3 = \overline{O_1O_3} = 0.$$

Этап 2. Мысленно разорванные связи ноги и колеса с ОП в точках O_2 и A заменим реакциями \bar{F}_j^r, \bar{M}_j^r , где $j = 2, 3$,

$$\bar{F}_2^r = F_{x2}\bar{x} + F_{y2}\bar{y}, \bar{M}_2^r = 0, \bar{F}_3^r = -F_{x3}\bar{x} + F_{y3}\bar{y}, \bar{M}_3^r = -RF_{x3}\bar{z}. \quad (32)$$

Этап 3. Для ноги по формуле (10) выпишем

$$\bar{F}_2 = m_{o2}\bar{W}_{c2} + P_2\bar{y} - \bar{F}_2^r. \quad (33)$$

Для колеса по формуле (10) выпишем $\bar{F}_3 = m_{o3}\bar{W}_{c3} + P_3\bar{y} - \bar{F}_3^r$.

Этап 4. ПКП(2) активная. Формула вычисления движущей силы имеет вид

$$F_2 = \bar{p}_2 \cdot \bar{F}_2 = -\bar{y}_2 \cdot (m_{o2}\bar{W}_{c2} + P_2\bar{y} - \bar{F}_2^r) = -m_{o2}\bar{y}_2 \cdot \bar{W}_{c2} - P_2\bar{y}_2 \cdot \bar{y} + \bar{y}_2 \cdot (F_{x2}\bar{x} + F_{y2}\bar{y}),$$

т. е.

$$F_2 = W_2^p + x_{y2}F_{x2} + y_{y2}F_{y2}, \quad (34)$$

где $W_2^p = -m_{o2}\bar{y}_2 \cdot \bar{W}_{c2} - P_2y_{y2}$, $x_{y2} = \bar{y}_2 \cdot \bar{x}$, $y_{y2} = \bar{y}_2 \cdot \bar{y}$.

Этап 5. По формуле (13) выпишем $\bar{F}_1 = \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} + P\bar{y} - \sum_{i=2}^3 \bar{F}_i^r = 0$, где P – вес машины. Из этого векторного уравнения получим два скалярных уравнения в проекциях на оси $O\bar{x}$, $O\bar{y}$
 $\bar{x} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} - F_{x2} + F_{x3} = 0$, $\bar{y} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} + P - F_{y2} - F_{y3} = 0$. (35)

Этап 6. Для концевых тел по формуле (14) выпишем

$$\bar{M}_2 = a_2\bar{c}_2 \times (m_{o2}\bar{W}_{c2} + P_2\bar{y}) + \bar{K}_{c2}, \bar{M}_3 = \bar{K}_{c3} - \bar{M}_3^r. \quad (36)$$

Этап 7. ВКП пассивная. Тогда по аналогии с этапом 7 предшествующей задачи получим $F_{x3} = -I_3^c\ddot{\alpha}_3/R$.

Этап 8. По формуле (17) с учетом (33), (36) и равенства $\bar{R}_3 = 0$ выпишем

$$\bar{M}_1 = a_1\bar{c}_1 \times (m_{o1}\bar{W}_{c1} + P_1\bar{y}) + \bar{K}_{c1} + \bar{R}_2 \times \bar{F}_2 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 = \bar{W}_c - \bar{R}_2 \times \bar{F}_2^r - \bar{M}_3^r = 0, \quad (37)$$

где $\bar{W}_c = \sum_{j=1}^3 [a_j\bar{c}_j \times (m_{oj}\bar{W}_{cj} + P_j\bar{y}) + \bar{K}_{cj} + \bar{K}_{c3} + \bar{R}_2 \times (m_{o2}\bar{W}_{c2} + P_2\bar{y})]$. Проекция уравнения (37) на ось $O_1\bar{z}$ с учетом равенств (32) принимает вид

$$\bar{z} \cdot \bar{W}_c - \bar{R}_2 \times (F_{x2}\bar{x} + F_{y2}\bar{y}) \cdot \bar{z} + RF_{x3} = \bar{z} \cdot \bar{W}_c + \bar{R}_2 \cdot (F_{x2}\bar{y} - F_{y2}\bar{x}) + RF_{x3} = 0, \quad (38)$$

где $\bar{R}_2 \cdot (F_{x2}\bar{y} - F_{y2}\bar{x}) = -(q_1\bar{x} + R\bar{y}) \cdot (F_{x2}\bar{y} - F_{y2}\bar{x}) = q_1F_{y2} - RF_{x2}$.

Этап 9. Из уравнений (35), (38) и выражения $F_{x3} = -I_3^c\ddot{\alpha}_3/R$ получим

$$F_{x2} - F_{x3} = F_{x2} - I_3^c\ddot{\alpha}_3/R = W_x, \quad F_{y2} + F_{y3} = W_y^p, \\ RF_{x3} + q_1F_{y2} - RF_{x2} = -I_3^c\ddot{\alpha}_3 + q_1F_{y2} - RF_{x2} = W_z,$$

где $W_x = \bar{x} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj}$, $W_y^p = \bar{y} \cdot \sum_{j=1}^3 m_{oj}\bar{W}_{cj} + P$, $W_z = -\bar{z} \cdot \bar{W}_c$. Отсюда

$$F_{x2} = W_x + I_3^c\ddot{\alpha}_3/R, \quad F_{y2} = (W_z + I_3^c\ddot{\alpha}_3 + RF_{x2})/q_1 = [W_z + I_3^c\ddot{\alpha}_3 + R(W_x + I_3^c\ddot{\alpha}_3/R)]/q_1.$$

Следовательно, согласно (34) искомая движущая сила вычисляется по формуле

$$F_2 = W_2^p + x_{y2}F_{x2} + y_{y2}F_{y2} = W_2^p + x_{y2}(W_x + I_3^c\ddot{\alpha}_3/R) + y_{y2}(W_z + RW_x + 2I_3^c\ddot{\alpha}_3)/q_1.$$

Условие реализации шага имеет вид $F_{x2} \leq f_oF_{y2}$, т. е.

$$W_x + I_3^c\ddot{\alpha}_3/R \leq f_o(W_z + RW_x + 2I_3^c\ddot{\alpha}_3)/q_1.$$

7. Решение первой задачи динамики ШМ с управляемой длиной ноги

Рассмотрим двухногую ШМ в двухопорном состоянии (рис. 9), в которой первое тело ноги образует ВКП с корпусом, второе тело с первым образует ПКП. Рассматриваемая модель ШМ предназначена для исследования условий реализации одного шага без учета динамики переносных ног.

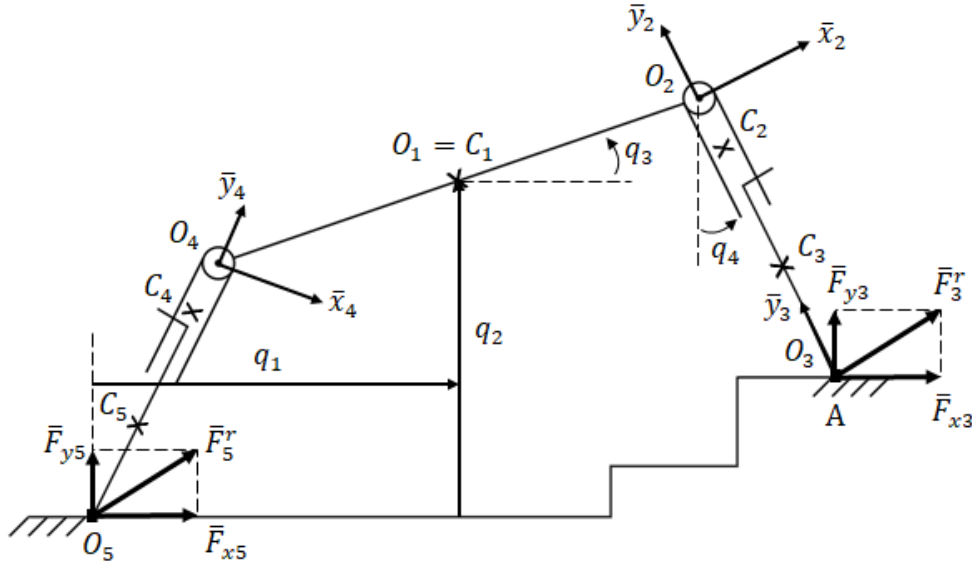


Рис. 9. Шагающая машина для моделирования одного шага и условий его реализации
Fig. 9. A walking machine for modeling a single step and its implementation conditions

Этап 1. ШМ состоит из следующих тел: m_{o1} – корпус; m_{o2}, m_{o3} – тела передней опорной ноги; m_{o4}, m_{o5} – тела задней опорной ноги. В исходном положении тел оси $O_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$ их ССК параллельны ортам $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Через O_i обозначен полюс второго тела m_{oi} рассматриваемой ноги, т. е. $i \in \{3,5\}$. O_{i-1} – полюс первого тела рассматриваемой ноги. $\bar{R}_i = \overline{O_{i-1}O_i} = -L_{qi}\bar{y}_i$, L_{qi} – длина ноги с опорной точкой O_i . Далее используются следующие параметры:

$$N = 5, O_1 = C_1, a_1 = 0, \delta_3 = \delta_5 = 1, \bar{p}_i = -\bar{y}_i, \bar{q}_{i-1} = \bar{z}_{i-1}, \bar{c}_i = \bar{y}_i, \bar{c}_{i-1} = -\bar{y}_i, \bar{c}_1 = 0.$$

Этап 2. Мысленно устраним связь опорных ног с ОП, заменив их реакциями

$$\bar{F}_i^r = F_{xi}\bar{x} + F_{yi}\bar{y}, \bar{M}_i^r = 0. \quad (39)$$

Здесь и далее $i \in N_o = \{3,5\}$ – множество номеров конечных тел опорных ног, F_{xi}, F_{yi} – проекции вектора \bar{F}_i^r на оси $O\bar{x}, O\bar{y}$ соответственно.

Этап 3. Для $i \in N_o$ по формуле (10) выпишем

$$\bar{F}_i = m_{oi}\bar{W}_{ci} + P_i\bar{y} - \bar{F}_i^r. \quad (40)$$

Для первых тел ног по формуле (11) выпишем

$$\bar{F}_{i-1} = \bar{W}_{i-1}^p - \bar{F}_i, \quad (41)$$

где $\bar{W}_{i-1}^p = \sum_{j=i-1}^i m_{oj}\bar{W}_{cj} + P_n\bar{y}$, $P_n = P_{i-1}^p$ – вес ноги.

Этап 4. Используя формулы (39), (40) для вычисления искомой движущей силы ПКП ноги, получим

$$F_i = \bar{p}_i \cdot \bar{F}_i = -\bar{y}_i \cdot (m_{oi}\bar{W}_{ci} + P_i\bar{y}) - \bar{F}_i^r = W_{yi}^p + F_{xi}x_{yi} + F_{yi}y_{yi}, \quad (42)$$

где $x_{yi} = \bar{x} \cdot \bar{y}_i$, $y_{yi} = \bar{y} \cdot \bar{y}_i$ – направляющие косинусы ноги в ССК ОП $O\bar{x}\bar{y}$,

$$W_{yi}^p = -\bar{y}_i \cdot (m_{oi}\bar{W}_{ci} + P_i\bar{y}).$$

Этап 5. Для корпуса по формуле (13) выпишем $\bar{F}_1 = \sum_{j=1}^N m_{oj}\bar{W}_{cj} + P\bar{y} - \sum_{i \in N_o} \bar{F}_i^r = 0$, где P – вес ШМ. Взяв проекции этого уравнения на оси $O\bar{x}, O\bar{y}$, получим

$$F_{x3} + F_{x5} = W_x, \quad F_{y3} + F_{y5} = W_y^p, \quad (43)$$

где $W_x = \bar{x} \cdot \sum_{j=1}^N m_{oj}\bar{W}_{cj}$, $W_y^p = P + \bar{y} \cdot \sum_{j=1}^N m_{oj}\bar{W}_{cj}$.

Этап 6. Для первого тела ноги по формуле (15) с учетом равенства $\bar{R}_i = -L_{qi}\bar{y}_i$ выпишем

$$\bar{M}_{i-1} = \bar{W}_{i-1}^a + L_{qi}\bar{y}_i \times \bar{F}_i^r, \quad (44)$$

где $\bar{W}_{i-1}^a = \sum_{j=i-1}^i [a_j\bar{c}_j \times (m_{oj}\bar{W}_{cj} + P_j\bar{y}) + \bar{K}_{cj}] - L_{qi}\bar{y}_i \times (m_{oi}\bar{W}_{ci} + P_i\bar{y})$.

Этап 7. Из (44) с учетом равенств $\bar{q}_{i-1} = \bar{z}_{i-1} = \bar{z}_i$, $\bar{z}_{i-1} \times \bar{y}_i = -\bar{x}_i$ получим

$$M_{i-1} = \bar{q}_{i-1} \cdot \bar{M}_{i-1} = \bar{z}_{i-1} \cdot (\bar{W}_{i-1}^a + L_{qi}\bar{y}_i \times \bar{F}_i^r) = \bar{z}_{i-1} \cdot \bar{W}_{i-1}^a - L_{qi}\bar{x}_i \cdot \bar{F}_i^r.$$

Отсюда с учетом (39) и обозначения $W_{i-1}^z = \bar{z}_{i-1} \cdot \bar{W}_{i-1}^a$ формулы вычисления движущих моментов сил ВКП ноги принимают вид

$$M_{i-1} = W_{i-1}^z - L_{qi}\bar{x}_i \cdot \bar{F}_i^r = W_{i-1}^z - L_{qi}(F_{xi}x_{xi} + F_{yi}y_{xi}), \quad (45)$$

где $x_{xi} = \bar{x} \cdot \bar{x}_i$, $y_{xi} = \bar{y} \cdot \bar{x}_i$.

Этап 8. По формуле (17) с учетом равенств $a_1 = 0$, $\bar{M}_1^r = 0$ выпишем векторное уравнение

$$\bar{M}_1 = \bar{K}_{c1} + \sum_{k \in S_1} (\bar{R}_k \times \bar{F}_k + \bar{M}_k) = \bar{K}_{c1} + \sum_{i \in N_o} (\bar{R}_{i-1} \times \bar{F}_{i-1} + \bar{M}_{i-1}) = 0$$

и запишем его проекции на ось $O\bar{z}$. Для этого представим вектор \bar{R}_{i-1} в виде $\bar{R}_{i-1} = L_{i-1}\bar{x}_1$, где L_{i-1} – координата на оси $O_1\bar{x}_1$ точки O_{i-1} подвеса ноги к корпусу. Тогда с учетом (41), (44) получим

$$\bar{M}_1 = \bar{K}_{c1} + \sum_{i \in N_o} [L_{i-1}\bar{x}_1 \times (\bar{W}_{i-1}^p - \bar{F}_i^r) + \bar{W}_{i-1}^a + L_{qi}\bar{y}_i \times \bar{F}_i^r] = 0,$$

т. е.

$$\bar{M}_1 = \bar{K} + \sum_{i \in N_o} (L_{qi}\bar{y}_i - L_{i-1}\bar{x}_1) \times \bar{F}_i^r = 0, \quad (46)$$

где $\bar{K} = \bar{K}_{c1} + \sum_{i \in N_o} [L_{i-1}\bar{x}_1 \times \bar{W}_{i-1}^p + \bar{W}_{i-1}^a]$. Проекция уравнения (46) на ось $O\bar{z}$ с учетом (39) имеет вид

$$\bar{z} \cdot \bar{M}_1 = \bar{z} \cdot \bar{K} + \sum_{i \in N_o} (L_{qi}\bar{y}_i - L_{i-1}\bar{x}_1) \times (F_{xi}\bar{x} + F_{yi}\bar{y}) \cdot \bar{z} = 0.$$

Отсюда получим скалярное уравнение

$$\sum_{i \in N_o} (L_{qi}^x F_{xi} + L_{qi}^y F_{yi}) = \dot{K}, \quad (47)$$

где $\dot{K} = -\bar{z} \cdot \bar{K}$,

$$L_{qi}^x = (L_{qi}\bar{y}_i - L_{i-1}\bar{x}_1) \times \bar{x} \cdot \bar{z} = (L_{qi}\bar{y}_i - L_{i-1}\bar{x}_1) \cdot (-\bar{y}) = L_{i-1}y_{x1} - L_{qi}y_{yi},$$

$$L_{qi}^y = (L_{qi}\bar{y}_i - L_{i-1}\bar{x}_1) \times \bar{y} \cdot \bar{z} = (L_{qi}\bar{y}_i - L_{i-1}\bar{x}_1) \cdot \bar{x} = L_{qi}x_{yi} - L_{i-1}x_{x1},$$

$$y_{x1} = \bar{y} \cdot \bar{x}_1, x_{x1} = \bar{x} \cdot \bar{x}_1 - \text{направляющие косинусы корпуса в ССК ОП } O\bar{x}\bar{y}.$$

Этап 9. Для вычисления динамических реакций F_{x3} , F_{y3} , F_{x5} , F_{y5} в точках O_3 и O_5 имеем два уравнения (43) и уравнение (47), из которых получим

$$F_{x3} = W_x - F_{x5}, \quad F_{y3} = W_y^p - F_{y5}, \quad (48)$$

$$L_{q3}^x F_{x3} + L_{q3}^y F_{y3} + L_{q5}^x F_{x5} + L_{q5}^y F_{y5} = L_{q3}^x (W_x - F_{x5}) + L_{q3}^y (W_y^p - F_{y5}) + L_{q5}^x F_{x5} + L_{q5}^y F_{y5} = \\ = L_{q3}^x W_x + L_{q3}^y W_y^p + (L_{q5}^x - L_{q3}^x) F_{x5} + (L_{q5}^y - L_{q3}^y) F_{y5} = \dot{K}.$$

Из последнего уравнения с использованием обозначений

$$L_{xq} = L_{q5}^x - L_{q3}^x, \quad L_{yq} = L_{q5}^y - L_{q3}^y, \quad W_a = \dot{K} - L_{q3}^x W_x - L_{q3}^y W_y^p$$

получим одно линейное уравнение с двумя неизвестными реакциями

$$L_{xq} F_{x5} + L_{yq} F_{y5} = W_a. \quad (49)$$

Недостающее уравнение можно получить несколькими способами. Здесь рассмотрим два из них. Первый связан с использованием модели Кулона (7).

С учетом модели Кулона $F_{x5} = fF_{y5}$, $F_{x5} \leq f_o F_{y5}$ уравнение (49) примет вид

$$(fL_{xq} + L_{yq})F_{y5} = W_a. \quad (50)$$

Отсюда для вычисления динамической реакции F_{y5} получим искомую формулу

$$F_{y5} = W_a / (fL_{xq} + L_{yq}). \quad (51)$$

Остальные динамические реакции вычисляются по формулам (48). По формулам (42), (45) вычисляются искомые движущие силы и моменты сил в КП ног, т. е. последовательность расчетных формул имеет вид

$$F_{y5} = W_a / (fL_{xq} + L_{yq}), \quad F_{y3} = W_y^p - F_{y5}, \quad F_{x5} = fF_{y5}, \quad F_{x3} = W_x - fF_{y5},$$

$$F_3 = W_{y3}^p + x_{y3}F_{x3} + y_{y3}F_{y3}, \quad F_5 = W_{y5}^p + x_{y5}F_{x5} + y_{y5}F_{y5},$$

$$M_2 = W_2^z - L_{q3}(x_{x3}F_{x3} + y_{x3}F_{y3}), \quad M_4 = W_4^z - L_{q5}(x_{x5}F_{x5} + y_{x5}F_{y5}).$$

Для реализации шага без проскальзывания ноги относительно ОП в точке O_5 необходимо выполнить условие

$$F_{x5} = W_x - F_{x3} = W_x - fF_{y3} \leq f_o F_{y5} = f_o (W_y^p - F_{y3}),$$

т. е. $W_x - f_o W_y^p \leq (f - f_o) F_{y3} = (f - f_o)(W_y^p - F_{y5}) = f W_y^p - f_o W_y^p - (f - f_o) F_{y5}$. Отсюда первое искомое условие реализации шага имеет вид

$$W_x - f W_y^p \leq (f_o - f) F_{y5}. \quad (52)$$

Для реализации шага без проскальзывания ноги относительно ОП в точке O_3 необходимо выполнить условие $F_{x3} = W_x - F_{x5} = W_x - f F_{y5} \leq f_o F_{y3} = f_o (W_y^p - F_{y5})$.

Отсюда второе искомое условие реализации шага имеет вид

$$W_x - f_o W_y^p \leq (f - f_o) F_{y5}. \quad (53)$$

С целью верификации неравенств (52), (53) просуммируем их. Тогда получим

$$2W_x - (f + f_o) W_y^p \leq 0.$$

Отсюда имеем

$$W_x \leq (f + f_o) W_y^p / 2, \quad (54)$$

где по обозначению, принятому на этапе 5, $W_x = \bar{x} \cdot \sum_{j=1}^N m_{oj} \bar{W}_{cj}$ – проекция на ось $O\bar{x}$ абсолютного ускорения ЦМ ШМ, $W_y^p = P + \bar{y} \cdot \sum_{j=1}^N m_{oj} \bar{W}_{cj}$ – сумма веса ШМ и проекции на ось $O\bar{y}$ абсолютного ускорения ЦМ ШМ. Можно считать, что $(f + f_o)/2$ – усредненный коэффициент трения скольжения. Таким образом, неравенство (54) соответствует модели Кулона для движения ЦМ ШМ под действием сил трения, действующих на ноги.

Для применения второго способа необходимо, чтобы приводы ВКП имели обратимые редукторы. Тогда, отключив один из двух приводов, например, привод ВКП(4), получим согласно (45) $M_4 = W_4^z - L_{q5}(x_{x5} F_{x5} + y_{x5} F_{y5}) = 0$. Теперь вместе с уравнением (49) для вычисления двух динамических реакций имеем два уравнения, что и требуется для снятия неопределенности. Фактически так снимается неопределенность в распределении движущих моментов сил между приводами ВКП двух ног. Конечно, если мощности привода одной ВКП недостаточно для реализации рассматриваемого шага, то второй способ снятия неопределенности невозможен.

Заключение

В статье описан формализм решения первой задачи динамики ШМ, т. е. вычисления движущих сил и моментов сил в КП ног, обеспечивающих заданное движение корпуса и ему соответствующее движение опорных и переносных ног, где опорные ноги не проскальзывают относительно ОП. Расчет вновь создаваемых конструкций различных управляемых машин начинается с решения первой задачи динамики. Затем решают вторую задачу динамики и различные задачи управления ходьбой. Поэтому важно безошибочно и максимально точно решать именно первую задачу динамики, например, не ограничиваться моделями ШМ с ногами, массы которых сосредоточены в точках их подвеса к корпусу. Важно также верифицировать все расчетные формулы. Аналитическую верификацию мы продемонстрировали на последнем примере. Многочисленные примеры численной верификации формул приведены в учебном пособии [13].

Список литературы

1. Шагающие машины / Д.Е. Охоцимский, А.К. Платонов, А.А. Кирильченко, В.В. Лапшин. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1989. 36 с. (Препринт № 87)
2. Павловский В.Е. О разработках шагающих машин. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, 2013. 32 с. (Препринт № 101) URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-101>.
3. Фокин В.Г., Шаныгин С.В. Обзор и перспективы развития мобильных шагающих робототехнических систем // Молодой ученый. 2015. № 18 (98). С. 207–215.
4. Метод проектирования пространственных древовидных исполнительных механизмов шагающих роботов / А.К. Ковальчук, Д.Б. Кулаков, С.Е. Семенов и др. // Инженерный вестник. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 6–10. URL: <http://ainjournal.ru/doc/736600.html>.
5. Ковальчук А.К. Модифицированная система координат Денавита – Хартенберга для исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 11. С. 12–30. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/826673.html>. DOI: 10.7463/1115.0826673
6. Разработка военных мобильных роботов в США / С.А. Безбогов, А.А. Кирильченко,

В.Е. Пряничников и др. Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1994. 36 с. (Препринт № 11)

7. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 312 с.

8. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы: пер. с англ. М.: Мир, 1976. 541 с.

9. Vukobratović M., Stepanenko J. On the Stability of Anthropomorphic Systems // *Bellman Prize in Mathematical Biosciences*. 1972. Vol. 15, iss. 1-2. P. 1–37. DOI: 10.1016/0025-5564(72)90061-2

10. Evaluation of a Legged Mechanism Model and Control System of its Movement / E.A. Devyanin, A.V. Lenskii et al. // *Proc. 5th Symp. on Automatic Control in Space*. Genova, 1973.

11. Zielinska T., Heng K.H. Development of walking machine: Mechanical design and control problems // *Mechatronics: The Science of Intelligent Machines*. 2002. Vol. 12, no. 5. P. 737–754.

12. Longo D., Muscato G., Tarantello G. Performance Evaluation of Electrostatic Adhesion for Climbing Rolots // *CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Rolots and the Support Technologies for Mobile Machines*, Nagoya, Japan, 31 August – 03 September 2010. P. 1195–1201.

13. Телегин А.И. Основы теоретической механики систем тел. С приложениями в робототехнике: учеб. пособие для вузов. СПб.: Лань, 2023. 252 с.

14. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учеб. для машиностроит. спец. вузов. М.: Высшая школа, 1983. 575 с.

15. Озол О.Г. Теория механизмов и машин. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 432 с.

References

1. Okhotsimskiy D.E., Platonov A.K., Kirilchenko A.A., Lapshin V.V. *Shagayushchie mashiny* [Walking machines]. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences; 1989. 36 p. (Preprint No. 87) (In Russ.)

2. Pavlovskiy V.E. *O razrabotkakh shagayushchikh mashin* [On the development of walking machines]. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences; 2013. 32 p. (Preprint No. 101) (In Russ.). URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-101>.

3. Fokin V.G., Shanygin S.V. [Review and prospects of development of mobile walking robotic systems]. *Young Scientist*. 2015;18(98):207–215. (In Russ.)

4. Kovalchuk A.K., Kulakov D.B., Semenov S.E., Yarots V.V., Vereykin A.A., Kulakov B.B., Karginov L.A. [Design method for spatial tree-like actuators of walking robots]. *Engineering Bulletin. Electron. journal*. 2014;11:6–10. (In Russ.) Available at: <http://ainjournal.ru/doc/736600.html>.

5. Kovalchuk A.K. Modified Denavit-Hartenberg coordinate system for the executive mechanisms of the robots with a tree-like kinematic structure. *Science and Education of the Bauman MSTU*. 2015;(11):12–30. (In Russ.) DOI: 10.7463/1115.0826673

6. Bezbogov S.A., Kirilchenko A.A., Pryanichnikov V.E., Stepanov Yu.I. Trubitsyn O.N. *Razrabotka voennykh mobil'nykh robotov v SSHA* [Development of Military Mobile Robots in the USA]. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences; 1994. 36 p. (Preprint No. 11) (In Russ.)

7. Okhotsimskiy D.E., Golubev Yu.F. *Mekhanika i upravlenie dvizheniem avtomaticheskogo shagayushchego apparata* [Mechanics and motion control of automatic walking apparatus]. Moscow: Nauka. Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature; 1984. 312 p. (In Russ.)

8. Vukobratovic M. *Shagayushchie roboty i antropomorfnye mekhanizmy* [Walking robots and anthropomorphic mechanisms]. Transl. from Engl. Moscow: Mir; 1976. 541 p. (In Russ.)

9. Vukobratović M., Stepanenko J. On the Stability of Anthropomorphic Systems. *Bellman Prize in Mathematical Biosciences*. 1972;15(1-2):1–37. DOI: 10.1016/0025-5564(72)90061-2

10. Devyanin E.A., Lenskii A.V. et al. Evaluation of a Legged Mechanism Model and Control System of its Movement. In: *Proc. 5th Symp. on Automatic Control in Space*. Genova; 1973.

11. Zielinska T., Heng K.H. Development of walking machine: Mechanical design and control problems. *Mechatronics: The Science of Intelligent Machines*. 2002;12(5):737–754.

12. Longo D., Muscato G., Tarantello G. Performance Evaluation of Electrostatic Adhesion for Climbing Rolots. In: *CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Rolots*

and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August – 03 September 2010. P. 1195–1201.

13. Telegin A.I. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki sistem tel. S prilozheniyami v robototekhnike: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Fundamentals of theoretical mechanics of body systems. With applications in robotics: textbook for universities]. St. Petersburg: Lan; 2023. 252 p. (In Russ.)

14. Dobronravov V.V., Nikitin N.N. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki: ucheb. dlya mashinostroit. spets. vuzov* [Course of theoretical mechanics: Textbook for machine-building specialties of universities]. Moscow: Vysshaya shkola; 1983. 575 p. (In Russ.)

15. Ozol O.G. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow: Nauka. Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature; 1984. 432 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Телегин Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры автоматизи, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия; teleginai@susu.ru.

Гусев Евгений Васильевич, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры цифровой экономики и информационных технологий, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; gusevev@susu.ru.

Волович Георгий Иосифович, д-р техн. наук, проф., директор, ООО «Челэнергоприбор», Челябинск, Россия; g_volovich@mail.ru.

Некрасов Сергей Геннадьевич, д-р техн. наук, проф. кафедры информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; nekrasovsg@susu.ru.

Information about the authors

Aleksandr I. Telegin, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof., Prof. of the Department of Automation, South Ural State University, Miass, Russia; teleginai@susu.ru.

Evgeny V. Gusev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Digital Economics and Information Technologies, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; gusevev@susu.ru.

Georgiy I. Volovich, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Director, LLC Chelenergopribor, Chelyabinsk, Russia; g_volovich@mail.ru.

Sergey G. Nekrasov, Dr. Sci. (Eng.), Prof. of the Department of Information and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; nekrasovsg@susu.ru.

Статья поступила в редакцию 16.02.2024

The article was submitted 16.02.2024