

# Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы Instrument engineering, metrology and information and measuring devices and systems

Научная статья  
УДК 51-74, 789.012  
DOI: 10.14529/ctcr240205

## ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ЧАСТОТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА ПО СПЕКТРУ С НИЗКИМ РАЗРЕШЕНИЕМ

*Л.С. Казаринов*, [kazarinovls@susu.ru](mailto:kazarinovls@susu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-6308-4596>

*З.А. Колосова*, [kolosovaza@susu.ru](mailto:kolosovaza@susu.ru)

*В.В. Абдуллин*, [abdullinvv@susu.ru](mailto:abdullinvv@susu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0992-5539>

*Д.А. Шнайдер*, [shnayderda@susu.ru](mailto:shnayderda@susu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7275-6569>

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия*

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются методы получения точной частоты спектральной компоненты из спектра сигнала с недостаточным разрешением с целью выяснения точности и применимости описываемых методов. Приведены основные принципы и последовательность действий для реализации параболической интерполяции и частотной демодуляции. Указанные методы применены к синтезированному сигналу, содержащему частотную компоненту, которую не удастся непосредственным образом определить по спектру с низким разрешением. Рассмотренные методы различаются по сложности вычислений и точности полученных результатов. Сделан вывод о применимости рассмотренных методов для различных задач вибродиагностики. **Цель исследования.** В данной статье рассматриваются методы получения точной частоты спектральной компоненты из спектра сигнала с недостаточным разрешением. Целью исследования является выяснение точности и применимости описываемых методов. **Материалы и методы.** Для достижения поставленной цели были использованы следующие методы: параболическая интерполяция и частотная демодуляция. В статье приведены основные принципы и последовательность действий для реализации этих методов. Для проверки эффективности использованных методов был синтезирован сигнал, содержащий частотную компоненту, которую не удастся непосредственным образом определить по спектру с низким разрешением. **Результаты.** Методы параболической интерполяции и частотной демодуляции были применены к синтезированному сигналу. Результаты показали, что указанные методы позволяют получать точные значения частоты спектральной компоненты даже при низком разрешении спектра. Рассмотренные методы различаются по сложности вычислений и точности полученных результатов. **Заключение.** На основе проведенного исследования можно сделать вывод о том, что методы параболической интерполяции и частотной демодуляции являются эффективными для получения точной частоты спектральной компоненты из спектра сигнала с недостаточным разрешением. Результаты исследования могут быть использованы в различных задачах вибродиагностики. В заключении сделано замечание о том, что выбор конкретного метода зависит от сложности вычислений и требуемой точности результатов.

**Ключевые слова:** спектр, преобразование Фурье, преобразование Гильберта, интерполяция, уточнение частоты

**Для цитирования:** Подход к оценке частоты спектральной составляющей цифрового сигнала по спектру с низким разрешением / Л.С. Казаринов, З.А. Колосова, В.В. Абдуллин, Д.А. Шнайдер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24, № 2. С. 56–64. DOI: 10.14529/ctcr240205

## AN APPROACH TO ESTIMATING THE FREQUENCY OF SPECTRAL COMPONENT BY LOW-RESOLUTION SPECTRUM OF DIGITAL SIGNAL

L.S. Kazarinov, kazarinovls@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6308-4596>

Z.A. Kolosova, kolosovaza@susu.ru

V.V. Abdullin, abdullinvv@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0992-5539>

D.A. Shnayder, shnayderda@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7275-6569>

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

**Abstract.** This paper examines certain methods of obtaining the exact frequency of the spectral component from the signal spectrum with insufficient resolution in order to clarify the accuracy of these methods and their applicability. The basic principles and the sequence of actions are given for the implementation of parabolic interpolation and frequency demodulation. These methods are applied to a synthesized signal containing a frequency component that cannot be determined directly from a low-resolution spectrum. The methods considered differ in the complexity of calculations and the accuracy of the results obtained. An introduction is made about the applicability of the considered methods for various tasks of vibration diagnostics. **Purpose of the study.** The article examines methods for obtaining an accurate frequency of a spectral component from a signal spectrum with insufficient resolution. The aim of the study is to determine the accuracy and applicability of the described methods. **Materials and methods.** The following methods were used to achieve the stated goal: parabolic interpolation and frequency demodulation. The article presents the basic principles and sequence of actions for implementing these methods. To verify the effectiveness of the used methods, a signal was synthesized containing a frequency component that cannot be directly determined from a low-resolution spectrum. **Results.** The methods of parabolic interpolation and frequency demodulation were applied to the synthesized signal. The results showed that the specified methods allow obtaining accurate values of the frequency of the spectral component even at low spectrum resolution. The considered methods differ in computational complexity and the accuracy of the obtained results. **Conclusion.** Based on the conducted research, it can be concluded that the methods of parabolic interpolation and frequency demodulation are effective for obtaining an accurate frequency of a spectral component from a signal spectrum with insufficient resolution. The results of the study can be used in various vibration diagnostics tasks. The conclusion notes that the choice of a specific method depends on the complexity of the calculations and the required accuracy of the results.

**Keywords:** spectrum, Fourier transform, Hilbert transform, interpolation, frequency estimation

**For citation:** Kazarinov L.S., Kolosova Z.A., Abdullin V.V., Shnayder D.A. An approach to estimating the frequency of spectral component by low-resolution spectrum of digital signal. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2024;24(2):56–64. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr240205

### Введение

Спектральное представление  $X(f)$  сигнала  $x(t)$ , получаемое с использованием преобразования Фурье, получило широкое распространение в сфере вибрационной диагностики оборудования и является базовым инструментом для дальнейшей обработки и анализа сигналов вибрации, полученных с первичных измерительных преобразователей [1]. В идеальном случае  $i$ -я периодическая компонента сигнала  $x(t)$  отображается на спектре соответствующей линией (точкой на графике), абсцисса которой равна частоте компоненты  $f_i$ , а ордината – амплитуде  $X_{f_i}$  [2]. В реальных условиях спектр сигнала имеет конечное разрешение по частоте  $df$ , из-за которого энергия периодической компоненты будет распределена между несколькими соседними линиями (точками) в окрестности  $x_i$  (рис. 1). Данное явление известно как растекание спектра [3]. В результате частота  $f_k$  наибольшей по амплитуде линии в окрестности  $x_i$  не равна частоте  $f_i$  спектральной компоненты, а амплитуда  $X_{f_k}$  данной точки не будет равна амплитуде  $X_{f_i}$  данной спектральной компоненты. Ошибка  $|f_i - f_k|$  достигает своего максимального значения, равного  $df/2$ , при равных амплитудах  $X_{f_k}$  и  $X_{f_{k+1}}$ .

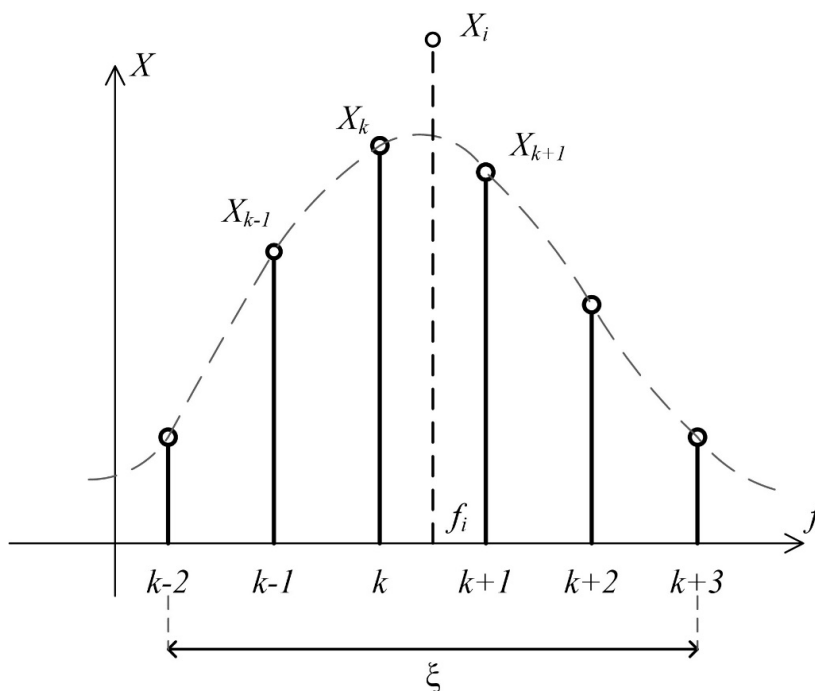


Рис. 1. Спектральная компонента на графике спектра сигнала  
 Fig. 1. Spectral component on the signal spectrum graph

При этом существует ряд задач вибродиагностики, для решения которых необходимо знать частоту спектральной компоненты сигнала с высокой точностью: для детектирования дефектов ротора требуется точное значение частоты вращения, а для детектирования дефектов подшипника качения нужны точные значения их характерных частот (частоты перекачивания тел качения по внутреннему и внешнему кольцам, частота сепаратора и т. д.), которые, в свою очередь, также зависят от частоты вращения [4–6].

### 1. Разрешение спектра по частоте

Спектр сигнала позволяет представить сигнал в виде совокупности его частотных составляющих с информацией об их амплитуде и фазе. Важный параметр спектра – разрешение по частоте  $df$ , фактически являющееся расстоянием в герцах между двумя соседними линиями спектра.

Алгоритмы преобразования Фурье относятся к анализу в диапазоне частот от 0 до частоты Найквиста. Разрешение в таком случае определяется количеством спектральных линий в этом диапазоне [7]. Таким образом,  $df$  определяет, насколько точно можно оценить частоту составляющих сигнала.

Также разрешение спектра связано с длительностью интервала наблюдения [8, 9]:

$$df = 1/\tau = 1/(L/F_S) = F_S/L, \quad (1)$$

где  $\tau$  – длительность сигнала в секундах;  $F_S$  – частота дискретизации;  $L$  – количество отсчетов в сигнале (согласно теореме Котельникова – Найквиста – Шеннона [10]). Таким образом, естественный способ увеличить разрешение спектра – увеличить длительность анализируемого сигнала.

Рассмотрим это явление на примере простого гармонического сигнала [11], состоящего из двух синусоидальных компонент: 10 и 15 Гц с амплитудами 6 и 3 соответственно. Пусть частота дискретизации  $F_{S1}$  будет равна 16 000 Гц, а количество отсчетов в сигнале  $L_1 = 32\,768$ . Также рассмотрим спектры этого сигнала, уменьшив параметры  $F_{S1}$  и  $L_1$  вдвое:  $F_{S2} = F_{S1}/2$ ,  $L_2 = L_1/2$ . Построим 4 графика спектра этого сигнала (рис. 2), изменяя параметры количества отсчетов и частоты дискретизации.

Как следует из формулы (1), наилучшее разрешение было получено на том спектре, где  $F_S$  наименьшее, а  $L$  – наибольшее.

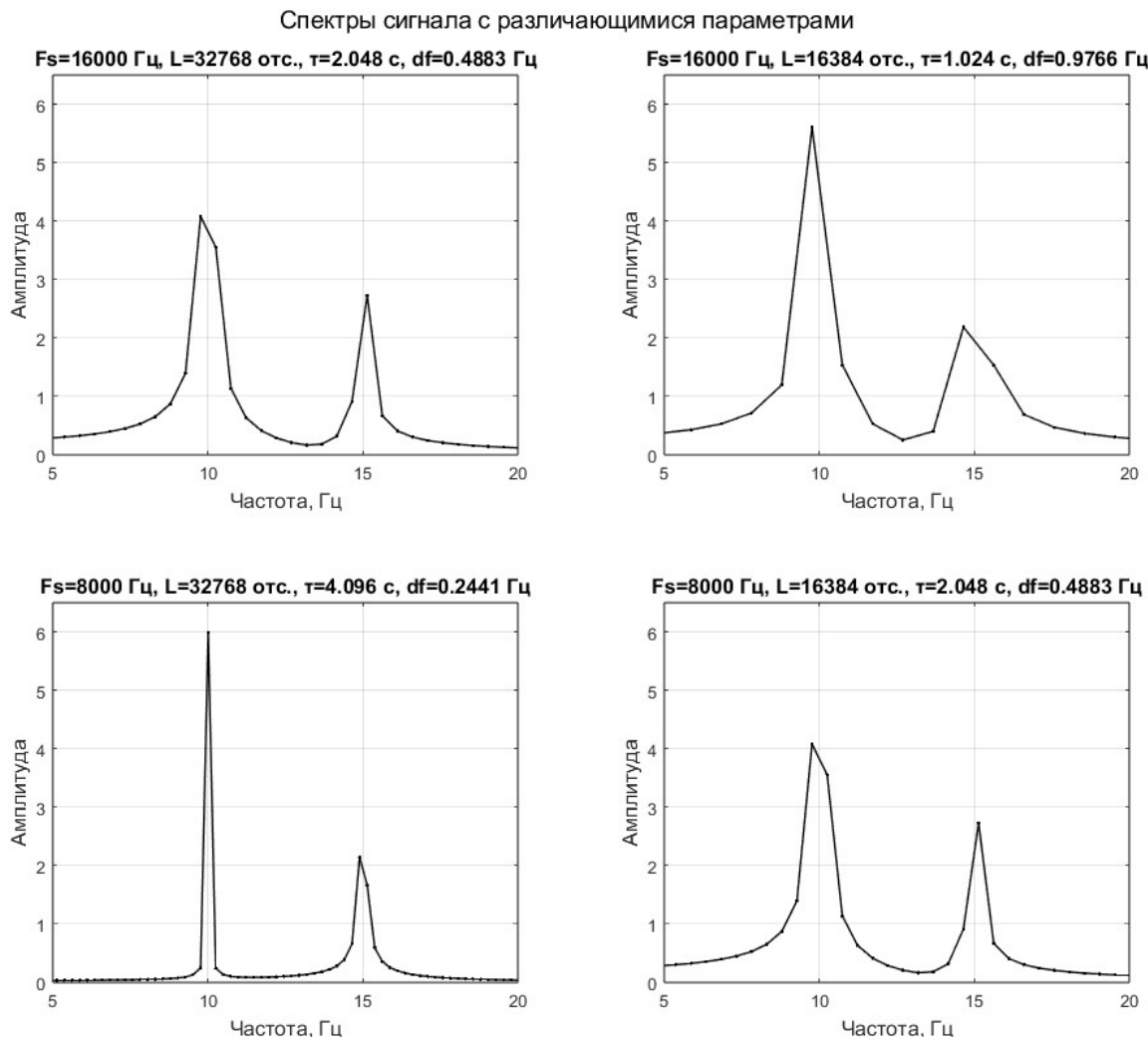


Рис. 2. Спектры гармонического сигнала с различающимися параметрами  
Fig. 2. Harmonic signal spectra with different parameters

Параметры, влияющие на разрешение спектра, тесно связаны с возможностями измерительного прибора, записывающего сигнал [12]. Увеличение длительности записи сигнала приводит к увеличению расхода энергии, что может быть особенно критично для приборов с автономным батарейным питанием, и к росту объема передаваемых и хранимых данных [13]. Уменьшение частоты дискретизации, напротив, снижает объем данных при увеличении разрешения получаемого спектра, однако при этом пропорционально уменьшается максимальная детектируемая датчиком частота. На практике параметры  $F_s$  и  $L$  выбираются исходя из требуемого режима работы и характеристик измерительного прибора, в связи с чем уточненная оценка частоты спектральных компонент спектра с недостаточным разрешением является актуальной с практической точки зрения.

## 2. Методы уточнения частоты пика по спектру

Будем рассматривать нижеописанные методы на примере синтезированного гармонического сигнала:

$$s(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi), \quad (2)$$

где  $A$  – амплитуда сигнала;  $f$  – частота;  $\varphi$  – фаза. Выберем следующие параметры:  $A = 0,5$ ;  $f = 16,27$  Гц;  $\varphi = 2/\pi$ . Длительность сигнала пусть равняется 0,5 секунды. Частота дискретизации при построении спектра равна 16 000 Гц, количество отсчетов спектра – 32 000. Таким образом, шаг по частоте составляет 0,5 Гц. Временное представление сигнала и его спектр представлены на рис. 3.

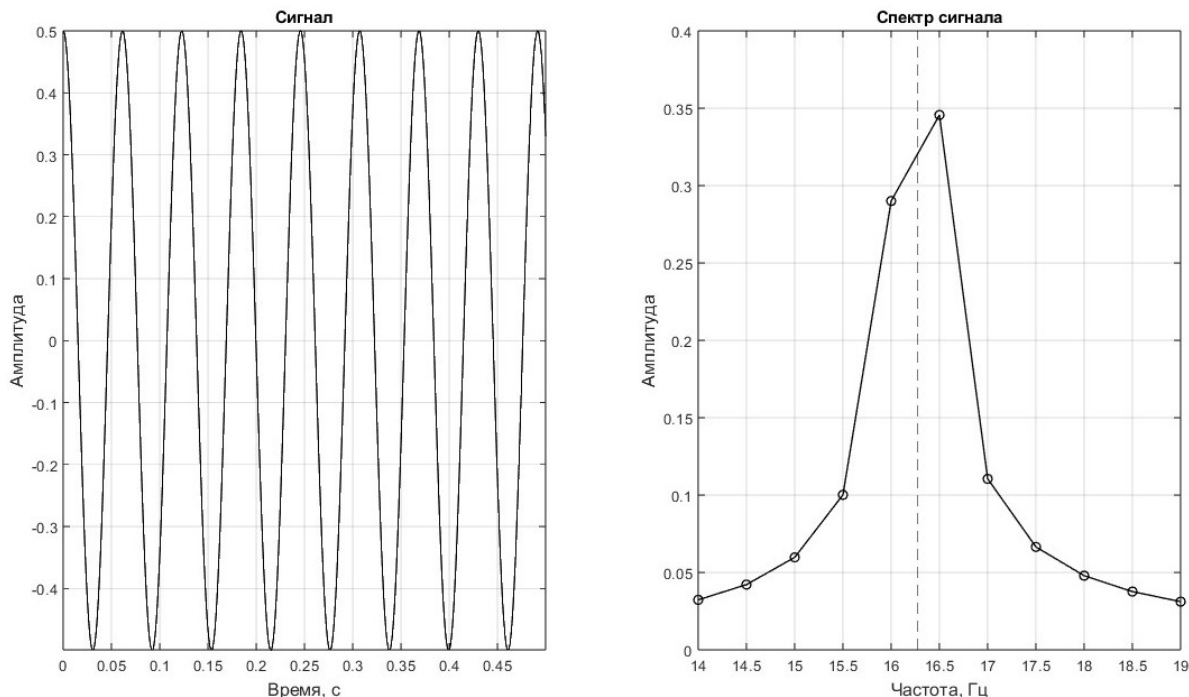


Рис. 3. Исследуемый гармонический сигнал с компонентой 16,27 Гц  
 Fig. 3. The tested harmonic signal with a component of 16.27 Hz

### 2.1. Параболическая интерполяция

В случае, когда повышение разрешения всего спектра невозможно, можно прибегнуть к повышению разрешения его участка, взяв максимум и две соседние точки спектра (см. рис. 3) [14]. Тогда искомая частота спектра может быть найдена, даже если она расположена между двумя дискретными линиями спектра, путем вычисления максимальной абсциссы интерполяционной кривой пика дискретного спектра.

Точки спектра с координатами (16; 0,29), (16,5; 0,345) и (17; 0,11) примем за решения уравнения параболы. Подставив в уравнение координаты точек и решив систему уравнений, получаем оценочное значение  $f_i$  (абсциссу вершины параболы) (рис. 4) [15].

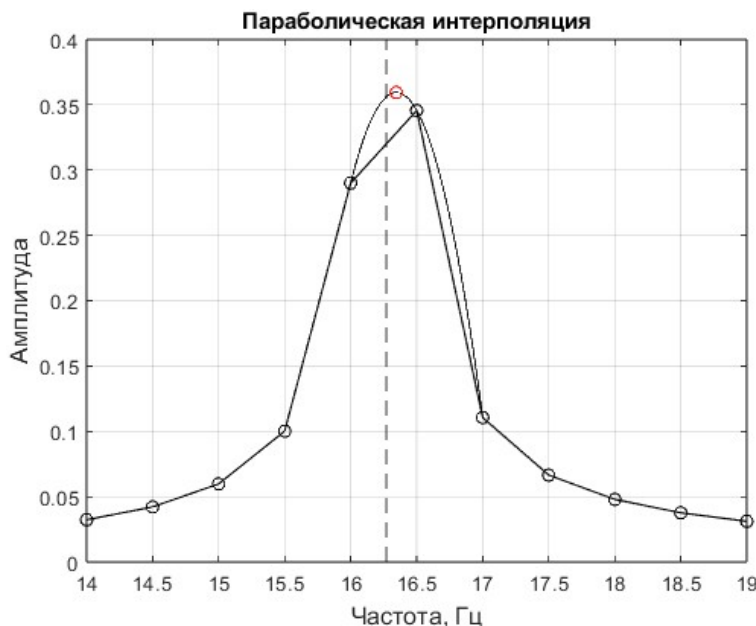


Рис. 4. Спектр исследуемого сигнала с выделенными узлами интерполяции  
 Fig. 4. The spectrum of the tested signal with highlighted interpolation nodes

Значение частоты на вершине параболы равно 16,35 Гц. Отклонение от реального значения 16,27 Гц составляет 0,4645 %. Несмотря на достаточно высокое отклонение, следует отметить простоту и скорость выполнения данного метода, что является его главным достоинством.

## 2.2. Частотная демодуляция

Еще один метод уточнения частоты связан с частотной демодуляцией сигнала.

Предварительно из полного сигнала  $x(t)$  нужно выделить модулированный сигнал  $a(t)$  путем фильтрации в окрестностях интересующей частоты. Затем, согласно [16], определяем трансформанту Гильберта  $\tilde{a}(t)$  для  $a(t)$ :

$$\tilde{a}(t) = \mathcal{H}\{a(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau. \quad (3)$$

Полученная трансформанта Гильберта связана с исходным модулированным сигналом  $a(t)$  и аналитическим сигналом  $\hat{a}(t)$  следующей формулой:

$$\hat{a}(t) = a(t) + j\tilde{a}(t). \quad (4)$$

Представим аналитический сигнал в виде

$$\hat{a}(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}. \quad (5)$$

Из (5) выделим составляющую фазовой модуляции  $e^{j\varphi(t)}$  и устраним составляющую с несущей частотой  $f_0$  путем умножения на  $e^{-j2\pi f_0 t}$ . Результирующая функция  $\varphi(t) e^{-j2\pi f_0 t}$  является модулирующим по фазе сигналом, который, если выражен по модулю  $2\pi$ , нуждается в дополнительной обработке для определения непрерывного сигнала  $\varphi_m(t)$ .

После получения непрерывного сигнала  $\varphi_m(t)$  из него может быть получен модулирующий по частоте сигнал  $f_m(t)$  по формуле

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_m(t)}{dt}. \quad (6)$$

После выполнения описанного алгоритма получим вектор мгновенных частот  $f_m(t)$ , из которого можно получить частоту компоненты, применяя методы статистической обработки, к которым относятся среднее арифметическое, медиана, мода [17]. Применим вышеописанный алгоритм к сигналу, описанному в пункте 2.1. Получим вектор мгновенных частот, изображенный на рис. 5.

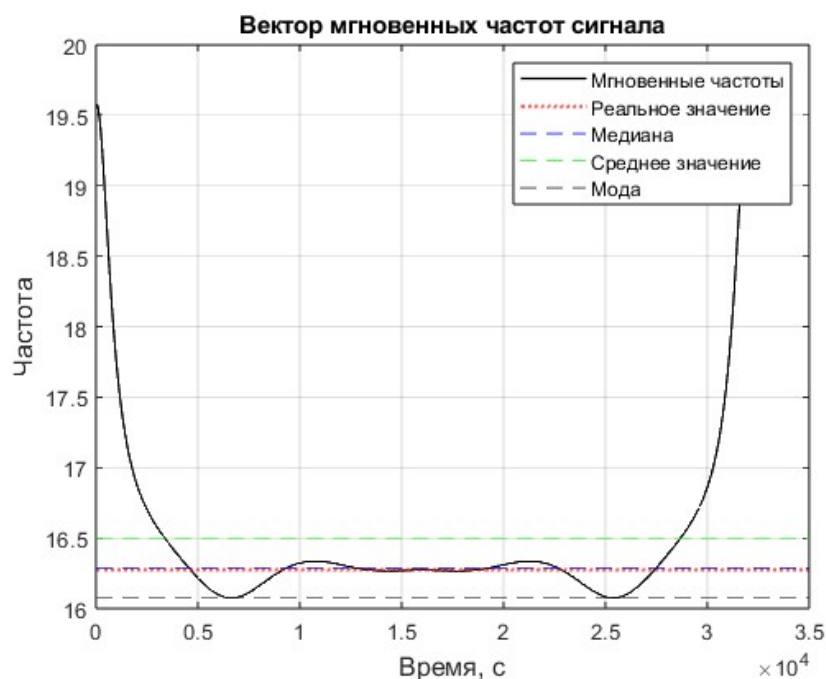


Рис. 5. Вектор мгновенных частот сигнала  
Fig. 5. The vector of instantaneous signal frequencies

Красной пунктирной линией на графике отображено реальное значение частоты. Применим разные методы статистической обработки и занесем результаты в таблицу.

Полученные значения частоты  
Obtained frequency values

Метод статистической обработки	Полученное значение, Гц	Отклонение, %
Среднее арифметическое	16,4999	1,4131
Мода	16,0743	1,2028
Медиана	16,2857	0,0965

Получение значения частоты из вектора мгновенных частот с помощью медианы показало наименьшее отклонение.

Недостатком вышеописанного метода является сложность выбора диапазона фильтрации для выделения модулированного сигнала: результат не будет соответствовать желаемой точности как в случае попадания в диапазон более одной компоненты сигнала, т. е. при избыточной ширине диапазона, так и в случае неполного попадания компоненты, т. е. при недостаточной ширине диапазона. Проблема выбора диапазона фильтрации для данного метода заслуживает отдельного рассмотрения.

При этом существенным преимуществом данного метода является высокая точность получаемого результата в сравнении с методами интерполяции. Его независимость от частоты дискретизации позволяет применять метод даже для спектров с существенно низким разрешением ( $df$  больше 0,5 Гц).

### Заключение

Были рассмотрены и проверены на практике две группы методов уточнения частоты по спектру: основанных на интерполяции и на частотной демодуляции. По результатам проверки на смоделированном гармоническом сигнале можно сделать вывод о том, что метод параболической интерполяции легок в реализации, состоит из меньшего количества шагов и не требует сложных расчетов. Полученный данным методом результат оказался менее точным, его отклонение от реального значения частоты составило 0,4645 %. Более высокую точность показывает метод частотной демодуляции: при расчете частоты через медиану вектора мгновенных частот отклонение составило всего 0,0965 %. Однако он требует большего количества сложных расчетов.

Таким образом, в случаях, когда важна максимально возможная точность полученного значения частоты, следует применять метод частотной демодуляции, а в случаях, когда скорость и простота вычислений более важны, чем точность, например, при реализации концепции краевых вычислений (edge computing) с выполнением расчетов на борту интеллектуальных датчиков, следует применять параболическую интерполяцию.

В дальнейшей работе над методами уточнения частоты по спектру с недостаточным разрешением будут исследованы другие методы интерполяции, например, интерполяция с помощью формулы Гаусса. Также будет исследована возможность улучшения получаемых описанными методами результатов с помощью дополнения спектра нулями (zero-padding). В рамках продолжения исследований в области получения информации об отдельных частотных составляющих сложного сигнала планируется исследовать возможность получения точной амплитуды интересующей компоненты.

### Список литературы/References

1. Абдуллин В.В., Рашупкина З.А., Шнайдер Д.А. Опыт внедрения системы вибромониторинга на клетки прокатного стана с применением технологии ПолиТЭР.ПоТ // Энергоресурсосбережение. Диагностика-2022. Материалы междунар. науч.-практ. конф. Ульяновск: Мир Печати, 2022. С. 345–350. [Abdullin V.V., Rashchupkina Z.A., Shnayder D.A. [Implementation experience of a vibration monitoring system on a rolling mill cage using PolyTER.IIoT technology]. In: *Energoresursosberezhenie. Diagnostika-2022. Materialy mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Energy saving. Diagnostics-2022. Materials of the international scientific and practical conference]. Ulyanovsk: Mir Pechati, 2022. P. 345–350. (In Russ.)]
2. Goldman S. *Vibration spectrum analysis: a practical approach*. Industrial Press Inc., 1999. P. 27–37.
3. Lyon D.A. The discrete Fourier transform, part 4: spectral leakage. *Journal of object technology*. 2009;8(7):23–34. DOI: 10.5381/jot.2009.8.7.a3

4. Randall R.B., Antoni J. Rolling element bearing diagnostics – A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2011;25:485–520. DOI: 10.1016/j.ymssp.2010.10.004
5. Rai A., Upadhyay S.H. A review on signal processing techniques utilized in the fault diagnosis of rolling element bearings. *Tribol. Int.* 2016;96:289–306. DOI: 10.1016/j.triboint.2015.11.006
6. Jardine A.K.S., Lin D., Banjevic D. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mech. Syst. Signal Process.* 2006;20(7):1483–1510. DOI: 10.1016/j.ymssp.2005.07.019
7. Rauscher C. *Fundamentals of spectrum analysis*. Rohde & Schwarz GmbH & Co. KG; 2001. P. 19–28.
8. Bellini A., Yazidi A., Filippetti F. et al. High frequency resolution techniques for rotor fault detection of induction machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2008;55(12):4200–4209. DOI: 10.1109/TIE.2008.2002685
9. Bellini A., Yazidi A., Filippetti F., Montelisciani G., Rossi C. High frequency resolution techniques for rotor fault detection of induction machines. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2008;55(12):4200–4209. DOI: 10.1109/TIE.2008.2002685
10. Por E., Kooten M. van, Sarkovic V. Nyquist–Shannon sampling theorem. *Leiden University*. 2019;1(1). DOI: 10.5334/jot.2019.1.1.a2
11. Brandt A. *Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures*. New York, NY, USA: Wiley; 2011.
12. Liguori C., Paciello V., Paolillo A., Pietrosanto A. Improving and qualifying spectrum analysis made by digital scopes. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2007;56(6):2411–2419. DOI: 10.1109/TIM.2007.904742
13. Abdullin V.V., Shnayder D.A., Khasanov A.R., Tselikanov D.F. IIoT-Based Approach to Industrial Equipment Condition Monitoring: Wireless Technology and Use Cases. In: *2020 Global Smart Industry Conference (GloSIC)*. 2020. P. 399–406. DOI: 10.1109/GloSIC50886.2020.9267842
14. Gasior M., Gonzalez J.L. Improving FFT Frequency Measurement Resolution by Parabolic and Gaussian Spectrum Interpolation. *AIP Conference Proceedings*. 2004;732(1):276–285. DOI: 10.1063/1.1831158
15. Djukanović S., Popović T., Mitrović A. Precise sinusoid frequency estimation based on parabolic interpolation. In: *2016 24th Telecommunications Forum (TELFOR)*. 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/TELFOR.2016.7818824
16. Randall R.B. *Frequency analysis*. Naerum (DK): Bruel & Kjaer; 1987.
17. Chiang C.L. *Statistical methods of analysis*. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.; 2003. P. 3–8. DOI: 10.5555/218623.218630

#### **Информация об авторах**

**Казаринов Лев Сергеевич**, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры автоматике и управления, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; kazarinovls@susu.ru.

**Колосова Зоя Александровна**, преподаватель кафедры автоматике и управления, младший научный сотрудник лаборатории систем промышленной автоматизации и интернета вещей, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; kolosovaza@susu.ru.

**Абдуллин Вильдан Вильданович**, канд. техн. наук, доц., доц. кафедры автоматике и управления, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; abdullinvv@susu.ru.

**Шнайдер Дмитрий Александрович**, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры автоматике и управления, руководитель лаборатории систем промышленной автоматизации и интернета вещей, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; shnayderda@susu.ru.

#### **Information about the authors**

**Lev S. Kazarinov**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Automatics and Control, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; kazarinovls@susu.ru.

**Zoya A. Kolosova**, Lecturer of the Department of Automatics and Control, Junior Research Fellow of the Industrial Automation Systems and IoT Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; kolosovaza@susu.ru.



**Vildan V. Abdullin**, Cand. Sci. (Eng.), Ass. Prof., Ass. Prof. of the Department of Automatics and Control, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; abdullinvv@susu.ru.

**Dmitry A. Shnayder**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Automatics and Control, Director of the Industrial Automation Systems and IoT Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; shnayderda@susu.ru.

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.  
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article.  
The authors declare no conflicts of interests.

**Статья поступила в редакцию 18.08.2023**  
**The article was submitted 18.08.2023**