

ЗАДАЧА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛИЗА – ПРИМЕНЕНИЯ, МЕТОДЫ, ПРОБЛЕМЫ

О.Л. Ибряева, ibriaevaol@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0125-1069>

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. В настоящей статье обзорного характера представлена задача экспоненциального анализа, ее применения, ограничения и проблемы, актуальные, несмотря на более чем двухсотлетнюю историю. За это время разработано множество методов решения задачи, но наибольшую популярность и эффективность демонстрируют Прони-подобные методы: метод Паде – Лапласа, Прони и метод матричных пучков, которые и являются предметом исследования в данной работе. **Цель исследования:** представить современное состояние задачи экспоненциального анализа, ее основные проблемы и методы их решения. Основными проблемами указанных методов являются вопрос определения числа экспонент, выбор оптимальной частоты дискретизации сигнала и уменьшение вычислительных затрат. В статье представлены решения этих проблем. **Материалы и методы.** Для решения проблем проведен анализ научной литературы и использованы методы линейной алгебры. **Результаты.** Описаны модификации методов с целью решения их проблем. Алгоритм вычисления аппроксимации Паде со знаменателем минимальной степени решает проблему дуплетов Фруассара в методе Паде – Лапласа. Для повышения точности вычислений коэффициентов Тейлора в этом же методе используются сплайны. Для выбора оптимальной частоты дискретизации сигнала служит оценка числа обусловленности матрицы в методе Прони. Для метода матричных пучков решена проблема вычислительных затрат за счет его рекуррентной и многоканальной версий. **Заключение.** Представлены различные постановки данной задачи, находящие свои многочисленные приложения. Описаны ограничения, проблемы задачи экспоненциального анализа и их решения. Рассмотрены три параметрических метода: Прони, Паде – Лапласа и метод матричных пучков.

Ключевые слова: экспоненциальный анализ, метод Паде – Лапласа, аппроксимации Паде, дуплеты Фруассара, метод Прони, оптимальная частота дискретизации, метод матричных пучков

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание на выполнение фундаментальных научных исследований № FENU-2023-0010 (2023010ГЗ)).

Для цитирования: Ибряева О.Л. Задача экспоненциального анализа – применения, методы, проблемы // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24, № 4. С. 31–42. DOI: 10.14529/ctcr240403

Original article
DOI: 10.14529/ctcr240403

EXPONENTIAL ANALYSIS TASK – APPLICATIONS, METHODS, PROBLEMS

O.L. Ibrayeva, ibriaevaol@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0125-1069>

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. This review article presents the problem of exponential analysis, its applications, limitations and problems that are relevant despite its more than two hundred years of history. During this time, many methods for solving the problem have been developed, but the greatest popularity and efficiency are demonstrated by Prony-like methods: the Padé–Laplace method, Prony method and the matrix pencil method, which are the subject of research in this work. **The purpose of the study:** to present the current state of the problem of exponential analysis, its main problems and methods for solving them. The main problems of these methods are: the issue of determining the number of exponents, choosing the optimal signal sampling

frequency and reducing computational costs. The article presents solutions to these problems. **Materials and methods.** To solve problems, an analysis of scientific literature was carried out and linear algebra methods were used. **Results.** Modifications of the methods to solve their problems are described. The algorithm for calculating the Padé approximation with a minimum degree denominator solves the problem of Froissart doublets in the Padé–Laplace method. To increase the accuracy of calculations of Taylor coefficients, splines are used in the same method. To select the optimal signal sampling frequency, use the estimation of the matrix condition number in the Prony method. For the matrix pencil method, the problem of computational costs is solved due to its recurrent and multichannel versions. **Conclusion.** Various formulations of this problem are presented, which find their numerous applications. The limitations, problems of the exponential analysis problem, and their solutions are described. Three parametric methods are considered: Prony, Padé–Laplace and the matrix pencil method.

Keywords: exponential analysis, Padé–Laplace method, Padé approximations, Froissart doublets, Prony method, optimal sampling frequency, matrix pencil method

Acknowledgments. The study was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment for the implementation of fundamental scientific research No. FENU-2023-0010 (2023010GZ)).

For citation: Ibryaeva O.L. Exponential analysis task – applications, methods, problems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics.* 2024;24(4):31–42. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr240403

Введение

Экспоненциальный анализ или аппроксимация суммой экспонент является темой активных исследований уже более 200 лет. Традиционно зарождение этой задачи связывают с бароном Гаспаром Рише де Прони, который в 1795 году пришел к выводу, что законы, определяющие расширение различных газов, могут быть представлены с помощью сумм затухающих экспонент [1].

Предложенный им метод подгонки экспоненциальной модели к измеренным эквидистантным значениям был позднее обобщен и на модели, состоящие из суммы синусоид [2, 3].

Задача экспоненциального анализа заключается в нахождении числа экспонент N и комплексных параметров A_j, λ_j модели

$$f(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{\lambda_j t} \quad (1)$$

по ее заданным дискретным отсчетам $f_k = f(t_k)$, $k = 1, \dots, M$. Для подгонки экспоненциальной модели (1) с $2N$ параметрами A_j, λ_j используется $M \geq 2N$ значений f_k .

Модель (1) описывает сумму как действительных экспонент, так и затухающих синусоид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l a_k e^{-\sigma_k t} \sin(2\pi f_k t + \varphi_k), \quad (2)$$

поскольку одна синусоида соответствует двум комплексно-сопряженным экспонентам.

Сумма вида (2) используется, например, в [4] для моделирования аудиосигналов, в [5] – для моделирования отфильтрованного сигнала тока с двигателя. Сумма двух незатухающих синусоид в [6] моделирует сигналы напряжения с катушек кориолисового расходомера. Сумма действительных экспонент в работе [7] описывает процесс выделения газа из нелегированного аланата натрия при его деформации. Широкий класс функций, описываемых моделью (2), обуславливает ее многочисленные приложения в биомедицине [8, 9], инженерии [10], пищевой науке [11], нефтехимической промышленности [12] и во многих других областях [13, 14].

Естественным обобщением (2) для предельного случая бесконечного числа экспонент является модель

$$f(t) = \int_0^\infty A(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad (3)$$

где $A(\lambda)$ – непрерывная функция (спектр), которую нужно найти по известным значениям f_k .

Модель (3) используется в спектроскопии [14, 15] и часто оказывается предпочтительнее модели (1). Например, в задаче моделирования кинетики затухания собственной флуоресценции сывороточного альбумина [16] модель (3) в отличие от (1) позволила проанализировать процессы изменения структуры и динамики макромолекулы при денатурации или нагревании.

При $\lambda = i\omega$ модель бесконечного числа экспонент имеет вид обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Формула (4) фактически описывает физический смысл преобразования Фурье – правая часть есть бесконечная сумма гармонических колебаний $e^{i\omega t}$ с частотами ω , амплитудами $|A(\omega)|$ и фазовыми сдвигами $\arg A(\omega)$. Как и в случае модели (3), требуется найти спектральную плотность $A(\omega)$ по известным отсчетам сигнала f_k .

Функция спектральной плотности наряду с плотностью вероятности, корреляционными функциями, математическим ожиданием и дисперсией относится к характеристикам, с помощью которых анализируются основные свойства стационарных случайных процессов. Она применяется для фильтрации, определения свойств систем по входным и выходным процессам, идентификации источников энергии и шума, оценки соотношения между периодическими и шумовыми составляющими случайного процесса и т. д.

Известно, что появление неисправности в двигателях, подшипниках и других вращающихся механизмах изменяет спектральную плотность снимаемых с них сигналов. На этом основано множество методов диагностики состояния промышленного оборудования. Так, например, в работах [17–19] предложены методы диагностики состояния подшипников качения на основе признаков выделенных из спектральной плотности сигналов вибрации. В работе [5] предложен метод диагностики асинхронного двигателя на основе рекуррентного метода матричных пучков, который отслеживает амплитуду дефектной гармоники в спектре сигнала тока.

Дополнительной трудностью в [5] является близость дефектной гармоники к основной частоте питания в спектре сигнала тока. Аналогично, близкие значения экспоненциальных постоянных λ_j в модели (1) являются серьезной проблемой для их различения, и уже сам Прони отметил это как одно из фундаментальных ограничений задачи экспоненциального анализа. Как было показано позднее [14], существует предел максимальной разрешающей способности в задаче экспоненциального анализа. Это ограничение заложено в самой проблеме и усугубляется шумом.

1. Методы решения и проблема вычислительных затрат

Существует множество методов решения задачи экспоненциального анализа [14]. Некоторые из них уже устарели, так как появились еще во времена, когда не было компьютеров, и сильно уступают современным методам. Это, например, метод графического анализа [20], со временем эволюционировавший в метод наименьших квадратов, который используется до сих пор.

Фактически при решении задачи (1) требуется минимизировать функцию

$$\sum_{k=1}^M (f(t_k) - \sum_{j=1}^N A_j e^{\lambda_j t_k})^2 \rightarrow \min_{A_j, \lambda_j} \quad (5)$$

от $2N$ переменных $A_j, \lambda_j, j = 1, \dots, N$. Это можно сделать методом градиентного спуска. Основными недостатками такого метода являются высокие вычислительные затраты, проблема выбора начального приближения и застревание в локальном минимуме. К тому же разрешающая способность такого метода различить экспоненты с близкими постоянными времени невелика [14].

Более устойчивыми методами с высокой разрешающей способностью являются так называемые Прони-подобные (Prony-like) параметрические методы: Паде – Лапласа, Прони, матричных пучков и др. [14]. Здесь речь идет не о первоначальных вариантах методов, они не столь сильны, а об их усовершенствованных модификациях.

В отчете рабочей группы IEEE [21] о выявлении электромеханических режимов в энергосистемах методы Прони и матричных пучков отнесены в число основных методов в решении данной задачи. Методы используют построение ганкелевой матрицы из отсчетов сигнала. В методе Прони формируется одна матрица Ганкеля и далее находятся ее собственные значения. В методе матричных пучков формируются две «сдвинутые» матрицы Ганкеля и решается проблема обобщенных собственных значений пучка этих матриц. В конечном счете оба метода используют процедуру сингулярного разложения матрицы, дорогую с вычислительной точки зрения.

Проблема высоких вычислительных затрат приводит к невозможности оценки параметров сигнала в режиме реального времени, необходимой во многих приложениях. Для решения этой проблемы исследователями предлагаются различные варианты методов, например, рекуррентный метод Прони [22].

Нами был разработан ряд модификаций метода матричных пучков. Рекуррентный метод матричных пучков [23] позволяет отслеживать параметры сигнала в режиме скользящего окна. Когда новый отсчет данных попадает в окно наблюдения, матрица данных изменяется незначительно, и для нахождения сингулярного разложения новой матрицы применяется эффективная процедура [24], требующая нахождения SVD матрицы более низкого ранга. Таким образом, в рекуррентном методе матричных пучков сингулярное разложение новой матрицы данных реализуется на каждом шаге не напрямую, а на основе сингулярного разложения старой матрицы. Данная модификация позволяет значительно сократить время вычислений.

В статье [25] нами предложен векторный метод матричных пучков, способный оценивать параметры сразу нескольких входных сигналов с одинаковыми полюсами. Метод уменьшает время вычислений и дисперсию оценок параметров по сравнению с классическим методом матричных пучков. Рекуррентный векторный метод матричных пучков [26] является комбинацией двух вышеупомянутых модификаций и позволяет эффективно отслеживать параметры нескольких сигналов с одинаковыми полюсами в режиме скользящего окна.

При большом или бесконечном числе экспонент для моделей (3), (4) нахождение параметров A_j , λ_j требует еще больше вычислительных ресурсов и становится затруднительным в режиме реального времени. На помощь приходят методы машинного обучения, которые требуют один раз провести процедуру обучения модели на размеченных данных, после чего ее можно легко использовать в реальном времени для обработки новых данных.

Например, в работе [17] анализируются сигналы вибрации с подшипников качения с целью диагностики их состояния. Такие сигналы имеют богатый спектр, искать параметры всех гармонических составляющих и отслеживать их изменения в реальном времени невозможно. По этой причине в работе предложен простой и эффективный подход к выделению информативных признаков из спектров сигналов для дальнейшего обучения простой нейронной сети. Метод дал 100%-ную точность в задаче определения состояния подшипника на наборе данных IMS [27]. В нашей работе [19] предложена гибридная нейросетевая модель диагностики неисправностей подшипников, обрабатывающая одновременно входные данные разного типа – изображения спектров Гильберта сигналов вибрации и числовые векторы признаков. За счет такого учета разнородных данных получена эффективная модель, способная работать в нестационарных условиях.

2. Некорректность задачи и проблема определения числа экспонент

Уравнение (3) для нахождения функции $A(\lambda)$ относится к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, решение которых представляет собой некорректно поставленную задачу [28]. Таким образом, решение задачи экспоненциального анализа может не существовать, быть не единственным и неустойчивым.

Ланцош в своем знаменитом примере [29] приблизил сумму трех экспонент

$$y(t) = 0,0951e^{-t} + 0,8607e^{-3t} + 1,5576e^{-5t}$$

по ее 24 равноотстоящим отсчетам суммой двух экспонент

$$f(t) = 2,202e^{-4,45t} + 0,305e^{-1,58t}.$$

На рис. 1 построены графики $y(t)$, $f(t)$ на промежутке от 0 до 1,5 часа. Отличие между значениями $y(t)$, $f(t)$ начинается в третьем знаке после запятой и вполне «укладывается» в шум эксперимента. Однако число экспонент и их параметры у данных функций сильно отличаются.

Сразу отметим, что проблема Ланцоша с «неразличимыми» функциями решается увеличением интервала наблюдения (рис. 2). По этой причине при анализе суммы затухающих экспонент рекомендуется брать интервал до полного затухания функции.

Во многих случаях решить проблему плохой обусловленности задачи экспоненциального анализа и найти нужное решение из нескольких возможных удастся за счет дополнительной информации о сигнале, например, числе экспонент. Часто удается оценить это число, используя различные приемы (построение последовательности аппроксимаций Паде в методе Паде – Лапласа [30, 31], сингулярное разложение в методе Прони [32, 33], методе матричных пучков [34, 35]), которые могут рассматриваться как регуляризация этой плохо обусловленной задачи.

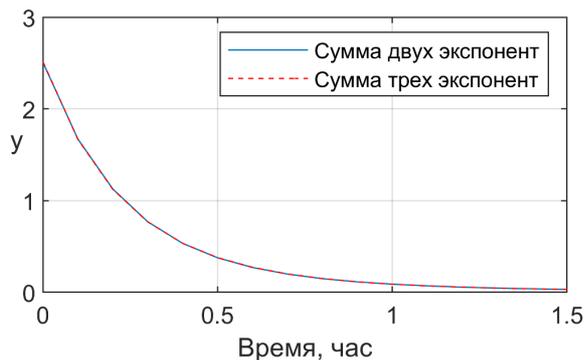


Рис. 1. Графики «неразличимых» функций Ланцоша на промежутке от 0 до 1,5 часа
Fig. 1. Graphs of “indistinguishable” Lanczos functions on the interval from 0 to 1.5 hours

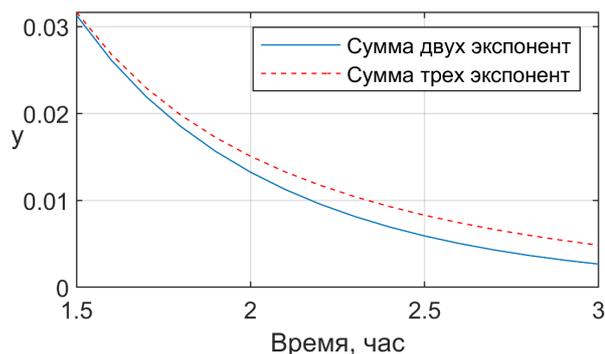


Рис. 2. Графики «неразличимых» функций Ланцоша при дальнейшем наблюдении на промежутке от 1,5 до 3 часов
Fig. 2. Graphs of “indistinguishable” Lanczos functions with further observation on the interval from 1.5 to 3 hours

При определении числа экспонент в методе Паде – Лапласа возникает проблема появления так называемых дуплетов Фруассара. Из-за вычислительных погрешностей и неединственности знаменателя аппроксимации Паде лишние нули и полюсы аппроксимаций не совпадают и не сокращаются. Это приводит к появлению ложных полюсов сигнала, которые нужно каким-то образом выявлять.

В нашей работе [36] предложен алгоритм нахождения аппроксимаций Паде со знаменателем минимальной степени, тем самым устранена причина появления дуплетов, связанная с неединственностью знаменателя аппроксимации Паде. Экспериментально показано, что предложенный алгоритм дает меньшую дисперсию ошибки в определении истинных полюсов сигнала, чем классический метод Паде – Лапласа. Также модифицированный метод Паде – Лапласа применен к отслеживанию частоты синусоидального сигнала с измерительной катушки кориолисова расходомера [37]. При этом для увеличения точности оценки частоты используется завышенный порядок аппроксимации Паде и предложенный метод сам определяет число экспонент и их параметры.

3. Проблема оптимальной дискретизации сигнала

Как мы видели, при увеличении интервала наблюдения в задаче экспоненциального анализа достигается улучшение разрешающей способности. В примере Ланцоша с «неразличимыми» функциями стоит продолжить наблюдение на большем промежутке времени, когда они полностью затухнут, и разница между ними становится очевидна.

Отметим, что важно не только количество точек (отсчетов сигнала), по которым будут восстанавливаться параметры, но и то, как они расположены. Например, в статье [38] показано, что выбор эквидистантных отсчетов затухающей экспоненты по логарифмическому масштабу более целесообразен, чем по линейному.

В случае хорошо обусловленных задач, чем больше точек данных берется на кривой, тем точнее ее можно «подогнать». При экспоненциальном анализе это не всегда так. Процедура дискретизации представляет собой своего рода фильтр нижних частот. В соответствии с теоремой Котельникова будут оцифрованы только гармоники с частотой ниже половины частоты дискретизации. При увеличении частоты дискретизации мы увеличиваем содержание связанных с шумом высокочастотных компонентов в спектре, тем самым делая проблему еще более некорректной. В конечном итоге увеличение количества точек данных приводит к увеличению времени вычислений и, возможно, даже к ухудшению разрешения.

В связи с этим особую важность имеет выбор частоты дискретизации сигнала при его экспоненциальном анализе. В работе [39], где предложен комплекс программ G-Marple, реализующий метод Паде – Лапласа, автор говорит о встроенной возможности в его программе и необходимости попробовать несколько разных значений частоты дискретизации, поскольку ее значение влияет на точность вычисления коэффициентов ряда Тейлора в методе Паде – Лапласа.

Возможность передискретизации сигнала в [39] появляется за счет использования сплайнов, интерполирующих исходные отсчеты сигнала. Имея непрерывную функцию – сплайн, можно выбрать ее отсчеты с любой другой частотой дискретизации. В работе [40] мы получили явную формулу для коэффициентов Тейлора через коэффициенты кубического сплайна. Это позволило уменьшить погрешность определения коэффициентов ряда Тейлора в методе Паде – Лапласа примерно в 4 раза.

В работе [41] нами было показано, что значение частоты дискретизации сигнала влияет на число обусловленности матрицы в методе Прони, использующейся для нахождения параметров сигналов, и, как следствие, на точность определения этих параметров. В статье [42] мы предложили алгоритм нахождения оптимальной частоты дискретизации в методе Прони, дающий минимальное значение числа обусловленности этой матрицы и уже успешно примененный другими исследователями в ряде работ [43–46]. В частности, для случая одной частоты и, соответственно, двух полюсов оптимальная частота дискретизации будет в 4 раза больше этой частоты.

Заключение

Статья посвящена классической задаче аппроксимации функции суммой экспонент. Представлены различные постановки данной задачи, находящие свои многочисленные приложения. Описаны ограничения, проблемы задачи экспоненциального анализа и их решения.

Для решения проблемы определения числа экспонент в методе Прони и методе матричных пучков используется сингулярное разложение матриц. В случае незначительного шума сингулярные числа, отвечающие полезному сигналу, значительно больше чисел, соответствующих шумовым компонентам, что и дает возможность определить число экспонент. В методе Паде – Лапласа для этой же цели используется прием построения последовательности аппроксимаций Паде. При достаточно большом порядке они будут иметь стабильные полюсы, соответствующие полюсам сигнала, и ложные нестабильные полюсы с соответствующими близкими им нулями числителя (дуплеты Фруассара). Можно выделить две причины появления дуплетов: погрешности вычислений и неединственность знаменателя аппроксимации Паде. И если с первой причиной трудно что-то сделать, то для устранения второй служит алгоритм нахождения знаменателя аппроксимации Паде минимальной степени [36].

Проблема выбора оптимальной частоты дискретизации актуальна для всех рассматриваемых методов, поскольку все они направлены на решение некорректной задачи экспоненциального анализа. Как уже сказано ранее, при увеличении частоты дискретизации мы увеличиваем содержание связанных с шумом высокочастотных компонентов в спектре, тем самым делая задачу еще более некорректной. Достаточно рассмотреть вопрос определения оптимальной частоты дискретизации на примере одного из методов, поскольку она зависит не от метода, а от самой задачи и автоматически будет являться оптимальной для всех рассматриваемых методов. Для этой цели больше всего подходит метод Прони. Для нахождения полюсов сигнала в методе Прони требуется решить систему линейных уравнений, матрица которой составлена из отсчетов сигнала и определяет точность нахождения его полюсов. В методе матричных пучков следовало бы рассматривать пучок из двух матриц, составленных из отсчетов сигнала. Метод Паде – Лапласа тоже не очень подходит для этой цели, так как матрица, используемая в нем для нахождения полюсов сигнала, составлена не из его отсчетов, а из приближенно найденных коэффициентов Тейлора преобразования Лапласа интересующего нас сигнала. Для решения вопроса выбора оптимальной частоты дискретизации на основе метода Прони необходимо оценить число обусловленности матрицы, определяющей точность нахождения полюсов сигнала в методе Прони и найти оптимальную частоту дискретизации, дающую минимальное значение этой оценки числа обусловленности. Это сделано в работах [41, 42].

Проблема уменьшения вычислительных затрат наиболее актуальна для методов матричных пучков и Прони, использующих дорогую с вычислительной точки зрения процедуру сингулярного разложения матриц. Эти матрицы составлены из отсчетов сигнала и при отслеживании его параметров в режиме скользящего окна меняются незначительно. Возникает разумная необходимость не вычислять заново сингулярное разложение соответствующих матриц, а воспользоваться уже найденным разложением очень похожей матрицы на предыдущем шаге. В статье [22] разработан рекуррентный метод Прони, позволяющий отслеживать параметры сигнала в режиме

скользящего окна, не находя заново сингулярное разложение для каждого окна. Также для метода Прони еще в 1999 году была предложена так называемая многоканальная модификация [47] на случай набора сигналов с одинаковыми полюсами, которая уменьшает время вычислений и дисперсию оценки параметров по сравнению с одноканальным методом Прони, примененным для каждого сигнала отдельно. Таким образом, для метода Прони существуют модификации, отчасти решающие проблему высоких вычислительных затрат. Аналогичные модификации для метода матричных пучков созданы автором данной работы. В работе [23] разработан рекуррентный метод матричных пучков для оценки параметров сигнала в режиме скользящего окна. Векторный (или многоканальный) метод матричных пучков для оценки параметров сразу нескольких сигналов с одинаковыми полюсами предложен в [25]. Наконец, на случай отслеживания параметров такого набора сигналов в режиме скользящего окна разработан рекуррентный векторный метод матричных пучков [26], являющийся синтезом двух предыдущих модификаций.

Список литературы

1. Prony G.R. Essai experimental et analytique: sur les lois de la dilatabilite des fluides elastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a differentes temperatures // Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait a l'Ecole Centrale des Travaux Publics. 1795. Vol. 1, cahier 22. P. 24–76.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
3. Marple L. Spectral line analysis by Pisarenko and Prony methods // ICASSP '79. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1979. P. 159–161. DOI: 10.1109/ICASSP.1979.1170707
4. Hermus K. Perceptual audio modeling with exponentially damped sinusoids // Signal Process. 2005. Vol. 85, no. 1. P. 163–176. DOI: 10.1016/j.sigpro.2004.09.010
5. The Detection of Rotor Bar Faults in Induction Motors Using the Recursive Matrix Pencil Method / V. Sinitsin, A. Shestakov, O. Ibryaeva, V. Eremeeva // Proceedings of the 19th IMEKO TC10 International Conference on Measurement for Diagnostics, Optimization and Control on Measurement in Testing, Inspection and Certification. 2023. DOI: 10.21014/tc10-2023.015
6. Ibryaeva O., Semenov A., Henry M. Measurement validation for ICPS: Matrix pencil method for coriolis metering with liquid/gas flow // 2018 IEEE Industrial Cyber-Physical Systems (ICPS). IEEE, 2018. P. 15–18. DOI: 10.1109/ICPHYS.2018.8390745
7. Tribochemically driven dehydrogenation of undoped sodium alanate under room temperature / E. Muñoz-Cortés, O. Ibryaeva, M. Manso-Silván et al. // Physical Chemistry Chemical Physics. 2022. Vol. 25, no. 1. P. 494–508. DOI: 10.1039/D2CP04681D
8. Multicomponent T2 relaxation analysis in cartilage / D.A. Reiter, P. Lin, K. Fishbein, R. Spencer // Magn. Reson. Med. 2009. Vol. 61, no. 4. P. 803–809. DOI: 10.1002/mrm.21926
9. In vivo measurement of T2 distributions and water contents in normal human brain / K.P. Whittall, A.L. MacKay, D.A. Graeb et al. // Magn. Reson. Med. 1997. Vol. 37, no. 1. P. 34–43. DOI: 10.1002/mrm.1910370107
10. Monitoring of Hydration of White Cement Paste with Proton NMR Spin–Spin Relaxation / J. Greener, H. Peemoeller, R. Holly et al. // J. Am. Ceram. Soc. 2000. Vol. 83, no. 3. P. 623–627. DOI: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01242.x
11. Kirtil E., Oztop M. 1H Nuclear Magnetic Resonance Relaxometry and Magnetic Resonance Imaging and Applications in Food Science and Processing // Food Eng. Rev. 2015. Vol. 8, no. 1. DOI: 10.1007/s12393-015-9118-y
12. T1–T2 Correlation Spectra Obtained Using a Fast Two-Dimensional Laplace Inversion / Y.-Q. Song, L. Venkataramanan, M.D. Hürlimann et al. // J. Magn. Reson. 2002. Vol. 154, no. 2. P. 261–268. DOI: 10.1006/jmre.2001.2474
13. Pereyra V., Scherer G. Exponential Data Fitting and its Applications. Bentham Science Publishers, 2010. DOI: 10.2174/978160805048211001010001
14. Istratov A.A., Vyvenko O.F. Exponential analysis in physical phenomena // Rev. Sci. Instrum. 1999. Vol. 70, no. 2. P. 1233–1257. DOI: 10.1063/1.1149581

15. Analysis of fluorescence decay kinetics measured in the frequency domain using distributions of decay times / J.R. Lakowicz, H. Cherek, I. Gryczynski et al. // *Biophys. Chem.* 1987. Vol. 28, no. 1. P. 35–50. DOI: 10.1016/0301-4622(87)80073-X
16. Маскевич А. Моделирование кинетики собственной флуоресценции сывороточного альбумина человека // *Вестник Гродненского университета имени Янки Купалы. Серия 2: Математика.* 2022. Т. 12, № 1. С. 57–66.
17. Ибряева О.Л., Мохаммад М.Н. Диагностика неисправностей подшипников качения с использованием пиков спектра и нейронных сетей // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика».* 2022. Т. 11, № 2. С. 59–71. DOI: 10.14529/cmse220205
18. Шестаков А., Ибряева О., Мохаммад М. Нейросетевая модель диагностики неисправностей подшипников качения на основе метода линейного предсказания // *Приборы.* 2022. Т. 6, № 264. P. 1–7.
19. Intelligent bearing fault diagnosis method combining mixed input and hybrid CNN-MLP model / V. Sinitsin, O. Ibrayeva, V. Sakovskaya, V. Ereemeeva // *Mech. Syst. Sig. Process.* 2022. Vol. 180. P. 109454. DOI: 10.1016/j.ymsp.2022.109454
20. Van Liew H.D. Graphic analysis of aggregates of linear and exponential processes // *J. Theor. Biol.* 1967. Vol. 16, no. 1. P. 43–53. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90052-5
21. Crow M., Gibbard M., Messina A. Identification of electromechanical modes in power systems // *IEEE Task Force Report, Special Publication TP462.* 2012.
22. Recursive Prony's Method for Improving the Monitoring of Electrical Machines / F.F. Costa, L.A.L. de Almeida, F.A. Wegelin, E.G. da Costa // *2005 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings.* P. 16–19. DOI: 10.1109/IMTC.2005.1604401
23. Ibrayeva O. Recursive matrix pencil method // *2017 2nd International Ural Conference on Measurements (UralCon).* Chelyabinsk, Russia, 2017. P. 378–383. DOI: 10.1109/URALCON.2017.8120739
24. Brand M. Fast low-rank modifications of the thin singular value decomposition // *Linear Algebra Appl.* 2006. Vol. 415, no. 1. P. 20–30. DOI: /10.1016/j.laa.2005.07.021
25. Метод матричных пучков для оценки параметров векторных процессов / М. Генри, О.Л. Ибряева, Д.Д. Салов, А.С. Семенов // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование».* 2017. Т. 10, № 4. С. 92–104. DOI: 10.14529/mmp170409
26. Ибряева О.Л., Шестаков А.Л., Федосов И.И. Рекуррентный векторный метод матричных пучков // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование».* 2019. Т. 12, № 2. С. 97–111. DOI: 10.14529/mmp190208
27. Prognostics Center of Excellence Data Set Repository – NASA. 03.2024. URL: <https://www.nasa.gov/intelligent-systems-division/discovery-and-systems-health/pcoe/pcoe-data-set-repository> (дата обращения: 18.03.2024).
28. Калиткин Н., Корякин П. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2: Методы математической физики. М.: Академия, 2013. 304 с.
29. Lanczos C. *Applied analysis.* USA: Prentice Hall, 1956. 539 p.
30. Pade-Laplace method for analysis of fluorescence intensity decay / Z. Bajzer, A. Myers, S. Sedarous, F. Prendergast // *Biophys. J.* 1989. Vol. 56, no. 1. P. 79–93. DOI: 10.1016/S0006-3495(89)82653-0
31. Ibrayeva O.L., Adukov V.M. On removal of Froissart doublets in Pade – Laplace method // *2012 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP).* 2012. DOI: 10.1109/TSP.2012.6256375
32. Марпл С. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
33. Шестаков А.Л., Семенов А.С., Ибряева О.Л. Оценка несущей частоты случайной последовательности импульсов методом Прони // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование».* 2009. Вып. 4, № 37 (170). С. 106–115.
34. Ибряева О.Л., Салов Д.Д. Модификация метода матричных пучков, использующая совместное оценивание полюсов сигнала и обратных к ним // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика».* 2017. Т. 6, № 1. С. 26–37. DOI: 10.14529/cmse170102
35. Hua Y., Sarkar T.K. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise // *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* 1990. Vol. 38, no. 5. P. 814–824. DOI: 10.1109/29.56027

36. Ibryaeva O.L., Adukov V.M. An algorithm for computing a Pade approximant with minimal degree denominator // *J. Comput. Appl. Math.* 2013. Vol. 237, no. 1. P. 529–541. DOI: 10.1016/j.cam.2012.06.022
37. Ибряева О.Л., Тараненко П.А., Телегин Д.В. Модификация метода Паде – Лапласа и его применение к анализу сигналов с кориолисова расходомера // *Автоматизация в промышленности.* 2023. № 9. С. 34–37. DOI: 10.25728/avtprom.2023.09.06
38. Exponential Sampling Method for Light Scattering Polydispersity Analysis / N. Ostrowsky, D. Sornette, P. Parker, E.R. Pike // *Journal of Modern Optics.* 1981. Vol. 28, no. 8. P. 1059–1070. DOI: 10.1080/713820704
39. Tannous C. Generalised Modal Analysis with the Pade-Laplace transform. URL: <https://arxiv.org/abs/physics/0304107v1>. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0304107
40. Ibryaeva O.L. Evaluation of Taylor coefficients in Pade-Laplace method using cubic splines // 14th IMEKO TC10 Workshop Technical Diagnostics New Perspectives in Measurements, Tools and Techniques for system's reliability, maintainability and safety. Milan, Italy, 2016. P. 145–150.
41. Ибряева О. Оценка числа обусловленности матрицы в методе Прони // *Известия Челябинского научного центра.* 2010. Т. 2, № 48. С. 1–5.
42. Bushuev O.Y., Ibryaeva O.L. Choosing an optimal sampling rate to improve the performance of signal analysis by Prony's method // 2012 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing. 2012. DOI: 10.1109/TSP.2012.6256374
43. Underwater material recognition based on laser-induced acoustic source / J. Ye, Y. Zhu, W. Lv et al. // *OCEANS 2014 – TAIPEI.* 2014. P. 1–4. DOI: 10.1109/OCEANS-TAIPEI.2014.6964544
44. Alfieri L., Carpinelli G., Bracale A., Caramia P. Advanced methods for the assessment of time varying waveform distortions caused by wind turbine systems. Part II: Numerical applications // 2013 13th International Conference on Environment and Electrical Engineering (EEEIC). IEEE. P. 1–3. DOI: 10.1109/EEEIC-2.2013.6737899
45. Emam A.S., Azmy A.M., Rashad E.M. Enhanced Model Predictive Control-Based STATCOM Implementation for Mitigation of Unbalance in Line Voltages // *IEEE Access.* 2020. Vol. 8. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3044982
46. Duda K., Zielinski T. The Polyphase Prony Method [Tips & Tricks] // *IEEE Signal Processing Magazine.* 2022. Vol. 39, no. 3. P. 115–120. DOI: 10.1109/MSP.2022.3148712
47. Trudnowski D., Johnson J., Hauer J. Making Prony Analysis More Accurate using Multiple Signals // *IEEE Transactions on Power Systems.* 1999. Vol. 14, no. 1. P. 226–231. DOI: 10.1109/59.744537

References

1. Prony G.R. Essai experimental et analytique: sur les lois de la dilatabilite des fluides elastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a differentes temperatures. *Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait a l'Ecole Centrale des Travaux Publics.* 1795;1(22):24–76.
2. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review.* Dover Publications, 2013.
3. Marple L. Spectral line analysis by Pisarenko and Prony methods. In: *ICASSP '79. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1979. P. 159–161. DOI: 10.1109/ICASSP.1979.1170707
4. Hermus K. Perceptual audio modeling with exponentially damped sinusoids. *Signal Process.* 2005;85(1):163–176. DOI: 10.1016/j.sigpro.2004.09.010
5. Sinitin V., Shestakov A., Ibryaeva O., Ereemeeva V. The Detection of Rotor Bar Faults in Induction Motors Using the Recursive Matrix Pencil Method. In: *Proceedings of the 19th IMEKO TC10 International Conference on Measurement for Diagnostics, Optimization and Control on Measurement in Testing, Inspection and Certification.* 2023. DOI: 10.21014/tc10-2023.015
6. Ibryaeva O., Semenov A., Henry M. Measurement validation for ICPS: Matrix pencil method for coriolis metering with liquid/gas flow. In: *2018 IEEE Industrial Cyber-Physical Systems (ICPS).* IEEE; 2018. P. 15–18. DOI: 10.1109/ICPHYS.2018.8390745

7. Muñoz-Cortés E., Ibryaeva O., Manso-Silván M., Zabala B., Flores E., Gutierrez A., Ares J., Nevshupa R. Tribochemically driven dehydrogenation of undoped sodium alanate under room temperature. *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2022;25(1):494–508. DOI: 10.1039/D2CP04681D
8. Reiter D.A., Lin P., Fishbein K., Spencer R. Multicomponent T2 relaxation analysis in cartilage. *Magn. Reson. Med.* 2009;61(4):803–809. DOI: 10.1002/mrm.21926
9. Whittall K.P., MacKay A.L., Graeb D.A., Nugent R.A., Li D.K., Paty D.W. In vivo measurement of T2 distributions and water contents in normal human brain. *Magn. Reson. Med.* 1997;37(1):34–43. DOI: 10.1002/mrm.1910370107
10. Greener J., Peemoeller H., Holly R., Reardon E., Hansson C., Pintar M. Monitoring of Hydration of White Cement Paste with Proton NMR Spin–Spin Relaxation. *J. Am. Ceram. Soc.* 2000;83(3):623–627. DOI: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01242.x
11. Kirtil E., Oztop M. 1H Nuclear Magnetic Resonance Relaxometry and Magnetic Resonance Imaging and Applications in Food Science and Processing. *Food Eng. Rev.* 2015;8(1). DOI: 10.1007/s12393-015-9118-y
12. Song Y.-Q., Venkataramanan L., Hürlimann M.D., Flaum M., Frulla P., Straley C. T1–T2 Correlation Spectra Obtained Using a Fast Two-Dimensional Laplace Inversion. *J. Magn. Reson.* 2002;154(2):261–268. DOI: 10.1006/jmre.2001.2474
13. Pereyra V., Scherer G. *Exponential Data Fitting and its Applications*. Bentham Science Publishers; 2010. DOI: 10.2174/978160805048211001010001
14. Istratov A.A., Vyvenko O.F. Exponential analysis in physical phenomena. *Rev. Sci. Instrum.* 1999;70(2):1233–1257. DOI: 10.1063/1.1149581
15. Lakowicz J.R., Cherek H., Gryczynski I., Joshi N., Johnson M. Analysis of fluorescence decay kinetics measured in the frequency domain using distributions of decay times. *Biophys. Chem.* 1987;28(1):35–50. DOI: 10.1016/0301-4622(87)80073-X
16. Maskevich A.A. [Modeling of the intrinsic fluorescence decay kinetics of the human serum albumin]. *Bulletin of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2: Mathematics*. 2022;12(1):57–66. (In Russ.)
17. Ibryaeva O.L., Mohammad M.N. Fault Diagnosis of Rolling Bearings Using Spectral Peaks and Neural Networks. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computational Mathematics and Software Engineering*. 2022;11(2):59–71. (In Russ.) DOI: 10.14529/cmse220205
18. Shestakov A., Ibryaeva O., Mohammad M. [Neural network model for diagnosing faults in rolling bearings based on the linear prediction method]. *Pribory*. 2022;6(264):1–7. (In Russ.)
19. Sinitsin V., Ibryaeva O., Sakovskaya V., Ereemeeva V. Intelligent bearing fault diagnosis method combining mixed input and hybrid CNN-MLP model. *Mech. Syst. Sig. Process.* 2022;180:109454. DOI: 10.1016/j.ymsp.2022.109454
20. Van Liew H.D. Graphic analysis of aggregates of linear and exponential processes. *J. Theor. Biol.* 1967;16(1):43–53. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90052-5
21. Crow M., Gibbard M., Messina A. Identification of electromechanical modes in power systems. In: *IEEE Task Force Report, Special Publication TP462*. 2012.
22. Costa F.F., de Almeida L.A.L., Wegelin F.A., da Costa E.G. Recursive Prony’s Method for Improving the Monitoring of Electrical Machines. In: *2005 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings*. P. 16–19. DOI: 10.1109/IMTC.2005.1604401
23. Ibryaeva O. Recursive matrix pencil method. In: *2017 2nd International Ural Conference on Measurements (UralCon)*. Chelyabinsk, Russia, 2017. P. 378–383. DOI: 10.1109/URALCON.2017.8120739
24. Brand M. Fast low-rank modifications of the thin singular value decomposition. *Linear Algebra Appl.* 2006;415(1):20–30. DOI: 10.1016/j.laa.2005.07.021
25. Henry M.P., Ibryaeva O.L., Salov D.D., Semenov A.S. Matrix pencil method for estimation of parameters of vector processes. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2017;10(4):92–104. (In Russ.) DOI: 10.14529/mmp170409
26. Ibryaeva O.L., Shestakov A.L., Fedosov I.I. Recursive multi-channel matrix pencil method. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2019;12(2):97–111. (In Russ.) DOI: 10.14529/mmp190208

27. Prognostics Center of Excellence Data Set Repository – NASA. 03.2024. Available at: <https://www.nasa.gov/intelligent-systems-division/discovery-and-systems-health/pcoe/pcoe-data-set-repository> (accessed 18. Mar. 2024).
28. Kalitkin H., Koryakin P. *Chislennyye metody: v 2 kn. Kn. 2: Metody matematicheskoy fiziki* [Numerical Methods: in 2 books. Book 2: Methods of mathematical physics]. Moscow: Akademiya Publ.; 2013. 304 p. (In Russ.)
29. Lanczos C. *Applied analysis*. USA: Prentice Hall; 1956. 539 p.
30. Bajzer Z., Myers A., Sedarous S., Prendergast F. Pade-Laplace method for analysis of fluorescence intensity decay. *Biophys. J.* 1989;56(1):79–93. DOI: 10.1016/S0006-3495(89)82653-0
31. Ibryaeva O.L., Adukov V.M. On removal of Froissart doublets in Pade – Laplace method. In: *2012 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*. 2012. DOI: 10.1109/TSP.2012.6256375
32. Marple S. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice Hall; 1987. 492 p.
33. Shestakov A.L., Semenov A.S., Ibryaeva O.L. Carrier frequency estimation for random pulse train using Prony’s method. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2009;4(37(170)):106–115. (In Russ.)
34. Ibryaeva O.L., Salov D.D. Modification of the matrix pencil method using a combined evaluation of signal poles and their inverses. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computational Mathematics and Software Engineering*. 2017;6(1):26–37. (In Russ.) DOI: 10.14529/cmse170102
35. Hua Y., Sarkar T.K. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* 1990;38(5):814–824. DOI: 10.1109/29.56027
36. Ibryaeva O.L., Adukov V.M. An algorithm for computing a Pade approximant with minimal degree denominator. *J. Comput. Appl. Math.* 2013;237(1):529–541. DOI: 10.1016/j.cam.2012.06.022
37. Ibryaeva O.L., Taranenko P.A., Teleghin D.V. Modification of Padé-Laplace method and its application in the analysis of Coriolis flowmeter readings. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti*. 2023;(9):34–37. (In Russ.) DOI: 10.25728/avtprom.2023.09.06
38. Ostrowsky N., Sornette D., Parker P., Pike E.R. Exponential Sampling Method for Light Scattering Polydispersity Analysis. *Journal of Modern Optics*. 1981;28(8):1059–1070. DOI: 10.1080/713820704
39. Tannous C. Generalised Modal Analysis with the Pade-Laplace transform. Available at: <https://arxiv.org/abs/physics/0304107v1>. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0304107
40. Ibryaeva O.L. Evaluation of Taylor coefficients in Pade-Laplace method using cubic splines. In: *14th IMEKO TC10 Workshop Technical Diagnostics New Perspectives in Measurements, Tools and Techniques for system’s reliability, maintainability and safety*. Milan, Italy; 2016. P. 145–150.
41. Ibryaeva O. [Estimation of the condition number of a matrix in the Prony method]. *News of the Chelyabinsk Scientific Center*. 2010;2(48):1–5. (In Russ.)
42. Bushuev O.Y., Ibryaeva O.L. Choosing an optimal sampling rate to improve the performance of signal analysis by Prony’s method. In: *2012 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing*. 2012. DOI: 10.1109/TSP.2012.6256374
43. Ye J., Zhu Y., Lv W., Qu K., Jin X., Xu Y., Zhang J., Li S., Chen Y. Underwater material recognition based on laser-induced acoustic source. In: *OCEANS 2014 – TAIPEI*. 2014. P. 1–4. DOI: 10.1109/OCEANS-TAIPEI.2014.6964544
44. Advanced methods for the assessment of time varying waveform distortions caused by wind turbine systems. Part II: Numerical applications / L. Alfieri, G. Carpinelli, A. Bracale, P. Caramia // 2013 13th International Conference on Environment and Electrical Engineering (EEEIC). IEEE. P. 1–3. DOI: 10.1109/EEEIC-2.2013.6737899
45. Emam A.S., Azmy A.M., Rashad E.M. Enhanced Model Predictive Control-Based STATCOM Implementation for Mitigation of Unbalance in Line Voltages. *IEEE Access*. 2020;8. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3044982
46. Duda K., Zielinski T. The Polyphase Prony Method [Tips & Tricks]. *IEEE Signal Processing Magazine*. 2022;39(3):115–120. DOI: 10.1109/MSP.2022.3148712
47. Trudnowski D., Johnson J., Hauer J. Making Prony Analysis More Accurate using Multiple Signals. *IEEE Transactions on Power Systems*. 1999;14(1):226–231. DOI: 10.1109/59.744537

Информация об авторе

Ибряева Ольга Леонидовна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательской лаборатории технической самодиагностики и самоконтроля приборов и систем, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; ibriaevaol@susu.ru.

Information about the author

Olga L. Ibryaeva, Cand. Sci. (Phys. and Math.), Senior Researcher at the Research Laboratory of Technical Self-Diagnostics and Self-Monitoring of Devices and Systems, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; ibriaevaol@susu.ru.

Статья поступила в редакцию 30.03.2024

The article was submitted 30.03.2024