Управление в технических системах
Control in technical systems

Научная статья
УДК 681.5
DOI: 10.14529/ctcr250203

ВЫПИСЫВАНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ МАТРИЦ ШАРНИРНЫХ ДРЕВОВИДНЫХ СИСТЕМ

А.И. Телегин, *teleginai@susu.ru*
Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия

Аннотация. **Целью** является разработка формализма (последовательности формальных действий) выписывания формул вычисления элементов матрицы инерционных коэффициентов (ЭМИК) древовидных систем тел с открытыми ветвями (ДСТОВ), тела которых образуют между собой шарниры, т. е. вращательные кинематические пары пятого класса. **Методы исследования** относятся к механике систем тел, системному анализу и робототехнике. **Результаты исследования** содержат новый формализм автоматического выписывания формул вычисления ЭМИК, т. е. коэффициентов при произведениях относительных угловых скоростей тел в выражении кинетической энергии ДСТОВ. Формулы ЭМИК содержат постоянные структурные, геометрические и инерционные параметры рассматриваемой ДСТОВ. Эти формулы представляются в виде квадратичных форм относительно направляющих косинусов между осями систем координат, жестко связанных с телами. Эффективность формализма демонстрируется на примерах ручного выписывания ЭМИК трехзвенного ангулярного манипуляционного робота (МР) в вертикальной плоскости, двуруких МР с пятью и семью степенями свободы на плоскости и в пространстве. Для МР в пространстве решена задача синтеза его параметров, для которых ЭМИК не зависят от углов поворота тел. **Заключение.** Предлагаемый формализм можно использовать для выписывания ЭМИК типовых ангулярных МР, а также шагающих аппаратов в одноопорной фазе ходьбы или полета, например, с целью вывода на их основе уравнений динамики в форме уравнения Лагранжа второго рода. Применение известных методов учета связей расширяет область использования ЭМИК на ДСТВ, т. е. на ДСТОВ со связями концевых тел, а также на ДСТВ с переменной структурой, что актуально для выписывания уравнений динамики шагающих аппаратов и машин в различных фазах ходьбы.

Ключевые слова: древовидные системы тел, кинетическая энергия, матрица инерционных коэффициентов, выписывание формул, направляющие косинусы, манипуляционные роботы

Для цитирования: Телегин А.И. Выписывание инерционных матриц шарнирных древовидных систем // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2025. Т. 25, № 2. С. 33–45. DOI: 10.14529/ctcr250203

Original article
DOI: 10.14529/ctcr250203

WRITING OUT INERTIAL MATRICES OF HINGED TREE-SHAPED SYSTEMS

A.I. Telegin, *teleginai@susu.ru*
South Ural State University, Miass, Russia

Abstract. **The goal** is to develop a formalism (a sequence of formal actions) for deriving formulas for calculating the Elements of the Matrix of Inertial Coefficients (EMIC) of Tree-Like Systems with Open Branches (TSOB), whose bodies form hinges between each other, i. e., rotational kinematic pairs of the fifth class. **Research methods** relate to mechanics of systems of bodies, system analysis, and robotics. **The results of the study** contain a new formalism for automatically deriving EMIC calculation formulas, i. e., coefficients in the products of relative angular velocities of bodies in the expression of kinetic energy of TSOB. EMIC formulas include constant structural, geometric, and inertial parameters of the considered TSOB. These formulas are represented as quadratic forms with respect to the direction cosines between the axes of coordinate systems rigidly connected to the bodies. The effectiveness of the formalism is demonstrated by examples of manual derivation of EMICs for a three-link angular Manipulator Robot (MR) in the vertical plane, two-armed MRs with five and seven degrees of freedom on the plane and in space. For an MR in space, the problem of synthesizing its parameters, for which EMICs do not depend on body rotation angles, has been solved. **Conclusion.** The proposed formalism can be used to derive EMICs for typical angular MRs, as well as walking devices in single-support phase of walking or flight, e. g., to derive dynamic equations based on them in the form of Lagrange's second-order equation. Applying known methods of constraint accounting expands the use of EMICs to TSDB, i. e., to TSOBs with end-body constraints, as well as to TSDBs with variable structure, which is relevant for deriving dynamic equations for walking machines and apparatuses in different phases of motion.

Keywords: tree body systems, kinetic energy, inertial coefficient matrix, formula writing, directional cosines, manipulation robots

For citation: Telegin A.I. Writing out inertial matrices of hinged tree-shaped systems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2025;25(2):33–45. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr250203

Введение

ЭМИК являются коэффициентами при произведениях обобщенных скоростей в выражении кинетической энергии системы тел. Они используются для решения различных задач динамики, управления и синтеза систем тел с заданными свойствами [1–4]. Вывод ЭМИК со многими подвижными телами является сложным и громоздким процессом [5, 6]. Поэтому автоматизация процесса вывода формул вычисления ЭМИК в явном аналитическом виде с минимальным числом арифметических операций (сложений и умножений) является актуальной задачей. Особый интерес представляют формализмы выписывания ЭМИК. Под формализмом выписывания понимается последовательность формальных действий конкретизации общих формул к виду, который соответствует рассматриваемой конкретной системе тел. Поиск простых формализмов выписывания уравнений математических моделей систем тел лежит на пути рассмотрения их классов и отдельных этапов (подпроцессов) вывода формул. Например, шарнирные системы тел охватывают многие ангулярные МР [7, 8], а также двуногие шагающие аппараты [9, 10] и шагающие машины, имеющие 4, 6 и более ног [11, 12]. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода состоит из трех этапов [13, 14]. На первом выводится выражение Лагранжиана, т. е. разность кинетической и потенциальной энергий. На втором этапе вычисляются частные производные от Лагранжиана по обобщенным координатам и скоростям. На третьем этапе вычисляются производные по времени от выражений частных производных по каждой обобщенной скорости. Для систем тел с тремя и более телами каждый из этих этапов требует громоздкой вычислительной работы [5]. Поэтому автоматизация этих процессов является актуальной задачей. Важно также, во-первых, представлять выведенные выражения в оптимальном виде, т. е. содержащем минимальное число арифметических операций. Во-вторых, в конечных выражениях уравнений динамики желательно в явном виде представить центробежные и Кориолисовы инерционные силы, а также выделить из них гироскопические составляющие. Последняя задача решена в статье [15], в которой выражения ЭМИК считались известными. В настоящей статье этот недостаток для рассматриваемых ДСТОВ устранен.

Постановка задачи. Для шарнирных ДСТОВ разработать формализм выписывания оптимальных (в смысле минимума арифметических операций) формул вычисления ЭМИК, имеющих аналитический вид с явно выраженными структурными, кинематическими и массо-инерционными параметрами.

1. Используемые понятия и обозначения

Неподвижное тело, образующее шарнир с телом ДСТОВ, назовем основанием (станиной, стойкой, опорой, землей). От каждого выбранного тела ДСТОВ существует единственный путь (последовательность шарнирно связанных тел) до основания. Тела этого пути назовем несущими для выбранного тела. Каждое тело имеет единственное базовое тело (базу), т. е. первое тело на пути к основанию. Поворот тела относительно своей базы называют относительным. Точка, выбранная на оси относительного поворота тела, называется полюсом этого тела. Множество тел, от которых путь до основания проходит через выбранное тело, назовем несомыми телами для выбранного тела. Тело вместе со своими несомыми телами назовем подсистемой. Множество тел, для которых базой является выбранное тело, назовем смежными телами для выбранного тела. Если для выбранного тела в полюсах его смежных тел мысленно разместить массы их подсистем, то получим дополненное тело (ДТ). Условимся различать тела по их номерам. Если после аббревиатуры в круглых скобках записано натуральное число или его обозначение, т. е. буква i, j или k, то это номер тела.

В общих формулах выписывания ЭМИК используются следующие обозначения: N – количество подвижных тел и номер последнего тела; m_{oi} – масса и обозначение тела с номером i; m_i – масса и обозначение i-й подсистемы; q_i – угол относительного поворота тела m_{oi}; $\boldsymbol{q}_i$ – орт оси относительного вращения тела m_{oi}; O_i – полюс тела m_{oi}; СКТ – система координа тела, т. е. система координат, жестко связанная с телом; $O_i\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}_i$ – правая СКТ(i); $L_i = O_{i-1}O_i \ge 0$ – i-е межполюсное расстояние; $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{O}_{i-1}\boldsymbol{O}_i/L_i$ – i-й межполюсный орт, направленный из полюса O_{i-1} в полюс O_i; C_i – центр масс тела m_{oi} (ЦМ(i)); S_i – множество номеров тел, смежных телу m_{oi}; ДТ(i) – тело m_{oi}, дополненное массами m_j, мысленно сосредоточенными в полюсах O_j, где $j \in S_i$; C_{di} – ЦМ ДТ(i); $\boldsymbol{m}_i$ – статический момент подсистемы m_i относительно полюса O_i; I_i^x – момент инерции тела m_{oi} относительно оси $O_i\boldsymbol{x}_i$; I_i^y – момент инерции тела m_{oi} относительно оси $O_i\boldsymbol{y}_i$; I_i^z – момент инерции тела m_{oi} относительно оси $O_i\boldsymbol{z}_i$; I_i^{xy}, I_i^{xz}, I_i^{yz} – центробежные моменты инерции тела m_{oi}; $x_{ji}^q = \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{q}_i$, $y_{ji}^q = \boldsymbol{y}_j \cdot \boldsymbol{q}_i$, $z_{ji}^q = \boldsymbol{z}_j \cdot \boldsymbol{q}_i$ – направляющие косинусы (НК) орта $\boldsymbol{q}_i$ в СКТ(j); $q_{ji}^q = \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{q}_i$, $e_{ji}^q = q_{ij}^e = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{q}_i$, $x_{ji}^x = \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{x}_i$, $x_{ji}^y = \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{y}_i$, ..., $z_{ji}^z = \boldsymbol{z}_j \cdot \boldsymbol{z}_i$, $x_{ji}^e = \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{e}_i$, $y_{ji}^e = \boldsymbol{y}_j \cdot \boldsymbol{e}_i$, $z_{ji}^e = \boldsymbol{z}_j \cdot \boldsymbol{e}_i$, $m_{ji}^e = \boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{e}_i$ – проекция вектора $\boldsymbol{m}_j$ на ось $O_i\boldsymbol{e}_i$.

В формулах выписывания ЭМИК используются следующие знаки суммирования на древовидных структур данных (на деревьях) [5]:

$\sum_{j\in S_i} f_j$ – знак суммирования величины f_j по номерам тел, смежных телу m_{oi};

$\sum_{j\in \overline{n}_i} f_j$ – знак суммирования величины f_j по номерам тел подсистемы m_i;

$\sum_{j\in n_i} f_j = \sum_{j\in \overline{n}_i} f_j - f_i$;

$\sum_{j,i+1}^{k} f_j$ – знак суммирования величины f_j по номерам тел, несущих тело m_{ok}, начиная от тела m_{oi+1} и заканчивая телом m_{ok};

Из утверждения 5 учебного пособия [5] следует, что координаты ЦМ ДТ(i) в СКТ(i) вычисляются по формулам:

$$d_{xi} = m_{oi}x_{ci} + \textstyle\sum_{j\in S_i} m_jL_je_{ji}^x,\ \ d_{yi} = m_{oi}y_{ci} + \sum_{j\in S_i} m_jL_je_{ji}^y,\ \ d_{zi} = m_{oi}z_{ci} + \sum_{j\in S_i} m_jL_je_{ji}^z, \quad (1)$$

где x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} – координаты ЦМ(i) в СКТ(i); e_{ji}^x, e_{ji}^y, e_{ji}^z – проекции орта $\overline{e}_j$ на оси СКТ(i).

2. Общие формулы выписывания ЭМИК

В общих формулах выписывания ЭМИК используется обозначение

$$J_{kji} = I_k^x x_{kj}^q x_{ki}^q + I_k^y y_{kj}^q y_{ki}^q + I_k^z z_{kj}^q z_{ki}^q -$$
$$-I_k^{xy}(x_{kj}^q y_{ki}^q + y_{kj}^q x_{ki}^q) - I_k^{xz}(x_{kj}^q z_{ki}^q + z_{kj}^q x_{ki}^q) - I_k^{yz}(y_{kj}^q z_{ki}^q + z_{kj}^q y_{ki}^q).$$

В процессе практического использования обратной рекуррентной формулы (ОРФ) типа $a_i = b_i + \sum_{j\in S_i}(d_j + a_j)$, где b_i, d_j – обозначения произвольных выражений, следует менять индекс i, начиная с концевых тел ДСТОВ, и если m_{ok} – концевое тело, то S_k – пустое множество, т. е. $a_k = b_k$.

Утверждение 1. ЭМИК ДСТОВ можно выписывать по формуле

$$H_{ji} = J_{ji}^s + J_j^o q_{ji}^q + \textstyle\sum_{k,i+1}^{j} L_k(q_{ji}^q m_{jk}^e - m_{ji}^q q_{jk}^e) - \sum_{k\in n_j} L_k[e_{kj}^q(m_kL_ke_{ki}^q + m_{ki}^q) + e_{ki}^q m_{kj}^q], \quad (2)$$

где $1 \le i \le j \le N$, $J_{ji}^s = \sum_{k\in \overline{n}_j} J_{kji}$. Справедлива ОРФ

$$J_i^o = \textstyle\sum_{j\in S_i}\left(m_jL_j^2 + 2L_jm_{jj}^e + J_j^o\right), \quad (3)$$

и для любого символа ξ, принимающего значение из множества символов $\{q, e, x, y, z\}$, имеет место ОРФ

$$m_{ji}^{\xi} = d_{xj}x_{ji}^{\xi} + d_{yj}y_{ji}^{\xi} + d_{zj}z_{ji}^{\xi} + \sum_{k\in S_j} m_{ki}^{\xi}. \quad (4)$$

Диагональные ЭМИК выписываются по формуле

$$H_{ii} = J_i^s + J_i^o - \sum_{j\in n_i} L_j e_{ji}^q (m_j L_j e_{ji}^q + 2m_{ji}^q), \quad (5)$$

где $1 \le i \le N$ и с учетом обозначений $I_{zj}^x = I_j^x - I_j^z$, $I_{zj}^y = I_j^y - I_j^z$,

$$J_i^s = \sum_{j\in \overline{n}_i} [I_j^z + I_{zj}^x x_{ji}^{q2} + I_{zj}^y y_{ji}^{q2} - 2(I_j^{xy} x_{ji}^q y_{ji}^q + I_j^{xz} x_{ji}^q z_{ji}^q + I_j^{yz} y_{ji}^q z_{ji}^q)]. \quad (6)$$

Доказательство. С учетом обозначений

$$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{O}_{k-1}\boldsymbol{O}_k = L_k \boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{R}_{ij} = \boldsymbol{O}_i\boldsymbol{O}_j = \sum_{k,i+1}^{j} \boldsymbol{R}_k,$$

$$R_{ki}^q = \boldsymbol{R}_k \cdot \boldsymbol{q}_i = L_k \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{q}_i = L_k e_{ki}^q,\ m_{ji}^q = \boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{q}_i,\ m_{jk}^e = \boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{e}_k$$

из формулы (2) утверждения 16 учебного пособия [5] следует, что для ДСТОВ ЭМИК вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} H_{ji} &= J_{ji}^s + \boldsymbol{q}_i \cdot (\boldsymbol{q}_j \boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{q}_j) \cdot \boldsymbol{R}_{ij} + \sum_{k\in n_j} [m_k (R_k^2 \boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{q}_j - R_{kj}^q R_{ki}^q) + \\ &+ (2\boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{q}_j \boldsymbol{R}_k - R_{kj}^q \boldsymbol{q}_i - R_{ki}^q \boldsymbol{q}_j) \cdot \boldsymbol{m}_k] = J_{ji}^s + \sum_{k,i+1}^{j} (q_{ji}^q \boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{R}_k - m_{ji}^q \boldsymbol{q}_j \cdot \boldsymbol{R}_k) + \\ &+ \sum_{k\in n_j} \left[m_k L_k^2 \left(q_{ji}^q - e_{kj}^q e_{ki}^q\right) + L_k \left(2q_{ji}^q m_{kk}^e - e_{kj}^q m_{ki}^q - e_{ki}^q m_{kj}^q\right)\right] = \\ &= J_{ji}^s + \sum_{k,i+1}^{j} L_k \left(q_{ji}^q m_{jk}^e - m_{ji}^q e_{kj}^q\right) + \sum_{k\in n_j} [L_k q_{ji}^q (m_k L_k + 2m_{kk}^e) - \\ &- L_k (m_k L_k e_{kj}^q e_{ki}^q + e_{kj}^q m_{ki}^q + e_{ki}^q m_{kj}^q)], \end{aligned}$$

где $1 \le i \le j \le N$. Отсюда, используя обозначение $J_j^o = \sum_{k\in n_j} (m_k L_k^2 + 2L_k m_{kk}^e)$ и формулу (5) раздела 3 учебного пособия [5], получим ОРФ (3) и искомую формулу (2).

Используя формулу (1) из формулы (11) утверждения 5 учебного пособия [5], получим ОРФ (4).

Диагональные ЭМИК выписываются по формуле (2) в случае $j = i$, которая с учетом равенства $q_{ii}^q = 1$ принимает искомый вид (5).

Из обозначения J_{kji} в случае $i = j$ получим

$$J_{kjj} = I_k^x x_{kj}^{q2} + I_k^y y_{kj}^{q2} + I_k^z z_{kj}^{q2} - 2(I_k^{xy} x_{kj}^q y_{kj}^q + I_k^{xz} x_{kj}^q z_{kj}^q + I_k^{yz} y_{kj}^q z_{kj}^q).$$

Отсюда с учетом тождества $x_{ji}^{q2} + y_{ji}^{q2} + z_{ji}^{q2} = q_{ij}^{x2} + q_{ij}^{y2} + q_{ij}^{z2} = 1$ получим $z_{ji}^{q2} = 1 - x_{ji}^{q2} - y_{ji}^{q2}$. Следовательно, используя обозначение $J_{ji}^c = 2(I_j^{xy} x_{ji}^q y_{ji}^q + I_j^{xz} x_{ji}^q z_{ji}^q + I_j^{yz} y_{ji}^q z_{ji}^q)$, получим

$$\begin{aligned} J_i^s &= J_{ii}^s = \sum_{j\in \overline{n}_i} J_{jii} = \sum_{j\in \overline{n}_i} (I_j^x x_{ji}^{q2} + I_j^y y_{ji}^{q2} + I_j^z z_{ji}^{q2} - J_{ji}^c) = \\ &= \sum_{j\in \overline{n}_i} [I_j^x x_{ji}^{q2} + I_j^y y_{ji}^{q2} + I_j^z (1 - x_{ji}^{q2} - y_{ji}^{q2}) - J_{ji}^c] = \sum_{j\in \overline{n}_i} (I_j^z + I_{zj}^x x_{ji}^{q2} + I_{zj}^y y_{ji}^{q2} - J_{ji}^c), \end{aligned}$$

что доказывает формулу (6). *Утверждение доказано.*

Если у ДСТОВ оси вращения соседних тел параллельны, то для выписывания поддиагональных ЭМИК рекомендуем использовать

Утверждение 2. Если $\boldsymbol{q}_{i-1} = \boldsymbol{q}_i$, то

$$H_{j,i-1} = H_{ji} + L_i (q_{ji}^q m_{ji}^e - q_{ji}^e m_{ji}^q). \quad (7)$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{q}_{i-1} = \boldsymbol{q}_i$, то $q_{ji-1}^q = q_{ji}^q$, $m_{ji-1}^q = m_{ji}^q$, $e_{ji-1}^q = e_{ji}^q$ и по формуле (2) имеем

$$\begin{aligned} H_{j,i-1} &= J_{j,i-1}^s + J_j^o q_{ji}^q + \sum_{k,i}^{j} L_k (q_{ji}^q m_{jk}^e - m_{ji}^q q_{jk}^e) - \sum_{k\in n_j} L_k [e_{kj}^q (m_k L_k e_{ki}^q + m_{ki}^q) + e_{ki}^q m_{kj}^q] = \\ &= J_{j,i-1}^s + H_{ji} - J_{ji}^s + L_i (q_{ji}^q m_{ji}^e - m_{ji}^q q_{ji}^e). \end{aligned}$$

Если $\boldsymbol{q}_{i-1} = \boldsymbol{q}_i$, то $x_{ki-1}^q = x_{ki}^q$, $y_{ki-1}^q = y_{ki}^q$, $z_{ki-1}^q = z_{ki}^q$ и, следовательно, $J_{kji-1} = J_{kji}$. Тогда $J_{j,i-1}^s - J_{ji}^s = 0$ и последнее выражение $H_{j,i-1}$ принимает искомый вид (7). *Утверждение доказано.*

Известны классы ДСТОВ, в которых для некоторых тел орты осей вращения всех их смежных тел совпадают с ортом оси вращения базового тела. Например, к таким ДСТОВ относятся некоторые многорукие МР, а также шагающие машины. Для систем тел на плоскости все тела имеют это свойство. Для таких систем тел рекомендуем использовать

Утверждение 3. Если $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_j$, где $j \in S_i$, то

$$H_{ii} = I_i^d + \sum_{j\in S_i} [H_{jj} + 2L_j(m_{jj}^e - e_{jj}^q m_{jj}^q)], \tag{8}$$

где $I_i^d = J_{iii} + \sum_{j\in S_i} m_j L_j^2 (1 - e_{jj}^{q2}) = \text{const}$.

Доказательство. На деревьях имеет место очевидная формула [5]

$$\sum_{j\in n_i} a_{ji} = \sum_{k\in S_i} \sum_{j\in \overline{n}_k} a_{ji}, \tag{9}$$

где a_{ji} – произвольное слагаемое. Если $a_{ji} = L_j e_{ji}^q (m_j L_j e_{ji}^q + 2m_{ji}^q)$ и $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_k$ для $k \in S_i$, то $a_{ji} = a_{jk}$ и формула (5) представима в виде

$$H_{ii} = J_i^s + J_i^o - \sum_{j\in n_i} a_{ji} = J_i^s + J_i^o - \sum_{k\in S_i}\sum_{j\in\overline{n}_k} a_{jk} = J_i^s + J_i^o - \sum_{k\in S_i} \left(a_{kk} + \sum_{j\in n_k} a_{jk}\right) =$$
$$= J_i^s + J_i^o - \sum_{k\in S_i} a_{kk} + \sum_{k\in S_i} (-J_k^s - J_k^o + J_k^s + J_k^o - \sum_{j\in n_k} a_{jk}) =$$
$$= J_i^s + J_i^o - \sum_{k\in S_i} (a_{kk} + J_k^s + J_k^o) + \sum_{k\in S_i} H_{kk}.$$

По обозначениям величин J_{kji}, J_i^s и с использованием формул (9), $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_k$ для $k \in S_i$ получим $J_{jii} = J_{jkk}$. Следовательно,

$$J_i^s = \sum_{j\in\overline{n}_i} J_{jii} = J_{iii} + \sum_{j\in n_i} J_{jii} = J_{iii} + \sum_{k\in S_i}\sum_{j\in\overline{n}_k} J_{jii} = J_{iii} + \sum_{k\in S_i}\sum_{j\in\overline{n}_k} J_{jkk} =$$
$$= J_{iii} + \sum_{k\in S_i} J_k^s.$$

Отсюда $J_i^s - \sum_{k\in S_i} J_k^s = J_{iii}$.

По формуле (3) имеем $J_i^o - \sum_{k\in S_i} J_k^o = \sum_{k\in S_i} (m_k L_k^2 + 2L_k m_{kk}^e)$.

Таким образом, последнее выражение H_{ii} принимает вид

$$H_{ii} = \sum_{k\in S_i} H_{kk} + J_{iii} + \sum_{k\in S_i} (m_k L_k^2 + 2L_k m_{kk}^e) - \sum_{k\in S_i} e_{kk}^q (m_k L_k^2 e_{kk}^q + 2L_k m_{kk}^q) =$$
$$= \sum_{j\in S_i} H_{jj} + J_{iii} + \sum_{j\in S_i} (m_j L_j^2 - m_j L_j^2 e_{jj}^{q2}) + \sum_{j\in S_i} (2L_j m_{jj}^e - 2L_j e_{jj}^q m_{jj}^q).$$

Отсюда следует искомая формула (8). *Утверждение доказано.*

В плоских ДСТОВ (ПДСТОВ) все тела вращаются в параллельных друг другу плоскостях. Будем считать, что плоскость $O\boldsymbol{xy}$ параллельна плоскостям движения тел и она образует с горизонтальной плоскостью угол q, где $0 \le q \le 90^o$. Нормаль к плоскостям движения обозначим через $\boldsymbol{q}$. Тогда $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{e}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$.

Для формального описания ПДСТОВ выберем исходное положение тел и для каждого тела мысленно представим СКТ(i) так, чтобы оси $O_i\boldsymbol{x}_i$, $O_i\boldsymbol{y}_i$ были параллельны осям $O\boldsymbol{x}$, $O\boldsymbol{y}$. В качестве входных данных рассматриваемой ПДСТОВ будем приводить следующие постоянные параметры: $L_i = O_{i-1}O_i$ – i-е межполюсное расстояние; $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{O}_{i-1}\boldsymbol{O}_i/L_i$ – i-й межполюсный орт, выраженный через орты СКТ($i-1$); нулевые значения координат ЦМ(i), т. е. величин x_{ci}, y_{ci}; d_{xi}, d_{yi} – координаты ЦМ ДТ(i) в СКТ(i), вычисляемые по формулам (1); x_{ij}^e, y_{ij}^e – проекции орта $\boldsymbol{e}_j$ на оси СКТ(i), где $j \in S_i$; $I_i^d = I_i^q + \sum_{j\in S_i} m_j L_j^2$ – момент инерции ДТ(i) относительно оси $O_i\boldsymbol{q}$; I_i^q – момент инерции тела m_{oi} относительно оси $O_i\boldsymbol{q}$. В качестве относительного угла поворота тела m_{oi} примем q_i – угол, откладываемый от орта $\boldsymbol{x}_{i-1}$ до орта $\boldsymbol{x}_i$. На кинематических схемах ДСТОВ ЦМ(i) будем изображать крестиком, а ЦМ ДТ(i) – звездочкой.

Для ПДСТОВ формулы выписывания ЭМИК значительно упрощаются. Поэтому для ПДСТОВ рекомендуем использовать

Утверждение 4. Для ПДСТОВ справедливы ОРФ:

$$H_{ii} = I_i^d + \sum_{j\in S_i} (H_{jj} + 2L_j m_{jj}^e), \tag{10}$$

$$H_{j,i-1} = H_{ji} + L_i m_{ji}^e, \tag{11}$$

$$m_{ji}^e = d_{xj} x_{ji}^e + d_{yj} y_{ji}^e + \sum_{k\in S_j} m_{ki}^e, \tag{12}$$

где $x_{ji}^e = \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{e}_i$, $y_{ji}^e = \boldsymbol{y}_j \cdot \boldsymbol{e}_i$.

Доказательство. Для ПДСТОВ $e_{jj}^q = 0$, $q_{ji}^e = 0$, $z_{ji}^e = 0$, $q_{ji}^q = 1$. Следовательно, формулы (8), (7), (4) принимают искомые виды (10), (11), (12), где $I_i^d = J_{iii} + \sum_{j\in S_i} m_j L_j^2$, $J_{iii} = I_i^q$. *Утверждение доказано.*

Для демонстрации эффективности использования утверждений 1–4 рассмотрим примеры.

3. Выписывание ЭМИК ангулярного МР в вертикальной плоскости на рис. 1

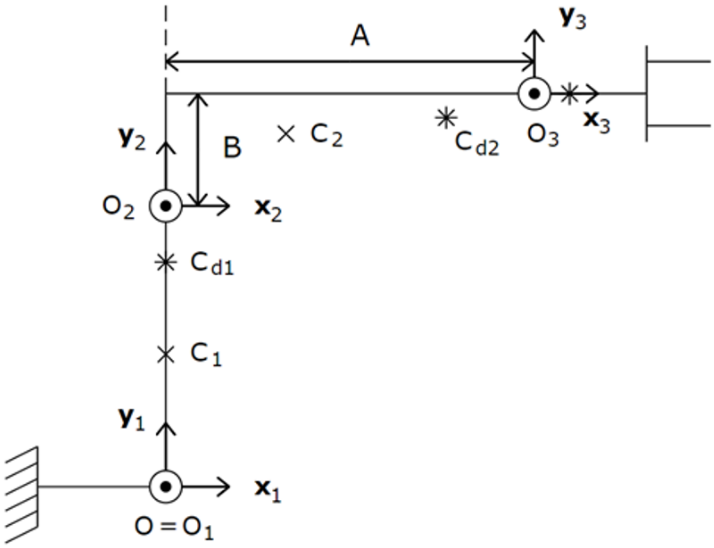

Рис.1. Ангулярный МР в вертикальной плоскости
Fig. 1. Angular MR in vertical plane

Для рассматриваемого МР $q = 90^o$, $N = 3$, $L_2 = O_1O_2$, $L_3 = O_2O_3 = \sqrt{A^2 + B^2}$, $I_3^d = I_3^q$, $I_2^d = I_2^q + m_3L_3^2$, $I_1^d = I_1^q + m_2L_2^2$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{O_2O_3}}{L_3} = \frac{Ax_2+By_2}{L_3} = a\boldsymbol{x}_2 + b\boldsymbol{y}_2$, где $a = \frac{A}{L_3}$, $b = \frac{B}{L_3}$,

$$x_{c1} = 0,\ \ y_{c3} = 0,\ \ x_{12}^e = 0,\ \ y_{12}^e = 1,\ \ x_{23}^e = a,\ \ y_{23}^e = b. \qquad (13)$$

По ОРФ (10) выпишем

$H_{33} = I_3^d = I_3^q$, $H_{22} = I_2^d + H_{33} + 2L_3m_{33}^e$, $H_{11} = I_1^d + H_{22} + 2L_2m_{22}^e$.

По ОРФ (11) выпишем

$H_{32} = H_{33} + L_3m_{33}^e$, $H_{31} = H_{32} + L_2m_{32}^e$, $H_{21} = H_{22} + L_2m_{22}^e$.

По формулам

$$d_{xi} = m_{oi}x_{ci} + \sum_{j\in S_i} m_jL_jx_{ij}^e,\ \ \ d_{yi} = m_{oi}y_{ci} + \sum_{j\in S_i} m_jL_jy_{ij}^e, \qquad (14)$$

с учетом равенств (13) выпишем

$d_{x3} = m_{o3}x_{c3}$, $d_{y3} = 0$, $d_{x2} = m_{o2}x_{c2} + m_3L_3a$, $d_{y2} = m_{o2}y_{c2} + m_3L_3b$.

Отсюда по ОРФ (12) выпишем $m_{33}^e = d_{x3}x_{33}^e$, $m_{32}^e = d_{x3}x_{32}^e$, $m_{22}^e = d_{x2}x_{22}^e + d_{y2}y_{22}^e + m_{32}^e$, где с учетом обозначений

$$s_i = \sin(q_i),\ \ \ c_i = \cos(q_i),\ \ \ s_{ij} = \sin(q_i + q_j),\ \ \ c_{ij} = \cos(q_i + q_j) \qquad (15)$$

получим $x_{32}^e = x_{31}^y = s_{23}$, $x_{22}^e = x_{21}^y = s_2$, $y_{22}^e = y_{21}^y = c_2$,

$x_{33}^e = \boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{x}_3 \cdot (a\boldsymbol{x}_2 + b\boldsymbol{y}_2) = ax_{32}^x + bx_{32}^y = ac_3 + bs_3$.

Таким образом, искомые формулы выстраиваются в следующую последовательность:

$H_{33} = I_3^q$, $m_{33}^e = d_{x3}(ac_3 + bs_3)$, $H_{22} = I_2^d + H_{33} + 2L_3m_{33}^e$,

$m_{32}^e = d_{x3}s_{23}$, $m_{22}^e = d_{x2}s_2 + d_{y2}c_2 + m_{32}^e$, $H_{11} = I_1^d + H_{22} + 2L_2m_{22}^e$,

$H_{32} = H_{33} + L_3m_{33}^e$, $H_{31} = H_{32} + L_2m_{32}^e$, $H_{21} = H_{22} + L_2m_{22}^e$,

в которой уменьшить количество операций сложения и умножения можно только за счет введения обозночений для произведений постоянных входных параметров МР. Например, если

$I = I_2^d + I_3^q$, $L_2m_{32}^e = L_2d_{x3}s_{23} = L_ss_{23}$, $I_{c3} = L_3m_{33}^e = L_3d_{x3}(ac_3 + bs_3) = L_ac_3 + L_bs_3$,

$I_{c2} = L_2m_{22}^e = L_2(d_{x2}s_2 + d_{y2}c_2 + d_{x3}s_{32}) = L_ds_2 + L_cc_2 + L_ss_{32}$,

где $L_a = L_3d_{x3}a$, $L_b = L_3d_{x3}b$, $L_c = L_2d_{y2}$, $L_d = L_2d_{x2}$, $L_s = L_2d_{x3}$ – константы, то вычисляемая ЭМИК оптимальная последовательность имеет вид

$H_{33} = I_3^q$, $I_{c3} = L_ac_3 + L_bs_3$, $H_{22} = I + 2I_{c3}$, $I_s = L_ss_{23}$, $I_{c2} = L_ds_2 + L_cc_2 + I_s$,

$H_{11} = I_1^d + H_{22} + 2I_{c2}$, $H_{32} = H_{33} + I_{c3}$, $H_{31} = H_{32} + I_s$, $H_{21} = H_{22} + I_{c2}$

и содержит 9 сложений и 7 умножений. Если использовать представления $2I_{c2} = I_{c2} + I_{c2}$ и $2I_{c3} = I_{c3} + I_{c3}$, то вычисляемая последовательность будет содержать 11 сложений и 5 умножений.

4. Выписывание ЭМИК двухрукого МР в горизонтальной плоскости

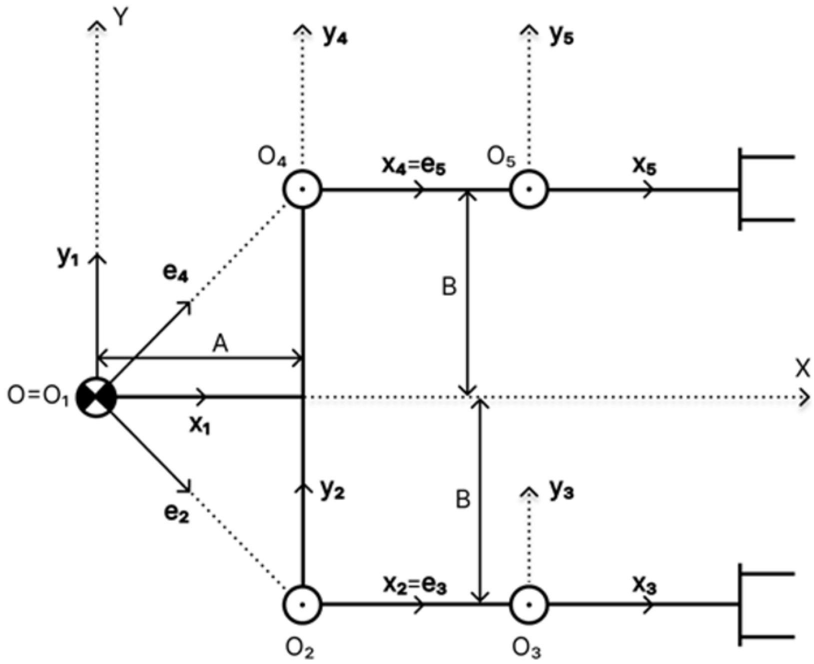

Рис. 2. Двурукий ангулярный МР в горизонтальной плоскости
Fig. 2. Two-hand angular MR in horizontal plane

На рис. 2 изображен двурукий МР, для которого $q = 0$, $N = 5$, $L_2 = O_1O_2 = \sqrt{A^2 + B^2}$, $L_3 = O_2O_3$, $L_4 = O_1O_4 = L_2$, $L_5 = O_4O_5 = L_3$, $I_3^d = I_3^q$, $I_5^d = I_5^q$, $I_2^d = I_2^q + m_3L_3^2$, $I_4^d = I_4^q + m_5L_5^2$, $I_1^d = I_1^q + m_2L_2^2 + m_4L_4^2$, $\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{e}_4 = \frac{\boldsymbol{O_1O_4}}{L_2} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{O_1O_2}}{L_2} = \frac{Ax_1 - By_1}{L_2} = a\boldsymbol{x}_1 - b\boldsymbol{y}_1$, где $a = \frac{A}{L_2}$, $b = \frac{B}{L_2}$,

$$y_{ci} = 0, (i = 1,2,3,4,5), \quad x_{45}^e = x_{44}^x = 1, \quad y_{45}^e = 0, \quad x_{23}^e = x_{22}^x = 1, \quad y_{23}^e = y_{22}^x = 0. \qquad (16)$$

По ОРФ (10) выпишем

$$H_{33} = I_3^d = I_3^q, H_{55} = I_5^d = I_5^q, H_{22} = I_2^d + H_{33} + 2L_3m_{33}^e, H_{44} = I_4^d + H_{55} + 2L_5m_{55}^e,$$
$$H_{11} = I_1^d + H_{22} + 2L_2m_{22}^e + H_{44} + 2L_4m_{44}^e = I_1^d + H_{22} + H_{44} + 2L_2(m_{22}^e + m_{44}^e).$$

По ОРФ (11) выпишем

$$H_{32} = H_{33} + L_3m_{33}^e, H_{31} = H_{32} + L_2m_{32}^e, H_{21} = H_{22} + L_2m_{22}^e,$$
$$H_{54} = H_{55} + L_5m_{55}^e, H_{51} = H_{54} + L_4m_{54}^e, H_{41} = H_{44} + L_4m_{44}^e.$$

Здесь учтено, что базой тела m_{o4} является тело m_{o1} и, следовательно, для $i = 4$ имеет место равенство $H_{j,i-1} = H_{j1}$.

По формуле (14) с учетом (16) выпишем

$$d_{x3} = m_{o3}x_{c3}, \ d_{y3} = 0, \ d_{x2} = m_{o2}x_{c2} + m_3L_3, \ d_{y2} = 0.$$

Отсюда по ОРФ (12) выпишем $m_{33}^e = d_{x3}x_{33}^e$, $m_{32}^e = d_{x3}x_{32}^e$, $m_{22}^e = d_{x2}x_{22}^e + m_{32}^e$. Отсюда с учетом выражений

$$x_{33}^e = x_{32}^x = c_3, \ x_{32}^e = \boldsymbol{x}_3 \cdot (a\boldsymbol{x}_1 - b\boldsymbol{y}_1) = ax_{31}^x - bx_{31}^y = ac_{23} - bs_{23},$$
$$x_{22}^e = \boldsymbol{x}_2 \cdot (a\boldsymbol{x}_1 - b\boldsymbol{y}_1) = ax_{21}^x - bx_{21}^y = ac_2 - bs_2,$$

получим $m_{33}^e = d_{x3}c_3, m_{32}^e = d_{x3}(ac_{23} - bs_{23}), m_{22}^e = d_{x2}(ac_2 - bs_2) + m_{32}^e$.

Аналогично

$$m_{55}^e = d_{x5}c_5, \ m_{54}^e = d_{x5}x_{54}^e, \ x_{54}^e = \boldsymbol{x}_5 \cdot (a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{y}_1) = ax_{51}^x + bx_{51}^y = ac_{45} + bs_{45},$$
$$m_{54}^e = d_{x5}(ac_2 - bs_2), \ m_{44}^e = d_{x4}x_{44}^e + m_{54}^e, \ x_{44}^e = \boldsymbol{x}_4 \cdot (a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{y}_1) = ac_4 + bs_4.$$

Таким образом, искомые формулы выстраиваются в следующую последовательность:

$H_{33} = I_3^q,\ m_{33}^e = d_{x3}c_3,\ H_{22} = I_2^d + H_{33} + 2L_3 m_{33}^e,$

$m_{32}^e = d_{x3}s_{23},\ m_{22}^e = d_{x2}(ac_2 - bs_2) + m_{32}^e,$

$H_{32} = H_{33} + L_3 m_{33}^e,\ H_{31} = H_{32} + L_2 m_{32}^e,\ H_{21} = H_{22} + L_2 m_{22}^e,$

$H_{55} = I_3^q,\ m_{55}^e = d_{x5}c_5,\ H_{44} = I_4^d + H_{55} + 2L_5 m_{55}^e,$

$m_{54}^e = d_{x5}s_{45},\ m_{44}^e = d_{x4}(ac_4 + bs_4) + m_{54}^e,$

$H_{54} = H_{55} + L_5 m_{55}^e,\ H_{51} = H_{54} + L_4 m_{54}^e,\ H_{41} = H_{44} + L_4 m_{44}^e,$

$H_{11} = I_1^d + H_{22} + H_{44} + 2L_4(m_{22}^e + m_{44}^e).$

5. Синтез двурукого МР с линейными уравнениями динамики

Выпишем формулы вычисления ЭМИК ДСТОВ на рис. 3, из анализа которых найдем необходимые и достаточные условия, обеспечивающие этим ЭМИК постоянные значения.

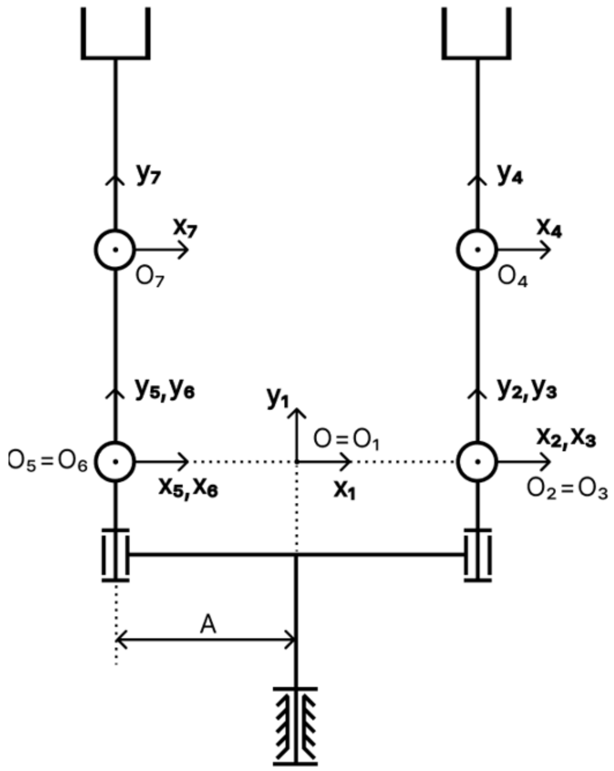

Рис. 3. Двурукий ангулярный МР
Fig. 3. Two-hand angular MR

На кинематической схеме МР тела изображены в их исходных относительных положениях, т. е. когда углы q_i равны нулю.

Из формул (2), (3), (5) видно, что чем больше межполюсных расстояний равно нулю, тем проще формулы вычисления ЭМИК. Поэтому, вводя полюса тел, рекомендуется максимально их совмещать. Например, если оси вращения соседних тел пересекаются в одной точке, то эту точку следует принять за полюсы этих тел. В исходных положениях тел оси $O_i\boldsymbol{x}_i$, $O_i\boldsymbol{y}_i$, $O_i\boldsymbol{z}_i$ направлены параллельно соответствующим осям правой неподвижной системы координат, в которой ось $O\boldsymbol{x}$ направлена горизонтально вправо, а ось $O\boldsymbol{y}$ вертикально вверх. Поэтому оси СКТ на рисунках можно не изображать. В качестве формального описания ДСТОВ достаточно записать выражения орт $\boldsymbol{q}_i$ и $\boldsymbol{e}_i$ через орты СКТ.

Для МР на рис. 3 имеем $N = 7$, $L_1 = OO_1 = 0$, $L_2 = O_1O_2 = O_1O_5 = L_5$, $L_3 = O_2O_3 = O_5O_6 = L_6 = 0$, $L_4 = O_3O_4 = O_6O_7 = L_7$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{y}_3$, $\boldsymbol{e}_5 = -\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{e}_7 = \boldsymbol{y}_6$, $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_2$, $\boldsymbol{q}_4 = \boldsymbol{z}_4 = \boldsymbol{z}_3$, $\boldsymbol{q}_5 = \boldsymbol{y}_5 = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{q}_6 = \boldsymbol{z}_6 = \boldsymbol{z}_5$, $\boldsymbol{q}_7 = \boldsymbol{z}_7 = \boldsymbol{z}_6$.

По формулам (3), (5), учитывая, что S_4, n_4 – пустые множества, выпишем $J_4^o = 0$, $H_{44} = J_4^s + J_4^o = J_4^s$. По формуле (6) выпишем

$$J_4^s = I_4^z + I_{z4}^x x_{44}^{q2} + I_{z4}^y y_{44}^{q2} - 2(I_4^{xy} x_{44}^q y_{44}^q + I_4^{xz} x_{44}^q z_{44}^q + I_4^{yz} y_{44}^q z_{44}^q).$$

Отсюда с учетом равенств $x_{44}^q = x_{44}^z = 0$, $y_{44}^q = y_{44}^z = 0$, $z_{44}^q = z_{44}^z = 1$ получим $J_4^s = I_4^z$. Таким образом, $H_{44} = I_4^z$.

Учитывая, что $\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{q}_4$ по формуле (8), выпишем $H_{33} = I_3^d + H_{44} + 2L_4(m_{44}^e - e_{44}^q m_{44}^q)$, где $e_{44}^q = y_{33}^z = 0$, т. е. $H_{33} = I_3^d + I_4^z + 2L_4 m_{44}^e$. По формуле (4) выпишем $m_{44}^e = m_{43}^y = d_{x4} x_{43}^y + d_{y4} y_{43}^y + d_{z4} z_{43}^y$. Отсюда, учитывая равенства $x_{43}^y = \sin(q_4) = s_4$, $y_{43}^y = \cos(q_4) = c_4$, $z_{43}^y = 0$, получим $m_{44}^e = d_{x4} s_4 + d_{y4} c_4$. Таким образом, $H_{33} = I_3^d + I_4^z + 2L_4(d_{x4} s_4 + d_{y4} c_4)$. Отсюда следует, что необходимыми и достаточными условиями независимости H_{33} от угла q_4 являются следующие равенства:

$$d_{x4} = d_{y4} = 0, \tag{17}$$

т. е. ЦМ ДТ(4) должен лежать на оси $O_4\boldsymbol{z}_4$. При этом $H_{33} = I_3^d + I_4^z = \text{const}$, где $I_3^d = I_3^z + m_4 L_4^2$ – момент инерции ДТ(3) вокруг оси $O_3\boldsymbol{q}_3 = O_3\boldsymbol{z}_3$.

По формуле (5), с учетом равенств $n_2 = \{3, 4\}$, $L_3 = 0$, выпишем

$$H_{22} = J_2^s + J_2^o - L_4 e_{42}^q (m_4 L_4 e_{42}^q + 2m_{42}^q).$$

По ОРФ (3) с учетом (17), т. е. равенства $m_{44}^e = 0$, выпишем $J_2^o = J_3^o = m_4 L_4^2 + 2L_4 m_{44}^e = m_4 L_4^2$. По формуле (4) с учетом (17) выпишем $m_{42}^q = m_{42}^y = d_{z4} z_{42}^y = d_{z4} z_{22}^y = 0$. Таким образом, с учетом равенств $J_2^o = m_4 L_4^2$, $e_{42}^q = y_{32}^y = c_3$ получим $H_{22} = J_2^s + m_4 L_4^2(1 - c_3^2)$. Учитывая равенство $\overline{n}_2 = \{2, 3, 4\}$, формула (6) принимает вид

$$J_2^s = \sum_{j=2}^4 [I_j^z + I_{zj}^x x_{j2}^{q2} + I_{zj}^y y_{j2}^{q2} - 2(I_j^{xy} x_{j2}^q y_{j2}^q + I_j^{xz} x_{j2}^q z_{j2}^q + I_j^{yz} y_{j2}^q z_{j2}^q)].$$

Отсюда, учитывая обозначения (15) и равенства $x_{22}^q = x_{22}^y = 0$, $y_{22}^q = y_{22}^y = 1$, $z_{22}^q = z_{22}^y = 0$, $x_{32}^q = x_{32}^y = s_3$, $y_{32}^q = c_3$, $z_{32}^q = 0$, $x_{42}^y = \sin(q_3 + q_4) = s_{34}$, $y_{42}^q = \cos(q_3 + q_4) = c_{34}$, $z_{42}^q = 0$, получим

$$J_2^s = I_2^z + I_{z2}^y + I_3^z + I_{z3}^x s_3^2 + I_{z3}^y c_3^2 - 2I_3^{xy} s_3 c_3 + I_4^z + I_{z4}^x s_{34}^2 + I_{z4}^y c_{34}^2 - 2I_4^{xy} s_{34} c_{34}.$$

Отсюда с учетом равенств $s_3^2 = 1 - c_3^2$, $s_{34}^2 = 1 - c_{34}^2$ получим

$$H_{22} = I_2^z + I_{z2}^y + I_3^z + I_{z3}^x + m_4 L_4^2 + (I_{z3}^y - I_{z3}^x - m_4 L_4^2)c_3^2 - 2I_3^{xy} s_3 c_3 + I_4^z + I_{z4}^x + (I_{z4}^y - I_{z4}^x)c_{34}^2 - 2I_4^{xy} s_{34} c_{34}.$$

Отсюда с учетом обозначений $I_{zi}^x = I_i^x - I_i^z$, $I_{zi}^y = I_i^y - I_i^z$ получим

$$H_{22} = I_2^y + I_3^x + m_4 L_4^2 + (I_3^y - I_3^x - m_4 L_4^2)c_3^2 - 2I_3^{xy} s_3 c_3 + I_4^x + (I_4^y - I_4^x)c_{34}^2 - 2I_4^{xy} s_{34} c_{34}.$$

Отсюда видно, что необходимыми и достаточными условиями независимости H_{22} от углов q_3, q_4 являются равенства (17) и следующие равенства:

$$I_3^y - I_3^x = m_4 L_4^2, \quad I_4^y = I_4^x, \quad I_3^{xy} = I_4^{xy} = 0, \tag{18}$$

при выполнении которых

$$H_{44} = I_4^z, H_{33} = I_3^d + I_4^z, H_{22} = I_2^y + I_3^x + I_4^x + m_4 L_4^2 = I_2^y + I_3^y + I_4^y$$

– постоянны, т. е. не зависят от углов q_3, q_4.

Подсистемы m_2 и m_5 совпадают. Поэтому необходимыми и достаточными условиями независимости H_{55} и H_{66} от углов q_6, q_7 являются следующие равенства:

$$d_{x7} = d_{y7} = 0, \quad I_6^y - I_6^x = m_7 L_7^2, \quad I_7^y = I_7^x, \quad I_6^{xy} = I_7^{xy} = 0, \tag{19}$$

при выполнении которых $H_{77} = I_7^z$, $H_{66} = I_6^d + I_7^z$, $H_{55} = I_5^y + I_6^x + m_7 L_7^2$ постоянны.

Учитывая равенства $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_5 = \boldsymbol{y}$, по формуле (8) выпишем

$$H_{11} = I_1^d + H_{22} + H_{55} + 2L_2(m_{22}^e - e_{22}^q m_{22}^q) + 2L_5(m_{55}^e - e_{55}^q m_{55}^q),$$

где $e_{22}^q = x_{12}^y = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y} = 0$, $e_{55}^q = -\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y} = 0$, $m_{22}^e = m_{21}^x$, $m_{55}^e = \boldsymbol{m}_5 \cdot (-\boldsymbol{x}_1) = -m_{51}^x$.

Для выписывания выражения m_{21}^x, т. е. проекции статического момента $\boldsymbol{m}_2$ на ось $O_1\boldsymbol{x}_1$, используем ОРФ (4), в которой $\xi = x$, $i = 1$ и j изменяется от значения 4 до значения 2. Для $j = 4$ с учетом (17) выпишем $m_{41}^x = d_{z4}z_{41}^x = d_{z4}z_{21}^x = d_{z4}\sin(q_2) = d_{z4}s_2$. Для $j = 3$ выпишем $m_{31}^x = d_{x3}x_{31}^x + d_{y3}y_{31}^x + d_{z3}z_{31}^x + m_{41}^x$. По табл. 2 учебного пособия [5, с. 155] имеем $x_{31}^x = c_2c_3$, $y_{31}^x = -c_2s_3$, т. е. $m_{31}^x = d_{x3}c_2c_3 - d_{y3}c_2s_3 + d_{z3}s_2 + d_{z4}s_2$. Для $j = 2$ выпишем $m_{21}^x = d_{x2}x_{21}^x + d_{y2}y_{21}^x + d_{z2}z_{21}^x + m_{31}^x$, где $x_{21}^x = c_2$, $y_{21}^x = y_{11}^x = 0$; $z_{21}^x = s_2$, т. е.

$$m_{21}^x = d_{x2}c_2 + d_{z2}s_2 + d_{x3}c_2c_3 - d_{y3}c_2s_3 + d_{z3}s_2 + d_{z4}s_2 =$$
$$= [d_{x2} + (d_{x3}c_3 - d_{y3}s_3)]c_2 + (d_{z2} + d_{z3} + d_{z4})s_2.$$

Аналогично для m_{51}^x выпишем

$$m_{51}^x = d_{x5}c_5 + d_{z5}s_5 + d_{x6}c_5c_6 - d_{y6}c_5s_6 + d_{z6}s_5 + d_{z7}s_5 =$$
$$= [d_{x5} + (d_{x6}c_6 - d_{y6}s_6)]c_5 + (d_{z5} + d_{z6} + d_{z7})s_5.$$

Таким образом, $H_{11} = I_1^d + H_{22} + H_{55} + 2L_2(m_{21}^x - m_{51}^x)$, где по обозначению $I_1^d = \text{const}$ – момент инерции ДТ(1) относительно оси O_1y. Отсюда следует, что необходимыми и достаточными условиями независимости H_{11} от углов q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7 являются равенства (7)–(9), а также следующие равенства:

$$d_{z2} + d_{z3} + d_{z4} = 0,\quad d_{x3} = d_{y3} = d_{x2} = d_{x5} = d_{x6} = d_{y6} = 0,\quad d_{z5} + d_{z6} + d_{z7} = 0, \qquad (20)$$

при выполнении которых $H_{11} = I_1^d + H_{22} + H_{55} = \text{const}$.

Выписывание поддиагональных ЭМИК ДСТОВ осуществляется по формуле (2), и если оси соседних шарниров параллельны, то по формуле (7).

Для $j = 4$, $i - 1 = 3$ по формуле (7) выпишем $H_{43} = H_{44} + L_4(q_{44}^q m_{44}^e - q_{44}^e m_{44}^q)$, где $q_{44}^e = z_{43}^y = z_{33}^y = 0$, $q_{44}^q = 1$ и с учетом условий (17) $m_{44}^e = 0$, т. е. $H_{43} = H_{44}$. Аналогично $H_{76} = H_{77}$.

Для $j = 2$, $i - 1 = 1$ по формуле (7) выпишем $H_{21} = H_{22} + L_2(q_{22}^q m_{22}^e - q_{22}^e m_{22}^q)$, где $q_{22}^e = y_{11}^x = 0$, $q_{22}^q = 1$, $m_{22}^e = m_{21}^x$, т. е. $H_{21} = H_{22} + L_2 m_{21}^x$. При выполнении условий (20) $m_{21}^x = 0$, т. е. $H_{21} = H_{22} = \text{const}$.

Для $j = 5$, $i - 1 = 1$ по формуле (7) выпишем $H_{51} = H_{55} + L_5(q_{55}^q m_{55}^e - q_{55}^e m_{55}^q)$, где $q_{55}^e = -y_{11}^x = 0$, $q_{55}^q = 1$, $m_{55}^e = -m_{51}^x$, т. е. $H_{51} = H_{55} - L_5 m_{51}^x$. При выполнении условий (20) $m_{51}^x = 0$, т. е. $H_{51} = H_{55} = \text{const}$.

Учитывая, что $J_4^o = 0$, $L_3 = 0$ и n_4 – пустое множество, по формуле (2) выпишем

$$H_{42} = J_{42}^s + J_4^o q_{42}^q = J_{42}^s = J_{442} = I_4^x x_{44}^q x_{42}^q + I_4^y y_{44}^q y_{42}^q + I_4^z z_{44}^q z_{42}^q -$$
$$-I_4^{xy}(x_{44}^q y_{42}^q + y_{44}^q x_{42}^q) - I_k^{xz}(x_{44}^q z_{42}^q + z_{44}^q x_{42}^q) - I_k^{yz}(y_{44}^q z_{42}^q + z_{44}^q y_{42}^q).$$

Отсюда с учетом равенств $x_{44}^q = x_{44}^z = 0$, $y_{44}^q = y_{44}^z = 0$, $z_{44}^q = 1$ получим

$$H_{42} = I_4^z z_{42}^q - I_4^{xz} x_{42}^q - I_4^{yz} y_{42}^q,$$

где $z_{42}^q = z_{22}^y = 0$, $x_{42}^q = x_{42}^y = s_{34}$, $y_{42}^q = y_{42}^y = c_{34}$, т. е. $H_{42} = -I_4^{xz}s_{34} - I_4^{yz}c_{34}$. Следовательно, необходимыми и достаточными условиями независимости H_{42} от углов q_3, q_4 являются равенства $I_4^{xz} = I_4^{yz} = 0$.

Аналогично $H_{75} = -I_7^{xz}s_{67} - I_7^{yz}c_{67}$, т. е. необходимыми и достаточными условиями независимости H_{75} от углов q_6, q_7 являются равенства $I_7^{xz} = I_7^{yz} = 0$.

Таким образом, необходимыми и достаточными условиями независимости H_{42}, H_{75} от углов q_3, q_4, q_6, q_7 являются равенства

$$I_4^{xz} = I_4^{yz} = I_7^{xz} = I_7^{yz} = 0, \qquad (21)$$

при выполнении которых $H_{42} = H_{75} = 0$.

Для $j = 4$, $i - 1 = 1$ по формуле (7) выпишем $H_{41} = H_{42} + L_2(q_{42}^q m_{42}^e - q_{42}^e m_{42}^q)$, где $q_{42}^q = z_{22}^y = 0$, $m_{42}^q = m_{42}^y = 0$. Отсюда $H_{41} = H_{42} = 0$. Аналогично $H_{61} = H_{72} = 0$.

Учитывая, что $L_3 = 0$ и $n_3 = \{4\}$, по формуле (2) выпишем

$$H_{32} = J_{32}^s + J_3^o q_{32}^q - L_4[e_{43}^q(m_4 L_4 e_{42}^q + m_{42}^q) + e_{42}^q m_{43}^q].$$

Отсюда с учетом равенств (17) $q_{32}^q = z_{32}^y = z_{22}^y = 0$, $e_{43}^q = y_{33}^z = 0$, $e_{42}^q = y_{32}^y = c_3$, $m_{43}^q = m_{44}^z = d_{z4}z_{44}^z = d_{z4}$ получим $H_{32} = J_{32}^s - L_4 d_{z4} c_3$, где по обозначению

$$J_{32}^{s} = J_{332} + J_{432} = I_3^x x_{33}^q x_{32}^q + I_3^y y_{33}^q y_{32}^q + I_3^z z_{33}^q z_{32}^q - I_3^{xy}(x_{33}^q y_{32}^q + y_{33}^q x_{32}^q) - I_3^{xz}(x_{33}^q z_{32}^q + z_{33}^q x_{32}^q) - I_3^{yz}(y_{33}^q z_{32}^q + z_{33}^q y_{32}^q) + I_4^x x_{43}^q x_{42}^q + I_4^y y_{43}^q y_{42}^q + I_4^z z_{43}^q z_{42}^q - I_4^{xy}(x_{43}^q y_{42}^q + y_{43}^q x_{42}^q) - I_4^{xz}(x_{43}^q z_{42}^q + z_{43}^q x_{42}^q) - I_4^{yz}(y_{43}^q z_{42}^q + z_{43}^q y_{42}^q).$$

Отсюда с учетом равенств $x_{33}^q = x_{33}^z = 0$, $y_{33}^q = y_{33}^z = 0$, $z_{33}^q = z_{33}^z = 1$, $x_{32}^q = x_{32}^y = s_3$, $y_{32}^q = y_{33}^y = c_3$, $z_{32}^q = z_{32}^y = z_{22}^y = 0$, $x_{43}^q = x_{44}^z = 0$, $y_{43}^q = y_{44}^z = 0$, $z_{43}^q = z_{44}^z = 1$, $z_{42}^q = z_{32}^q = 0$, $x_{42}^q = x_{42}^y = s_{34}$, $y_{42}^q = y_{42}^y = c_{34}$, получим $J_{32}^s = -I_3^{xz}s_3 - I_3^{yz}c_3 - I_4^{xz}s_{34} - I_4^{yz}c_{34}$, т. е.

$$H_{32} = -I_3^{xz}s_3 - (I_3^{yz} + L_4 d_{z4})c_3 - I_4^{xz}s_{34} - I_4^{yz}c_{34}.$$

Следовательно, необходимыми и достаточными условиями независимости H_{32} от углов q_3, q_4 являются равенства

$$I_3^{yz} + L_4 d_{z4} = 0,\quad I_3^{xz} = I_4^{xz} = I_4^{yz} = 0, \tag{22}$$

при выполнении которых $H_{32} = 0$.

Для $j = 3$, $i - 1 = 1$ по формуле (7) выпишем $H_{31} = H_{32} + L_2\left(q_{32}^q m_{32}^e - q_{32}^e m_{32}^q\right)$, где $q_{32}^q = z_{22}^y = 0$, $q_{32}^e = z_{21}^x = s_2$, $m_{32}^q = m_{32}^y$, т. е. $H_{31} = H_{32} - L_2 m_{32}^y s_2$. Учитывая равенство $z_{42}^y = z_{22}^y = 0$, по формуле (4) имеем $m_{42}^y = 0$. Следовательно, $m_{32}^y = d_{x3}x_{32}^y + d_{y3}y_{32}^y + d_{z3}z_{32}^y$. Отсюда с учетом равенств $x_{32}^y = x_{32}^y = s_3$, $y_{32}^y = c_3$, $z_{32}^y = z_{22}^y = 0$ получим $m_{32}^y = d_{x3}s_3 + d_{y3}c_3$. Следовательно, $H_{31} = H_{32} - L_2\left(d_{x3}s_3 + d_{y3}c_3\right)s_2$ и с учетом условий (20), (22) получим $H_{31} = H_{32} = 0$. Аналогично $H_{61} = H_{65} = 0$.

Таким образом, для независимости от углов поворота тел ЭМИК МР на рис. 3 необходимо и достаточно массы тел распределить так, чтобы выполнялись условия (17)–(22). Практическая реализация условий независимости подсистем m_2 (m_5) от углов q_2, q_3, q_4 (q_5, q_6, q_7) описана, например, в учебных пособиях [16, 17] и статье [4], где указано, что в первую очередь необходимо статически уравновесить ДТ(4) и ДТ(3) (аналогично ДТ(7) и ДТ(6)). Тогда силы тяжести, приведенные к осям вращения всех тел МР на рис. 3, обнуляются. Следовательно, уравнения динамики МР на рис. 3 примут вид системы семи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которые интегрируются элементарно.

Описание возможных вариантов практической реализации остальных условий выходит за пределы заявленной темы статьи.

Заключение

Предложенный формализм выписывания ЭМИК рассмотренных ДСТОВ позволяет легко и быстро получить выражения их кинетической энергии. Совместно с формализмом выписывания уравнений динамики в форме уравнения Лагранжа второго рода, изложенным в статье [15], удается существенно упростить вывод уравнений динамики ДСТОВ в символьном виде с явной записью центробежных и кориолисовых инерционных моментов сил, а также с выделением из них гироскопических составляющих. Применение известных методов учета связей в уравнениях динамики расширяет область использования предлагаемых формализмов на ДСТОВ со связями концевых тел и систем тел с переменной структурой.

Список литературы

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматиз, 1961. 824 с.
2. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л. Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984. 216 с.
3. Тимофеев А.В. Управление роботами: учеб. пособие. Л.: Изд-во Изд-во ЛГУ, 1986. 240 с.
4. Телегин А.И. Синтез систем твердых тел с заданными свойствами. Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996. 174 с.
5. Телегин А.И. Основы теоретической механики систем тел. С приложениями в робототехнике: учеб. пособие для вузов. СПб.: Лань, 2023. 252 с. ISBN 978-5-507-45089-3.
6. Tourassis V.D., Neuman C.P.The inertial characteristics of dynamic robot models // Mech. and Mach. Theory. 1985. Vol. 20, no. 1. P. 41–52.
7. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел: пер. с англ. М.: Мир, 1980. 292 с.
8. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных тел. М.: Наука, 1993. 272 с.

9. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы: пер. с англ. М.: Мир, 1976. 541 с.

10. Белецкий В.В. Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.

11. Шагающие машины / Д.Е. Охоцимский, А.К. Платонов, А.А. Кирильченко, В.В. Лапшин. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1989. 36 с. (Препринт № 87)

12. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 312 с.

13. Sadati S.M.H., Naghibi S.E., Naraghi M. An Automatic Algorithm to Derive Linear Vector Form of Lagrangian Equation of Motion with Collision and Constraint // Procedia Computer Science. 2015. Vol. 76. P. 217–222. DOI: 10.1016/j.procs.2015.12.345

14. Бутырин С.А. Разработка алгоритмов управления манипулятором с компенсацией взаимовлияния движений и программного обеспечения численных экспериментов с моделями роботов на ЭВМ: дис. … канд. техн. наук. Томск, 1982. 144 с.

15. Телегин А.И. Выделение гироскопических инерционных сил из центробежных и кориолисовых инерционных сил // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24, № 1. С. 63–74. DOI: 10.14529/ctcr240106

16. Мелентьев Ю.И., Телегин А.И. Расчет уравновешенных манипуляторов. Магнитогорск: МГМИ, 1984. 39 с.

17. Мелентьев Ю.И., Телегин А.И. Динамика манипуляционных систем роботов. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1984. 360 с.

References

1. Lurie A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow: Fizmatiz; 1961. 824 p. (In Russ.)

2. Bortsov Yu.A., Polyakhov N.D., Putov V.V. *Elektromekhanicheskie sistemy s adaptivnym i modal'nym upravleniem* [Electromechanical systems with adaptive and modal control]. Energoatomizdat. Leningrad branch; 1984. 216 p. (In Russ.)

3. Timofeev A.V. *Upravlenie robotami: ucheb. posobie* [Robot control: A textbook]. Leningrad: Leningrad State University Publ.; 1986. 240 p. (In Russ.)

4. Telegin A.I. *Sintez sistem tverdykh tel s zadannymi svoystvami* [Synthesis of systems of solids with specified properties]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State Technical University Publ.; 1996. 174 p. (In Russ.)

5. Telegin A.I. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki sistem tel. S prilozheniyami v robototekhnike: ucheb. posobie dlya vuzov* [Fundamentals of theoretical mechanics of body systems. With applications in robotics: textbook for universities]. St. Petersburg: Lan; 2023. 252 p. (In Russ.) ISBN 978-5-507-45089-3.

6. Tourassis V.D., Neuman C.P. The inertial characteristics of dynamic robot models. *Mech. and Mach. Theory*. 1985;20(1):41–52.

7. Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*. Transl. from Engl. Moscow: Mir; 1980. 292 p. (In Russ.)

8. Lilov L.K. *Modelirovanie sistem svyazannykh tel* [Modeling of systems of connected bodies]. Moscow: Nauka; 1993. 272 p. (In Russ.)

9. Vukobratovic M. *Shagayushchie roboty i antropomorfnye mekhanizmy* [Walking robots and anthropomorphic mechanisms]. Transl. from Engl. Moscow: Mir; 1976. 541 p. (In Russ.)

10. Beletskiy V.V. *Dvunogaya khod'ba: model'nye zadachi dinamiki i upravleniya* [Bipedal walking: model problems of dynamics and control]. Moscow: Nauka; 1984. 288 p. (In Russ.)

11. Okhotsimskiy D.E., Platonov A.K., Kirilchenko A.A., LapshinV.V. *Shagayushchie mashiny* [Walking machines]. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences; 1989. 36 p. (Preprint No. 87) (In Russ.)

12. Okhotsimskiy D.E., Golubev Yu.F. *Mekhanika i upravlenie dvizheniem avtomaticheskogo shagayushchego apparata* [Mechanics and motion control of automatic walking apparatus]. Moscow: Nauka. Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature; 1984. 312 p. (In Russ.)

13. Sadati S.M.H., Naghibi S.E., Naraghi M. An Automatic Algorithm to Derive Linear Vector Form of Lagrangian Equation of Motion with Collision and Constraint. *Procedia Computer Science*. 2015;76:217–222. DOI: 10.1016/j.procs.2015.12.345

14. Butyrin S.A. *Razrabotka algoritmov upravleniya manipulyatorom s kompensatsiey vzaimovliyaniya dvizheniy i programmnogo obespecheniya chislennykh eksperimentov s modelyami robotov na EVM: dis. kand. tekhn. nauk* [Development of the manipulator control algorithms with the motion mutual influence compensation and the software for the numerical experiments with the robot models on the computer. Cand. sci. diss.]. Tomsk; 1982. 144 p. (In Russ.)

15. Telegin A.I. Separation of gyroscopic inertial forces from centrifugal and Coriolis inertial forces. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2024;24(1): 63–74. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr240106

16. Melent'ev Yu.I., Telegin A.I. *Raschet uravnoveshennykh manipulyatorov* [Calculation of balanced manipulators]. Magnitogorsk: Magnitogorsk Mining and Metallurgical Institute Publ.; 1984. 39 p.

17. Melent'ev Yu.I., Telegin A.I. *Dinamika manipulyatsionnykh sistem robotov* [Dynamics of manipulation systems of robots]. Irkutsk: Irkutsk University Publ.; 1984. 360 p. (In Russ.)

Информация об авторе

Телегин Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры автоматики, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия; teleginai@susu.ru.

Information about the author

Aleksandr I. Telegin, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof., Prof. of the Department of Automation, South Ural State University, Miass, Russia; teleginai@susu.ru.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
The author declares no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 06.02.2025
The article was submitted 06.02.2025