

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ С ПАРАМЕТРОМ

А.В. Копотева, kopoteva_av@mail.ru

А.В. Затонский, zhenon@narod.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1863-2535>

Д.А. Мамаев, dmitrijmamaev0@yandex.ru

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Березниковский филиал, Березники, Россия*

Аннотация. Данная работа посвящена изучению вопроса возможности применения математического пакета Mathcad 15.0 для решения задач аналитической геометрии с параметрами. Обзор отечественных и зарубежных источников показал, что при всем разнообразии применения различных математических пакетов для решения задач с параметрами их почти не используют. **Цель исследования:** изучение возможности применения математического пакета для решения задач аналитической геометрии с параметрами, что позволит не только избежать арифметических и прочих ошибок, свойственных человеку, но и получить инструмент генерации различных вариантов одной и той же задачи и шаблон для проверки соответствующих работ учащихся. **Материалы и методы.** Исследование выполнено в среде Mathcad 15.0 на примере решения задачи взаимного расположения прямой и эллипса с переменной ординатой центра симметрии. Были рассмотрены два различных способа аналитических решений задачи и выполнена реализация одного из них в среде Mathcad. Аналитическое решение задачи взаимного расположения прямой и кривой второго порядка с параметром возможно либо путем анализа числа их общих точек на основании выраженных через параметр координат, либо путем нахождения координат точки касания на основании равенства угловых коэффициентов прямой и касательной к кривой в точке касания. **Результаты.** В рамках данного исследования установлено, что Mathcad позволяет как реализовать оба аналитических метода решения задачи, так и непосредственно найти выражения для координат точки касания в зависимости от параметра путем решения системы нелинейных уравнений и затем исследовать их на принадлежность множеству действительных чисел. **Заключение.** Проведенное нами исследование позволяет утверждать, что Mathcad позволяет реализовать различные варианты решения задачи аналитической геометрии с параметром и сделать соответствующую графическую интерпретацию результата. Полученное решение может быть использовано для составления различных вариантов задачи с решением из области рациональных чисел, проверки полученных студентами результатов, а также в качестве образца выполнения задания.

Ключевые слова: аналитическая геометрия, эллипс, прямая, задача с параметром, точка касания, Mathcad

Для цитирования: Копотева А.В., Затонский А.В., Мамаев Д.А. Применение математического пакета для разработки и визуализации решения задачи аналитической геометрии с параметром // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2025. Т. 25, № 3. С. 16–25. DOI: 10.14529/ctcr250302

MATHEMATICAL SOFTWARE APPLICATION FOR AN ANALYTICAL GEOMETRY PROBLEM WITH A PARAMETER SOLVING AND VISUALIZATION

A.V. Kopoteva, kopoteva_av@mail.ru

A.V. Zatonskiy, zxenon@narod.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1863-2535>

D.A. Mamaev, dmitrijmamaev0@yandex.ru

Perm National Research Polytechnic University, Berezniki Branch, Berezniki, Russia

Abstract. In this issue we study the possibility of mathematical software usage for analytical geometry with parameters problem solving. A review of Russian and foreign sources has shown that, despite the variety of mathematical software applications, they are rarely used to solve problems with parameters. **The purpose of the study** was to test the possibility of a mathematical package usage to solve problems with parameters, which will allow to avoid arithmetic and other errors and to obtain a tool for generating different variants of the same problem and a template for students' solutions checking. **Materials and methods.** We used Mathcad 15.0 environment for the straight line and an ellipse with a variable symmetry center ordinate relative position determination. First analytical solution of the relative position of a straight line and a second-order curve with a parameter problem is based on the number of curves' common points and their coordinates functional dependence on the parameter analysis. Second one is based on the point of contact coordinates determination using the equality of the straight line angular coefficients and curve tangent at the point of contact. **Results.** In this study it was established that Mathcad allows to implement both analytical methods and directly find the expressions for the coordinates of the depending on the parameter by solving a system of nonlinear equations and then to exam them for the set of real numbers belonging. **Conclusion.** Our research ascertains that Mathcad can be implemented for visualization and various solutions of analytical geometry with a parameter problem. Mathcad solution can be used to generate a set of different variants of the same problem with a rational number results, to verify students' problem solutions, and also as an example of correct solution.

Keywords: analytical geometry, ellipse, straight line, problem with parameter, tangent point, Mathcad

For citation: Kopoteva A.V., Zatonskiy A.V., Mamaev D.A. Mathematical software application for an analytical geometry problem with a parameter solving and visualization. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2025;25(3):16–25. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr250302

Введение

Математические задачи с параметром из школьной или университетской программы в силу своих сложности и нетривиальности оказываются подходящим инструментом организации научно-исследовательской работы студентов младших курсов. Однако использование таких задач в учебном процессе сопровождается целым рядом сложностей. Помимо непосредственной формулировки задачи на естественном языке преподавателю необходимо, во-первых, обеспечить достаточное число вариантов в соответствии с количеством студентов, во-вторых, подобрать такие числовые величины в ней, чтобы результаты расчетов оказались приемлемыми, в-третьих, разработать и реализовать метод решения, подходящий для проверки решения задачи студентом, и, в-четвертых, визуализировать полученные результаты. При этом само решение задачи с параметром зачастую приводит к набору взаимосвязанных задач различной сложности, часто не имеющих аналитического решения. В связи с перечисленными проблемами возникает необходимость выбора инструментального средства, позволяющего решить их хотя бы частично. Естественно, реализация одного и того же метода решения задачи с использованием различных математических пакетов может существенно различаться, а решение любой задачи в рамках конкретного пакета является прикладной задачей, имеющей собственную специфику и сложности. В рамках данной работы выполнена оценка возможностей среды Mathcad 15.0 для разработки и реализации метода решения задач с параметром на примере задачи исследования взаимного расположения прямой и кривой второго порядка в зависимости от параметра одной из них.

Обзор исследований, посвященных решению задач с параметрами, привел к неожиданным результатам. Вопросы необходимости и преимуществ применения программных средств в образовании поднимаются в [1] (на примере Mathcad), [2] (на примере Wolfram Mathematica) и [3] (на примере Matlab), однако нам не удалось обнаружить исследований, посвященных решению задач с параметрами из школьной или университетской программы. Русскоязычные авторы уделяют существенное внимание решению задач с параметрами из школьной программы в рамках подготовки к ЕГЭ. В частности, существуют статьи, посвященные решению геометрических [4] и тригонометрических [5] задач с параметрами, а также методам решения таких задач [6]. В отдельных исследованиях рассматриваются вопросы применения программных продуктов для решения задач школьной программы с параметром, в частности, Mathcad [7] и Wolfram alpha [8]. Несколько более широко как в отечественных, так и зарубежных изданиях представлены исследования, посвященные использованию программных средств для решения теоретических и прикладных задач. Применение пакета Mathcad для визуализации в задачах аналитической геометрии рассматривается в работах [9, 10]. Решение и визуализации задач начертательной геометрии средствами Wolfram Mathematica описаны в [11], применение его для построения линии пересечения поверхностей второго порядка – в [12]. Построение в среде Matlab поверхностей каналов теплообменных устройств реализовано в [13]. Проблеме программной визуализации и анимации на примере параметрических кривых Безье посвящено исследование [14]. Моделирование в среде Mathcad поведения идеальных материалов выполнено в [15].

Достаточно широко представлены прикладные задачи с параметрами, например, посвященные исследованию температуры стальных конструкций под действием солнечной энергии [16] и применению балансовой модели популяции для симуляции процесса кипения в смеси двух жидкостей [17]. Кроме того, большое внимание уделяется математическим задачам с параметрами: алгебраическим (решение общих нелинейных задач нахождения собственных значений матриц [18]), математического анализа (решение общих линейных эллиптических уравнений в частных производных второго порядка [19]), вариационного исчисления [20]. Таким образом, нам не удалось найти статей, посвященных решению задач аналитической геометрии с параметрами с использованием математических пакетов. Проблема является весьма актуальной как для преподавателя по причинам, перечисленным ранее, так и для студентов, поскольку попытка выполнить соответствующее задание вызвала у них существенные затруднения. Это означает, что успешная разработка и реализация метода решения задачи с параметром с использованием математического пакета полезны не только для преподавателя с точки зрения разработки и проверки студенческих работ, но и для студентов в качестве образца выполнения таких заданий, что и определяет актуальность данной работы.

Выполним решение задачи аналитической геометрии на взаимное расположение прямой и кривой второго порядка средствами Mathcad 15.0. Параметром может выступать любой из коэффициентов уравнений прямой или кривой второго порядка. Для определенности сформулируем задачу следующим образом: требуется исследовать взаимное расположение эллипса с центром в точке $M(-1; y_0)$ и полуосями $a = 4$ и $b = 3$ и прямой $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ в зависимости от значения параметра y_0 , определить координаты общих точек, если они есть, и построить графики.

1. Визуализация задачи средствами Mathcad 15.0

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $M(x_0; y_0)$ и полуосями $a > 0$ и $b > 0$ имеет вид $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$, причем явной однозначной зависимости между абсциссой и ординатой в данном случае не существует. Построение графика кривой в неявном виде в Mathcad 15.0 невозможно, поэтому введем замену переменных $(x - x_0)/a = \cos(t)$, $(y - y_0)/b = \sin(t)$ и перейдем к параметрическим уравнениям эллипса $x = x_0 + a \cdot \cos(t)$, $y = y_0 + b \cdot \sin(t)$. Тогда в нашем случае эллипс с центром симметрии в точке $M(-1; y_0)$, полуосями $a = 4$ и $b = 3$ описывается уравнением $(x + 1)^2/4^2 + (y - y_0)^2/3^2 = 1$ или в параметрической форме $x = -1 + 4 \cdot \cos(t)$, $y = y_0 + 3 \cdot \sin(t)$. Изменение ординаты центра эллипса y_0 приводит к его параллельному переносу по вертикали (рис. 1).

Прямая $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ задана общим уравнением, т. е. тоже неявно, однако в данном случае можно получить явное уравнение $y = 5 \cdot x/16 - 2$. Визуальный анализ возможных взаимных расположений прямой и эллипса при различных значениях параметра y_0 (см. рис. 1) позволяет заключить, что кривые могут иметь $n = 0, 1, 2$ общих точек.

$$a := 4 \quad b := 3 \quad x_0 := -1 \quad x(t) := x_0 + a \cdot \cos(t) \quad y(t, y_0) := y_0 + b \cdot \sin(t)$$

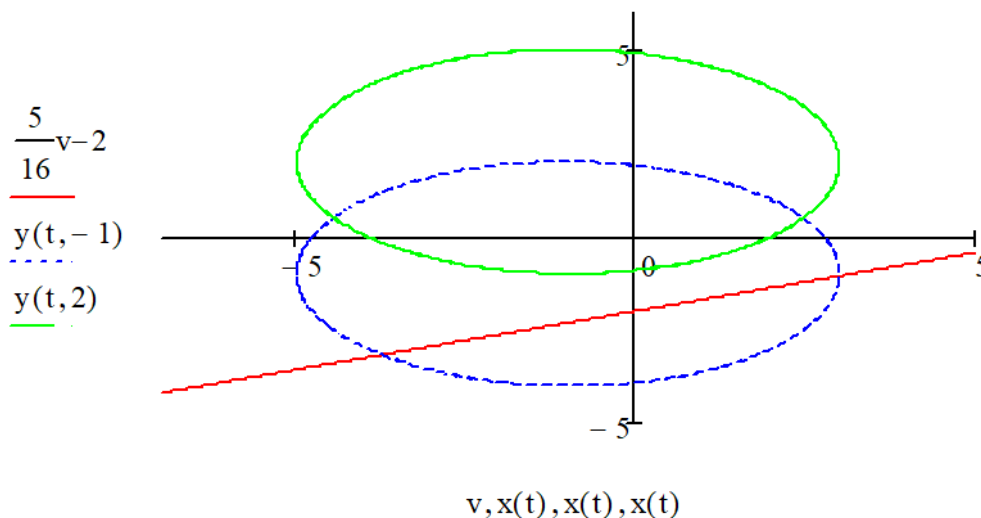


Рис. 1. Графики эллипса $(x + 1)^2/4^2 + (y - y_0)^2/3^2 = 1$ и прямой $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ при различных значениях параметра y_0
Fig. 1. Ellipse $(x + 1)^2/4^2 + (y - y_0)^2/3^2 = 1$ and the straight line $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ graphics for different values of parameter y_0

2. Решение задачи взаимного расположения прямой и эллипса путем определения их общих точек

Формально координаты общих точек могут быть найдены путем решения системы

$$\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-y_0)^2}{3^2} = 1; \\ 5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Полученная система является нелинейной, при подстановке в первое уравнение явного выражения для y получается квадратное уравнение для x с параметром вида

$$\frac{169}{2304} \cdot x^2 - \frac{5 \cdot y_0 + 1}{72} \cdot x + \frac{y_0^2}{9} + \frac{4 \cdot y_0}{9} - \frac{71}{144} = 0. \quad (2)$$

Найдем выражение для дискриминанта квадратного уравнения (2) и разложим его на простые множители:

$$D = -y_0^2/36 - 37 \cdot y_0/288 + 445/3072 = (15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/9216.$$

Тогда

$$x_{1,2} = 1152 \cdot ((5 \cdot y_0 + 1)/72 \pm \sqrt{D})/169.$$

Очевидно, уравнение (2) не имеет действительных корней при $D < 0$, имеет действительный корень кратности 2 при $D = 0$ и пару различных действительных корней при $D > 0$.

Разложение дискриминанта на простые множители позволяет установить, что $D = 0$ при $y_{01} = 15/16$ и $y_{02} = -89/16$, т. е. при соответствующих значениях параметра система (1) имеет единственное решение, а прямая и эллипс – единственную общую точку (рис. 2). Найдем ее координаты при $y_{01} = 15/16$:

$$x_1 = 1152 \cdot (5 \cdot 15/16 + 1)/72/169 = 7/13,$$

тогда

$$y_1 = 5/16 \cdot 7/13 - 2 = -381/208,$$

т. е. точкой касания эллипса и прямой будет $M_1(7/13; -381/208)$. При $y_{02} = -89/16$

$$x_2 = 1152 \cdot (-5 \cdot 89/16 + 1)/72/169 = -33/13,$$

тогда

$$y_2 = 5/16 \cdot (-33/13) - 2 = -581/208,$$

т. е. точкой касания эллипса и прямой будет $M_2(-33/13; -581/208)$.

$$a := 4 \quad b := 3 \quad x_0 := -1 \quad x(t) := x_0 + a \cdot \cos(t) \quad y(t, y_0) := y_0 + b \cdot \sin(t)$$

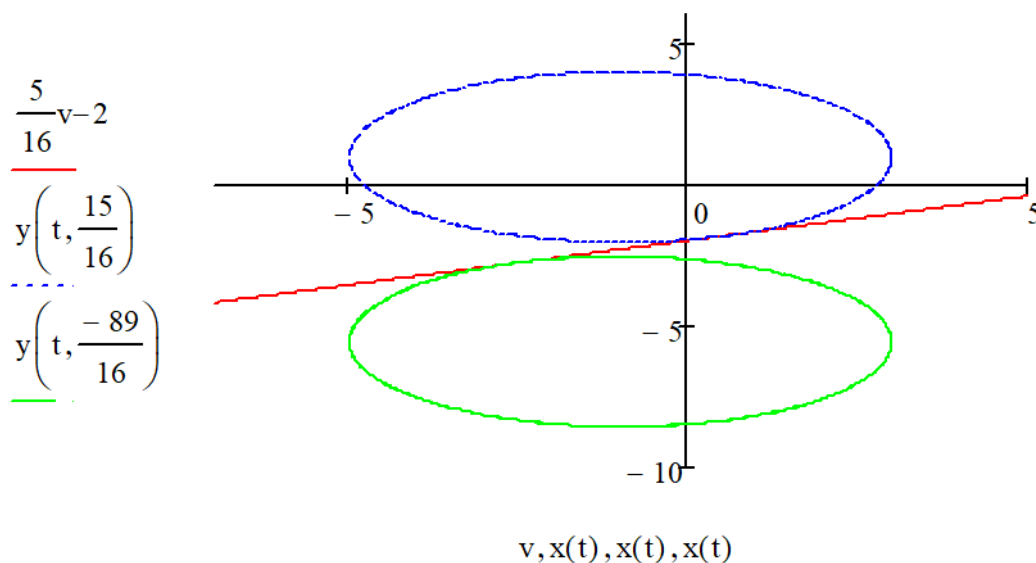


Рис. 2. Касание эллипса $(x + 1)^2/4^2 + (y - y_0)^2/3^2 = 1$ и прямой $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$
Fig. 2. Ellipse $(x + 1)^2/4^2 + (y - y_0)^2/3^2 = 1$ and the straight line $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ points of contact

Если дискриминант положителен, т. е. $(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/9216 > 0$, то система (1) имеет два решения, а прямая пересекает эллипс в двух точках. Решение полученного неравенства имеет вид $-89/16 < y_0 < 15/16$. Абсциссы точек пересечения определяются выражениями:

$$x_{1,2} = 1152 \cdot ((5 \cdot y_0 + 1)/72 \pm \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/9216})/169,$$

откуда

$$x_1 = 16/169 + 80 \cdot y_0/169 + 12 \cdot \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/169},$$

$$x_2 = 16/169 + 80 \cdot y_0/169 - 12 \cdot \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/169}.$$

Ординаты точек пересечения равны соответственно

$$y_1 = 5 \cdot x_1/16 - 2 = 5 \cdot (16/169 + 80 \cdot y_0/169 + 12 \cdot \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/169})/16 - 2 =$$

$$= 25 \cdot y_0/169 - 333/169 + 15 \cdot \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/676},$$

$$y_2 = 5 \cdot x_2/16 - 2 = 5 \cdot (16/169 + 80 \cdot y_0/169 - 12 \cdot \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/169})/16 - 2 =$$

$$= 25 \cdot y_0/169 - 333/169 - 15 \cdot \sqrt{(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/676}.$$

Если дискриминант отрицателен, т. е. $(15 - 16 \cdot y_0) \cdot (16 \cdot y_0 + 89)/9216 < 0$, то система (1) не имеет решений, а прямая не пересекает эллипс. Решение полученного неравенства имеет вид $y_0 \in (-\infty; -89/16) \cup (15/16; +\infty)$.

3. Решение задачи взаимного расположения прямой и эллипса путем нахождения точки их касания

Задачу можно решить альтернативным способом, исходя из следующих соображений. В точке касания прямой и эллипса производная эллипса равна угловому коэффициенту касательной. Полученное равенство в совокупности с уравнениями прямой и эллипса дает систему трех уравнений с тремя неизвестными – искомым параметром и координатами точки касания.

В нашем случае производная эллипса находится по формуле производной неявной функции:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-y_0)^2}{3^2} \right) = \frac{d}{dx} (1) \Rightarrow \frac{2 \cdot (x+1)}{16} + \frac{2 \cdot (y-y_0) \cdot y'}{9} = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{8} + \frac{2 \cdot (y-y_0) \cdot y'}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot (y-y_0) \cdot y'}{9} = -\frac{x+1}{8} \Rightarrow y' = -\frac{x+1}{8} \cdot \frac{9}{2 \cdot (y-y_0)} = -\frac{9}{16} \cdot \frac{x+1}{y-y_0}.$$

Равенство полученной производной в точке касания угловому коэффициенту рассматриваемой прямой дает соотношение вида

$$-\frac{9}{16} \cdot \frac{x_k + 1}{y_k - y_0} = \frac{5}{16}$$

или после преобразования

$$5 \cdot (y_k - y_0) + 9 \cdot (x_k + 1) = 0.$$

Поскольку точка касания лежит на прямой

$$5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0,$$

то полученная пара равенств образует систему двух линейных уравнений с параметром вида

$$\begin{cases} 5 \cdot (y_k - y_0) + 9 \cdot (x_k + 1) = 0; \\ 5 \cdot x_k - 16 \cdot y_k - 32 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ее решение имеет вид

$$x_k = (80 \cdot y_0 + 16)/169;$$

$$y_k = (25 \cdot y_0 - 333)/169.$$

Подставляя полученные значения в уравнение эллипса, получаем квадратное уравнение относительно параметра y_0 вида

$$16 \cdot y_0^2 / 169 + 74 \cdot y_0 / 169 - 1335 / 2704 = 0.$$

Его решение дает пару действительных корней $y_{01} = 15/16$ и $y_{02} = -89/16$, совпадающих со значениями параметров, полученными выше. Подставляя полученные значения в выражения для координат точки касания, получаем

$$x_1 = (80 \cdot 15/16 + 16)/169 = 7/13;$$

$$x_2 = (80 \cdot (-89/16) + 16)/169 = -33/13;$$

$$y_1 = (25 \cdot 15/16 - 333)/169 = -381/208;$$

$$y_2 = (25 \cdot (-89/16) - 333)/169 = -581/208.$$

Понятно, что при значениях параметра, отличного от найденных, прямая будет либо пересекать эллипс, т. е. иметь с ним пару общих точек, либо не пересекать его, т. е. не иметь с ним общих точек. В соответствии с рис. 1 можно утверждать, что при превышении параметром соответствующего значения в верхней точке касания, т. е. при $y_0 > 15/16$, эллипс расположен выше прямой $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ и не имеет с ней общих точек. Аналогично при значениях параметра меньших, чем в нижней точке касания, т. е. при $y_0 < -89/16$, эллипс расположен ниже прямой $5 \cdot x - 16 \cdot y - 32 = 0$ и также не имеет с ней общих точек. Соответственно, при $-89/16 < y_0 < 15/16$ прямая пересекает эллипс в двух точках. Координаты точек пересечения при этом придется искать как решение системы (1), причем случаи нулевого и отрицательного дискриминанта уравнения (2) можно не рассматривать.

Заметим, что все расчеты выполнены в Mathcad в силу громоздкости получаемых выражений.

4. Решение задачи взаимного расположения прямой и эллипса в Mathcad 15.0

Инструментальные средства удобно использовать, если требуется получить только ответ, но не решение, или для проверки правильности найденного решения. В нашем случае требуется именно последнее. При этом в процессе решения задачи обоими описанными выше способами Mathcad активно использовался, т. е. фактически были реализованы оба варианта. На рис. 3 представлен первый вариант решения. Очевидно, что полученные нами ранее аналитические результаты полностью подтверждаются расчетами в среде Mathcad, т. е. все три варианта решения задачи позволяют получить правильный ответ. Это означает, что полученное решение может быть использовано для проверки решения задачи студентами. Кроме того, изменяя значения числовых параметров кривых, на основании полученного решения можно подобрать их различные сочетания для получения необходимого количества вариантов с ответами из множества рациональных чисел. При этом мы не утверждаем, что способы решения задачи исчерпываются описанными нами, вполне возможно, что существуют другие способы решения, которые также могут быть реализованы в Mathcad.

Найдем координаты общих точек прямой и эллипса как решение соответствующей системы

$$\text{Given } \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-y_0)^2}{9} = 1 \quad 5x - 16y - 32 = 0$$

$$\text{Find}(x, y) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{80 \cdot y_0}{169} + \frac{12 \cdot \sqrt{1335 - 1184 \cdot y_0 - 256 \cdot y_0^2}}{169} + \frac{16}{169} \quad \frac{80 \cdot y_0}{169} - \frac{12 \cdot \sqrt{1335 - 1184 \cdot y_0 - 256 \cdot y_0^2}}{169} + \frac{16}{169} \\ \frac{25 \cdot y_0}{169} + \frac{15 \cdot \sqrt{1335 - 1184 \cdot y_0 - 256 \cdot y_0^2}}{676} - \frac{333}{169} \quad \frac{25 \cdot y_0}{169} - \frac{15 \cdot \sqrt{1335 - 1184 \cdot y_0 - 256 \cdot y_0^2}}{676} - \frac{333}{169} \end{array} \right)$$

Определим значения параметра, при которых подкоренное выражение равно нулю

$$D(y_0) := 1335 - 1184 \cdot y_0 - 256 \cdot y_0^2$$

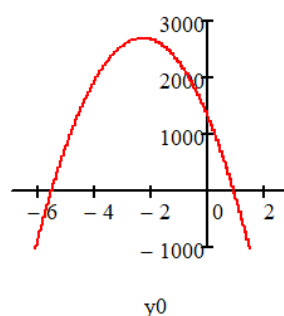
Построим график дискриминанта

$$\text{Given } D(y_0) = 0$$

$$\text{Find}(y_0) \rightarrow \left(\frac{15}{16} \quad -\frac{89}{16} \right)$$

При положительном дискриминанте, т.е. при $-89/16 < y_0 < 15/16$, получаем две точки пересечения с координатами, найденными выше. При отрицательном дискриминанте, т.е. при $y_0 < -89/16$ и $y_0 > 15/16$, прямая не пересекает эллипс.

$D(y_0)$



Найдем координаты точки касания при $y_0 = 15/16$ $y_{01} := \frac{15}{16}$

$$\text{Given } \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-y_{01})^2}{9} = 1 \quad 5x - 16y - 32 = 0 \quad \text{Find}(x, y)^T \rightarrow \left(\frac{7}{13} \quad -\frac{381}{208} \right)$$

Найдем координаты точки касания при $y_0 = -89/16$ $y_{02} := -\frac{89}{16}$

$$\text{Given } \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-y_{02})^2}{9} = 1 \quad 5x - 16y - 32 = 0 \quad \text{Find}(x, y)^T \rightarrow \left(-\frac{33}{13} \quad -\frac{581}{208} \right)$$

Рис. 3. Решение задачи взаимного расположения эллипса $(x+1)^2/4^2 + (y-y_0)^2/3^2 = 1$ и прямой $5x - 16y - 32 = 0$ в зависимости от параметра y_0 в среде Mathcad 15.0

Fig. 3. Relative position of ellipse $(x+1)^2/4^2 + (y-y_0)^2/3^2 = 1$ and straight line $5x - 16y - 32 = 0$ problem solution depending on the parameter y_0 in Mathcad 15.0

Закключение

Приведенные в работе варианты решения задачи определения взаимного расположения эллипса и прямой в зависимости от ординаты центра эллипса позволяют убедиться возможности разработки различных способов решения задачи с параметром в соответствии с навыками и предпочтениями решающего ее лица и реализации этого способа в математическом пакете. При этом Mathcad оказывается не только удобным средством визуализации и решения задачи в рамках собственного функционала, но и незаменимым инструментом, позволяющим сконструировать различные варианты аналитического решения, автоматизировать арифметические вычисления и алгебраические преобразования с целью устранить соответствующие ошибки, подобрать числовые значения и их сочетания для обеспечения требуемого вида решения и генерации необходимого числа вариантов задачи. Это позволяет использовать его как удобную и гибкую среду разработки, реализации и проверки правильности методов решения различных задач с параметрами.

Список литературы

1. Temiz I., Akuner C. Comparison of traditional education to computer aided education: simulation of three-phase rotating area in an induction machine // Procedia – Social and Behavioral Sciences. 2009. Vol. 1, iss. 1. P. 1825–1833. DOI: 10.1016/j.sbspro.2009.01.323

2. Aesthetic education: the process of teaching mathematics with the open-source software / A. Aktayeva, E. Zubareva, A. Dautov et al. // *Transportation Research Procedia*. 2022. Vol. 63. P. 285–293. DOI: 10.1016/j.trpro.2022.06.015
3. A Matlab-Based Game for Advanced Automatic Control Education / U. Münz, C. Böhm, J. Eck et al. // *IFAC Proceedings Volumes*. 2010. Vol. 42, iss. 24. P. 140–145. DOI: 10.3182/20091021-3-JP-2009.00027
4. Кузьмин С.Г., Костюченко Р.Ю. Задачи с параметрами в обучении школьников геометрии // *Мир науки, культуры и образования*. 2024. № 4 (107). С. 241–243.
5. Гузаиров Г.М., Мунасыпов Н.А., Сафарова А.Д., Черемисина М.И. Двойная подстановка в доказательствах и при решении тригонометрических неравенств // *Мир науки, культуры и образования*. 2021. № 4 (89). С. 110–113.
6. Здоровенко М.Ю., Зеленина Н.А. Замена переменной в задачах с параметрами // *Концепт*. 2018. № V7. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/zamena-peremennoy-v-zadachah-s-parametrami> (дата обращения: 24.01.2025) DOI: 10.24422/МСИТО.2018.V7.14884
7. Алексеева Т.А., Коропец А.А. Применение пакета Mathcad в школьном курсе математики (решение задач с параметрами) // *Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования»*. 2006. № 7. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primeneniye-paketa-mathcad-v-shkolnom-kurse-matematiki-reshenie-zadach-s-parametrami> (дата обращения: 24.01.2025).
8. Власов Д.А., Синчуков А.В., Качалова Г.А. Использование WolframAlpha при обучении решению задач с параметрами // *Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования*. 2014. № 1. С. 64–72.
9. Выговская Л.С. Решение обратной задачи аналитической геометрии в системе Mathcad посредством инструментария класса R-функций // *Преподаватель XXI век*. 2020. № 3. С. 115–124. DOI: 10.31862/2073-9613-2020-3-115-124
10. Кузьмин О.В., Палеева М.Л. Потенциал прикладных заданий в обучении математике бакалавров технических направлений // *Вестник ИргТУ*. 2012. № 10 (69). С. 362–366.
11. Степура Е.А., Зонтов Р.А. Применение системы компьютерной математики Wolfram Mathematica при решении задач начертательной геометрии // *Вестник МГСУ*. 2011. № 2. С. 352–357.
12. Ваванов Д.А., Иващенко А.В. Линия пересечения двух однополостных гиперболоидов вращения разной формы // *Инновации и инвестиции*. 2019. № 1. С. 160–163.
13. Багоутдинова А.Г., Золотонос Я.Д., Мустакимова С.А. Геометрическое моделирование сложных поверхностей пружинно-витых каналов теплообменных устройств // *Известия КазГАСУ*. 2011. № 4 (18). С. 185–192.
14. Modeling time and topology for animation and visualization with examples on parametric geometry / K.E. Jordan, L.E. Miller, E.L.F. Moore et al. // *Theoretical Computer Science*. 2008. Vol. 405, iss. 1–2. P. 41–49. DOI: 10.1016/j.tcs.2008.06.023
15. Bochnia J. Ideal Material Models for Engineering Calculations // *Procedia Engineering*. 2012. Vol. 39. P. 98–110. DOI: 10.1016/j.proeng.2012.07.013
16. Experimental study and parametric analysis of temperature fields in corrugated web steel beams under solar radiation / Ch. Cai, Z. Zhou, Sh. Huang et al. // *Alexandria Engineering Journal*. 2025. Vol. 114. P. 381–403. DOI: 10.1016/j.aej.2024.11.086
17. Gajšek A., Tekavčič M., Končar B. Parametric study of population balance model on the DEBORA flow boiling experiment // *Nuclear Engineering and Technology*. 2024. Vol. 56, iss. 2. P. 624–635. DOI: 10.1016/j.net.2023.10.039
18. Pradovera D., Borghi A. Match-based solution of general parametric eigenvalue problems // *Journal of Computational Physics*. 2024. Vol. 519. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999124006326> (дата обращения: 24.01.2025). DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113384
19. Chasapi M., Antolin P., Buffa A. A localized reduced basis approach for unfitted domain methods on parameterized geometries // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023. Vol. 410. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782523001214> (дата обращения: 24.01.2025). DOI: 10.1016/j.cma.2023.115997

20. Clarenz U., von der Mosel H. Isoperimetric inequalities for parametric variational problems // *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. 2002. Vol. 19, iss. 5. P. 617–629. DOI: 10.1016/S0294-1449(02)00096-3

References

1. Temiz I., Akuner C. Comparison of traditional education to computer aided education: simulation of three-phase rotating area in an induction machine. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2009;1(1):1825–1833. DOI: 10.1016/j.sbspro.2009.01.323
2. Aktayeva A., Zubareva E., Dautov A., Saginbayeva K., Niyazova R., Khan S., Shonasheva A. Aesthetic education: the process of teaching mathematics with the open-source software. *Transportation Research Procedia*. 2022;63:285–293. DOI: 10.1016/j.trpro.2022.06.015
3. Münz U., Böhm C., Eck J., Reble M., Schumm P., Allgöwer F. A Matlab-Based Game for Advanced Automatic Control Education. *IFAC Proceedings Volumes*. 2010;42(24):140–145. DOI: 10.3182/20091021-3-JP-2009.00027
4. Kuzmin S.G., Kostyuchenko R.Yu. Problems with parameters in teaching geometry to schoolchildren. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya = The world of science, culture and education*. 2024;4(107):241–243. (In Russ.)
5. Guzairov G.M., Munasypov N.A., Safarova A.D., Cheremisina M.I. Double substitution in the proof and in solving trigonometric inequalities. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya = The world of science, culture and education*. 2021;4(89):110–113. (In Russ.)
6. Zdorovenko M.Yu., Zelenina N.A. Change of variable in tasks with parameters. *Koncept*. 2018;(V7). (In Russ.) Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/zamena-peremennoy-v-zadachah-s-parametrami> (accessed 24.01.2025) DOI: 10.24422/MCITO.2018.V7.14884
7. Alekseeva T.A., Koropets A.A. [Application of Mathcad software in the school mathematics course (solving problems with parameters)]. *Vestnik Moscow city teacher training university. Informatics and informatization of education*. 2006;(7). (In Russ.) Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-paketa-mathcad-v-shkolnom-kurse-matematiki-reshenie-zadach-s-parametrami> (accessed 24.01.2025).
8. Vlasov D.A., Sinchukov A.V., Kachalova G.A. WolframAlpha use when training in the solution of tasks with parameters. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Informatization of education*. 2014;(1):64–72. (In Russ.)
9. Vygovskaya L.S. Solving the inverse problem of analytical geometry in Mathcad system using the tools of the R-function class. *Prepodavatel XXI vek*. 2020;(3):115–124. (In Russ.) DOI: 10.31862/2073-9613-2020-3-115-124
10. Kuzmin O.V., Paleeva M.L. Applied task potential in teaching technical bachelors mathematics. *Proceedings of Irkutsk state technical university = Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2012;10(69):362–366. (In Russ.)
11. Stepura E.A., Zontov R.A. Application of computer mathematics Wolfram Mathematica in solving problems descriptive geometry. *Vestnik MGSU*. 2011;(2):352–357. (In Russ.)
12. Vavanov D.A., Ivashchenko A.V. Line of crossing two universe hyperboloids of rotation of a different form. *Innovacii i investicii*. 2019;(1):160–163. (In Russ.)
13. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ya.D., Mustakimova S.A. Geometrical modelling of difficult surfaces of spring-twisted channels of heat exchange devices. *News of the KSUAE*. 2011;4(18):85–192. (In Russ.)
14. Jordan K.E., Miller L.E., Moore E.L.F., Peters T.J., Russell A. Modeling time and topology for animation and visualization with examples on parametric geometry. *Theoretical Computer Science*. 2008;405(1–2):41–49. DOI: 10.1016/j.tcs.2008.06.023
15. Bochnia J. Ideal Material Models for Engineering Calculations. *Procedia Engineering*. 2012;39:98–110. DOI: 10.1016/j.proeng.2012.07.013
16. Cai Ch., Zhou Z., Huang Sh., He X., Zou Y., Sun M. Experimental study and parametric analysis of temperature fields in corrugated web steel beams under solar radiation. *Alexandria Engineering Journal*. 2025;114:381–403. DOI: 10.1016/j.aej.2024.11.086
17. Gajšek A., Tekavčič M., Končar B. Parametric study of population balance model on the DEBORA flow boiling experiment. *Nuclear Engineering and Technology*. 2024;56(2):624–635. DOI: 10.1016/j.net.2023.10.039

18. Pradovera D., Borghi A. Match-based solution of general parametric eigenvalue problems. *Journal of Computational Physics*. 2024;519. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999124006326> (accessed 24.01.2025). DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113384

19. Chasapi M., Antolin P., Buffa A. A localized reduced basis approach for unfitted domain methods on parameterized geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023;410. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782523001214> (accessed 24.01.2025). DOI: 10.1016/j.cma.2023.115997

20. Clarenz U., von der Mosel H. Isoperimetric inequalities for parametric variational problems. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. 2002;19(5):617–629. DOI: 10.1016/S0294-1449(02)00096-3

Информация об авторах

Копотева Анна Владимировна, канд. техн. наук, доц. кафедры общенаучных дисциплин, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Березниковский филиал, Березники, Россия; kopoteva_av@mail.ru.

Затонский Андрей Владимирович, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Березниковский филиал, Березники, Россия; zxenon@narod.ru.

Мамаев Дмитрий Альбертович, студент кафедры автоматизации технологических процессов, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Березниковский филиал, Березники, Россия; dmitrijmamaev0@yandex.ru.

Information about the authors

Anna V. Kopoteva, Cand. Sci. (Eng.), Ass. Prof. of the Department of General Scientific Disciplines, Perm National Research Polytechnic University, Berezniki Branch, Berezniki, Russia; kopoteva_av@mail.ru.

Andrey V. Zatonskiy, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Automation of Technological Processes, Perm National Research Polytechnic University, Berezniki Branch, Berezniki, Russia; zxenon@narod.ru.

Dmitrij A. Mamaev, Student of the Department of Automation of Technological Processes, Perm National Research Polytechnic University, Berezniki Branch, Berezniki, Russia; dmitrijmamaev0@yandex.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 02.04.2025

The article was submitted 02.04.2025