

Управление в технических системах Control in technical systems

Научная статья
УДК 621.785:535.211
DOI: 10.14529/ctcr260103

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЕЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ЗАКАЛКЕ

И.М. Ячиков, iachikovim@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1562-7506>

Е.А. Шаталов, schatalovegor@yandex.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. Нестабильность результатов лазерной закалки обуславливает необходимость комплексного анализа методов расчета температурного поля для оптимизации процесса и повышения точности прогнозирования глубины закаленного слоя. **Цель:** проведение сравнительного анализа точности основных аналитических методов расчета температурного поля металлической пластины при поверхностной лазерной закалке для прогнозирования глубины закаленного слоя. Исследование направлено на выявление наиболее адекватного аналитического подхода путем сопоставления с результатами численного моделирования. **Материалы и методы.** В качестве объектов сравнения выбраны три распространенных аналитических метода: решение дифференциальных уравнений теплопроводности с использованием преобразования Лапласа; модель на основе функций Грина для движущегося гауссова источника тепла; метод, основанный на модифицированном уравнении Розенталя для точечного источника тепла. Точность методов оценивалась по критерию прогнозирования глубины зоны закалки при фиксированной температуре ($T_z \approx 820$ °С для стали 40Х). В качестве эталона использованы результаты численного моделирования, выполненные с помощью авторской компьютерной программы *Laser_hardening_of_metal*. Расчеты проведены для пластины из стали 40Х при мощности лазера 2000 Вт, скорости сканирования 10 мм/с и радиусе пятна 4,5 мм. **Результаты.** Установлено, что аналитические методы дают различную оценку глубины закаленного слоя $\approx 1,3$ мм (метод Лапласа), $\approx 0,6$ мм (метод Грина), $\approx 0,8$ мм (метод Розенталя). Численное моделирование показало значение, равное 0,822 мм. Наиболее близкий к численному результату продемонстрировал метод, основанный на решении уравнения теплопроводности с использованием функций Грина для движущегося гауссова источника. Метод на основе модификации уравнения Розенталя получил расхождение с численной моделью около 25 %, а решение с преобразованием Лапласа показало наибольшую погрешность (более 50 %), подтвердив его исключительно оценочный характер. **Заключение.** Сравнительный анализ позволил ранжировать аналитические методы по точности прогноза глубины лазерной закалки. Для инженерных расчетов, требующих высокой точности и наличия вычислительных средств, рекомендован метод на основе функций Грина. Для оперативных приближенных оценок с приемлемой погрешностью (порядка 20–25 %) может применяться модифицированное уравнение Розенталя. Результаты работы обеспечивают рациональную основу для выбора метода расчета и оптимизации параметров лазерной поверхностной термообработки.

Ключевые слова: сравнительный анализ методов, поверхностная лазерная закалка, математическая модель теплового состояния пластины, компьютерная модель теплового состояния пластины

Для цитирования: Ячиков И.М., Шаталов Е.А. Анализ методов расчета температурного поля металлической пластины при ее поверхностной лазерной закалке // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2026. Т. 26, № 1. С. 33–42. DOI: 10.14529/ctcr260103

ANALYSIS OF TEMPERATURE FIELD CALCULATION METHODS FOR A METAL PLATE DURING SURFACE LASER HARDENING

I.M. Yachikov, iachikovim@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1562-7506>
E.A. Shatalov, schatalovegor@yandex.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. The instability of laser hardening results necessitates a comprehensive analysis of methods for calculating the temperature field to optimize the process and improve the accuracy of predicting the depth of the hardened layer. **Purpose.** Conducting a comparative analysis of the accuracy of the main analytical methods for calculating the temperature field of a metal plate during surface laser hardening to predict the depth of the hardened layer. The study aims to identify the most adequate analytical approach by comparing it with the results of numerical modeling. **Materials and Methods.** Three common analytical methods were selected for comparison: solving differential heat conduction equations using the Laplace transform; a model based on Green's functions for a moving Gaussian heat source; and a method based on a modified Rosenthal equation for a point heat source. The accuracy of the methods was assessed by the criterion of predicting the hardening zone depth at a fixed temperature ($T_z \approx 820$ °C for 40Kh steel). The results of numerical modeling performed using the author's computer program "Laser_hardening_of_metal" were used as a benchmark. Calculations were performed for a 40Kh steel plate at a laser power of 2000 W, a scanning speed of 10 mm/s, and a beam radius of 4.5 mm. **Results.** It was established that the analytical methods provide different estimates of the hardened layer depth: ≈ 1.3 mm (Laplace method), ≈ 0.6 mm (Green's function method), ≈ 0.8 mm (Rosenthal method). Numerical modeling yielded a value of 0.822 mm. The method based on solving the heat conduction equation using Green's functions for a moving Gaussian source showed the closest agreement with the numerical result. The method based on the modified Rosenthal equation showed a discrepancy with the numerical model of about 25 %, while the solution using the Laplace transform demonstrated the highest error (over 50 %), confirming its exclusively estimative nature. **Conclusion.** The comparative analysis allowed ranking the analytical methods by the accuracy of laser hardening depth prediction. For engineering calculations requiring high accuracy and computational resources, the method based on Green's functions is recommended. For rapid approximate estimates with acceptable error (about 20–25 %), the modified Rosenthal equation can be applied. The results of the work provide a rational basis for selecting a calculation method and optimizing the parameters of laser surface heat treatment.

Keywords: comparative analysis of methods, surface laser hardening, mathematical modeling of plate thermal state, computational modeling of plate thermal state

For citation: Yachikov I.M., Shatalov E.A. Analysis of temperature field calculation methods for a metal plate during surface laser hardening. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2026;26(1):33–42. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr260103

Введение

В настоящий момент экспериментальные исследования показывают, что процесс лазерной закалки металлических поверхностей не во всех случаях обеспечивает ожидаемые положительные результаты из-за существующего множества различных факторов, влияющих на процесс. Существующие математические модели по определению теплового состояния металлической поверхности при воздействии на нее лазерного луча не всегда дают адекватное представление из-за необходимости использования различных допущений. Это обуславливает необходимость проведения комплексного анализа и сравнительной оценки существующих методов расчета как численных, так и аналитических для рационального выбора параметров обработки для повышения точности прогнозирования глубины закаливаемого слоя.

В зарубежной и отечественной литературе предложено огромное множество интерпретаций аналитического расчета температурного поля при поверхностной лазерной термообработке металла. Однако большая их часть базируется на нескольких основных методах расчета.

Одним из наиболее распространенных является решение дифференциальных уравнений теплопроводности с использованием преобразования Лапласа. Данный метод в большей части литературы указывается как оценочный с невысокой точностью вычислений [1–6].

Менее распространенным методом выступает модель на основе решения дифференциальных уравнений теплопроводности методом функций Грина [7–9]. Стоит отметить, что основным недостатком получаемой математической модели является трудоемкость вычислений без использования ЭВМ.

В зарубежной литературе широко распространено использование аналитического метода, связанного с решением уравнения Розенталя для точечного источника тепла [10, 11].

Существующее многообразие аналитических моделей учитывает или не учитывает движение луча по поверхности металла, определяет одномерное, двухмерное или трехмерное температурное поле, имеет разную сложность и точность. Все это приводит к проблеме выбора необходимого метода решения для конкретного используемого оборудования и обрабатываемого металла при поверхностной лазерной закалке. Прежде всего, потому что каждый из данных методов имеет свои преимущества и недостатки. В одних случаях – это сложность вычислений, в других – неточность получаемых результатов.

Целью работы является проведение сравнительного анализа точности при лазерной термообработке металла для основных существующих аналитических методов расчета при их сравнении с численным методом прогнозирования глубины закаливаемого слоя.

1. Анализ существующих аналитических методов расчета теплового состояния металлической пластины при ее поверхностной лазерной закалке

Рассмотрим процесс движения лазера по поверхности металла со скоростью луча лазера v и радиусом пятна на поверхности металла r (рис. 1).

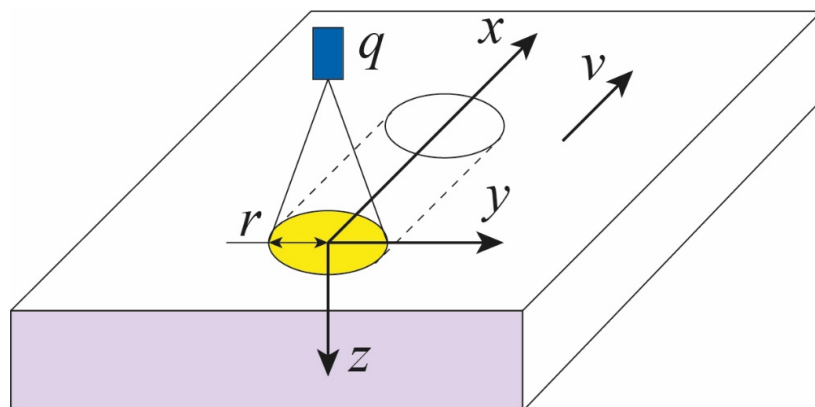


Рис. 1. Процесс движения лазерного луча при нагреве стальной заготовки
Fig. 1. Process of laser beam motion during heating of steel billet

Проведем сравнительный анализ трех основных существующих аналитических способов решения задачи нагрева полубесконечного стального образца лазерным лучом.

Для выполнения расчетов были систематизированы данные о теплофизических свойствах стали марки 40X. На основе табличных значений теплофизических свойств этой стали, представленных в работе [12], получены аппроксимирующие уравнения плотности, удельной теплоемкости, коэффициента теплопроводности от температуры и рассчитаны их среднеинтегральные значения в диапазоне температур $20 \leq t \leq 1100$ °C:

$$\rho_T(t) = 7830 - 0,283 \cdot t - 3,23 \cdot 10^{-5} t^2, \quad \rho = 7658 \text{ кг/м}^3;$$

$$C_T(t) = 432 + 0,371 \cdot t - 1,05 \cdot 10^{-4} t^2, \quad C = 597 \text{ Дж/(кг·К)};$$

$$\lambda_T(t) = 45,8 + 5,12 \cdot 10^{-3} \cdot t - 8,19 \cdot 10^{-5} t^2 + 5,79 \cdot 10^{-8} t^3, \quad \lambda = 34,6 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Также определено среднее значение коэффициента температуропроводности в указанном диапазоне температур $a = \lambda / (C \cdot \rho) \approx 7,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Все сравнительные расчеты проводились при следующих параметрах обработки металла: мощность лазера $q = 2000$ Вт; скорость движения лазерного луча по поверхности металла $v = 10$ мм/с; радиус пятна лазера на поверхности металла $r = 4,5$ мм; поглощательная способность металлической поверхности $A = 0,79$ и начальная температура образца, $T_0 = 29$ °С (см. рис. 1).

Будем выбирать температуру закалки на заданной глубине Δz по формуле $T_z = A_{c3} + \Delta t_p$, где перегрев от критической температуры A_{c3} составляет $\Delta t_p = 30\text{--}50$ °С. Для стали 40Х температура $A_{c3} = 782$ °С. Отсюда температура закалки должна составлять $T_z \approx 820$ °С.

Рассмотрим самый простой и широко распространенный способ, основанный на решении одномерного нестационарного уравнения теплопроводности при воздействии теплового потока на полубесконечную пластину с помощью преобразования Лапласа [13]. При среднем тепловом потоке $q/(\pi \cdot r^2)$ температурное поле под фокальным неподвижным пятном будет иметь вид [1]

$$T(z,t) = T_0 + \frac{2A \cdot q \cdot (a \cdot t)^{\frac{1}{2}}}{\pi \cdot \lambda \cdot r^2} \cdot \text{ierfc} \left(\frac{z}{2 \cdot (a \cdot t)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (1)$$

где $\text{ierfc}(x)$ – функция Лапласа или интеграл ошибок [2].

На рис. 2а представлены зависимости температуры от времени при различных расстояниях z от поверхности пластины.

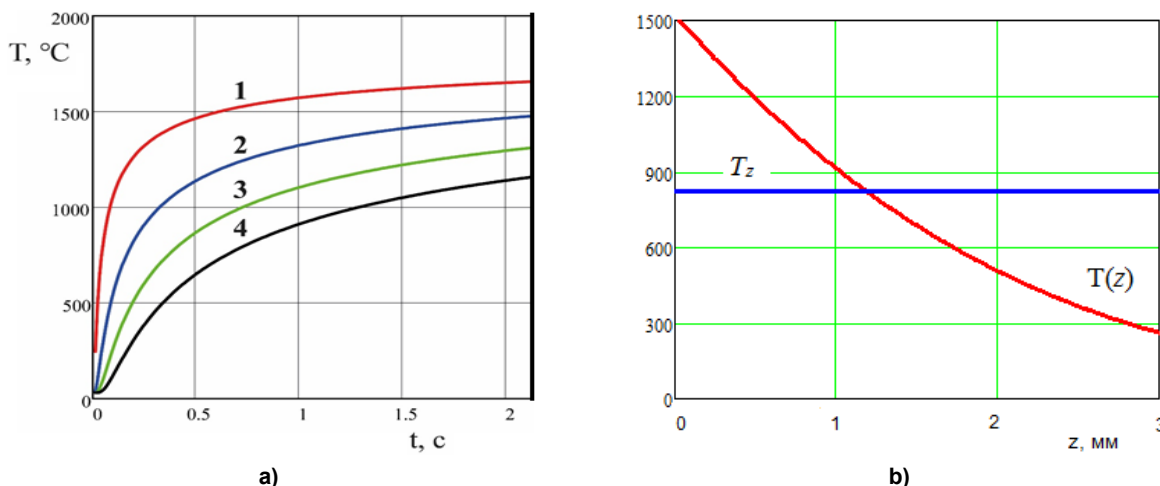


Рис. 2. Зависимости температуры от времени, рассчитанные по формуле (1) в разных точках по глубине от поверхности пластины (а) и зависимость температуры от расстояния от поверхности пластины в момент времени t_1 (б): 1 – $z = 0,5$ мм; 2 – $z = 1$ мм; 3 – $z = 1,5$ мм; 4 – $z = 2$ мм

Fig. 2. Temperature dependences on time calculated by formula (1) at different points in depth from the plate surface (a) and temperature dependence on distance from the plate surface at the moment of time t_1 (b): 1 – $z = 0,5$ mm; 2 – $z = 1$ mm; 3 – $z = 1,5$ mm; 4 – $z = 2$ mm

При движении луча по поверхности со скоростью v время воздействия q для конкретной точки может быть приближенно оценено как $t_1 = r/v \approx 0,45$ с. На рис. 2б показано распределение температуры по z в конце нагрева в момент времени t_1 . Видно, что глубина, где достигается температура закалки T_z , при заданных параметрах составляет примерно $z_2 = 1,3$ мм.

Понятно, что формула (1) имеет исключительно оценочный характер, так как не учитывает всего многообразия процесса: движение пятна лазера, распространение тепла по материалу в горизонтальных направлениях, плавление металла, его охлаждение и пр.

Рассмотрим следующий способ аналитического решения уравнения теплопроводности для задачи нагрева полубесконечного тела гауссовым источником тепла, движущимся по поверхности вдоль оси x со скоростью v . Если принять, что коэффициенты температуропроводности и теплопроводности a и λ соответственно не зависят от температуры, то, используя метод функций Грина для Гауссова распределения интенсивности источника тепла, можно получить значение максимальной температуры в виде интеграла [9]:

$$T(x, y, z) = T_0 + \frac{A \cdot q \cdot \sqrt{a}}{\pi^2 \cdot \lambda} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+vt)^2 + y^2}{4 \cdot a \cdot t + r^2} - \frac{z^2}{4 \cdot a \cdot t}} \frac{1}{\sqrt{t(4 \cdot a \cdot t + r^2)}} dt. \tag{2}$$

Обозначение выбранной системы координат показано на рис. 1. Проведем расчеты при $x = y = 0$. На рис. 3 показано распределение максимальной температуры по глубине z от поверхности пластины при разных скоростях движения луча. Видно, что глубина, где достигается температура закалки T_z , увеличивается при уменьшении скорости движения луча и при $v = 10$ мм/с составляет примерно $z_z = 0,6$ мм.

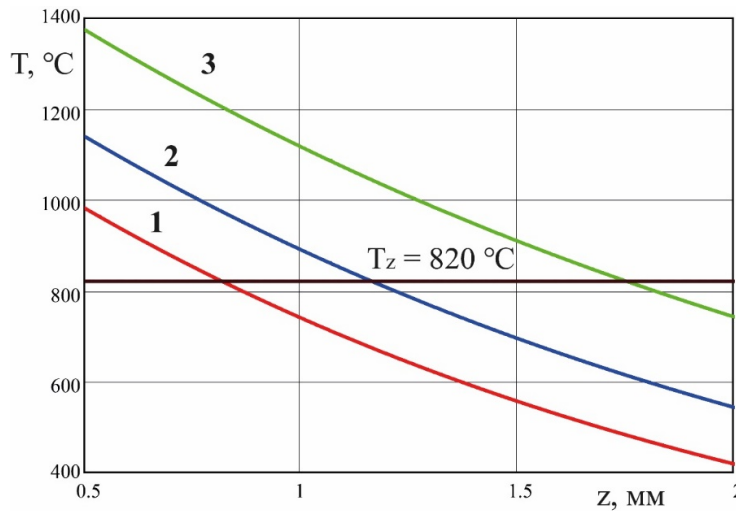


Рис. 3. Зависимости максимальной температуры по глубине от поверхности пластины, рассчитанные по формуле (2) при скорости движения луча: 1 – $v = 10$ мм/с; 2 – $v = 7,5$ мм/с; 3 – $v = 5$ мм/с
 Fig. 3. Dependences of the maximum temperature by depth from the plate surface calculated by formula (2) at the beam speed: 1 – $v = 10$ mm/s; 2 – $v = 7,5$ mm/s; 3 – $v = 5$ mm/s

Рассмотрим расчет температурного поля, полученный на основе уравнения для движущегося источника с гауссовым распределением энергии по толстой пластине в направлении x . Температурное поле, вызванное точечным источником, можно записать как уравнение Розенталя [14]

$$T(x, r) = T_0 + \frac{A \cdot q}{2\pi \cdot r \cdot \lambda} \exp\left(-\frac{v(x+r)}{2a}\right).$$

Если скорость v лазерного луча высока, то его тепловое воздействие можно рассматривать как линейный источник, имеющий конечную ширину в направлении y , но бесконечно тонкий в направлении x . В этом случае распределение температур от времени t по двум координатам z и y можно рассматривать как модификацию уравнения Розенталя [10]:

$$T(z, y, t) = T_0 + \frac{A \cdot q}{2\pi \cdot v \cdot \lambda \cdot (t \cdot (t + t_0))^{1/2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{(z+z_0)^2}{t} + \frac{y^2}{(t+t_0)}\right)}{4a}\right), \tag{3}$$

где $t_0 = \frac{r^2}{4a}$ – время, необходимое для рассеивания тепла на половине радиуса пятна; коэффициент

$z_0 = \left(\frac{\pi}{2 \cdot e} \left(\frac{a \cdot r}{C_1 \cdot v}\right)\right)^{1/2}$; C_1 – постоянная, определяющая время ввода $t_b = C_1 \frac{r}{v}$ тепловой энергии в заданную точку поверхности; $C_1 \approx 1$.

Для задачи закалки из уравнения (3) определяется глубина z_z , где достигается заданная температура T_z :

$$z_z = \left(\frac{2}{e \cdot \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A \cdot (q/v)}{\rho C_p \cdot (T_z - T_0)} \right)^{\frac{1}{2}} - z_0. \quad (4)$$

На рис. 4 приведены расчетные зависимости температуры от времени на оси луча ($y = 0$) на разном расстоянии от поверхности пластины. С увеличением расстояния z максимум температур наблюдается с увеличивающимся временным лагом.

На рис. 5 приведена зависимость глубины достижения температуры закалки T_z от мощности лазера при разной скорости движения луча по поверхности металла. Видно, что чем меньше скорость и больше мощность, тем выше глубина закалки. Правда, данная модель не учитывает расплавление поверхности металла, что, естественно, не всегда допустимо при проведении закалки.

Из рис. 5 видно, что глубина, где достигается температура закалки T_z , при $v = 10$ мм/с и $q = 2000$ Вт составляет примерно $z_z = 0,8$ мм.

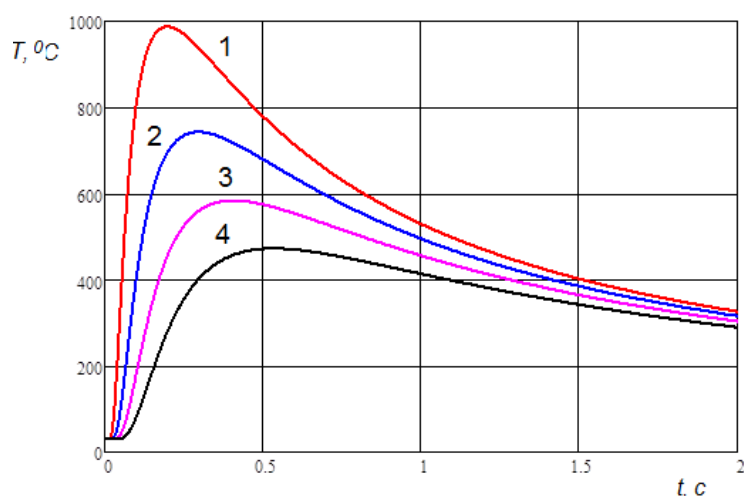


Рис. 4. Зависимости температуры от времени, полученные по формуле (3) при $y = 0$ на разном расстоянии от поверхности пластины: 1 – $z = 0,5$ мм; 2 – $z = 1$ мм; 3 – $z = 1,5$ мм; 4 – $z = 2$ мм

Fig. 4. Time dependences of temperature obtained by formula (3) at $y = 0$ at different distances from the plate surface: 1 – $z = 0,5$ mm; 2 – $z = 1$ mm; 3 – $z = 1,5$ mm; 4 – $z = 2$ mm

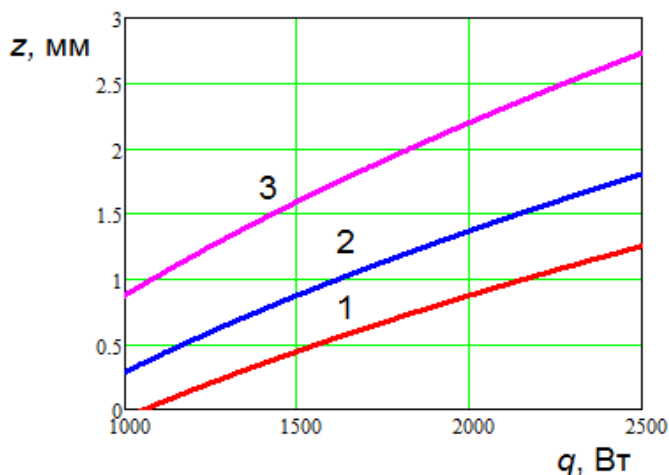


Рис. 5. Зависимость глубины достижения температуры закалки T_z от мощности лазера при скорости движения луча: 1 – $v = 10$ мм/с; 2 – $v = 7,5$ мм/с; 3 – $v = 5$ мм/с

Fig. 5. Dependence of the depth of reaching the quenching temperature T_z on the laser power at the beam speed: 1 – $v = 10$ mm/s; 2 – $v = 7,5$ mm/s; 3 – $v = 5$ mm/s

2. Расчет теплового состояния металлической пластины при ее поверхностной лазерной закалке численным методом и сравнение с аналитическими методами

В работе [15] на основе допущений и ограничений сформулирована математическая модель, представляющая собой краевую задачу расчета нестационарного теплового состояния металлической пластины и определение глубины ее прогрева и возможного проплавления при движении лазерного луча по ее поверхности. Предложен численный алгоритм и компьютерная программа *Laser hardening of metal*, которая позволяет определять нестационарное распределение температур и глубину закаленного слоя.

На основе компьютерного моделирования проведен расчет для пластины длиной $L = 50$ мм и толщиной $H = 6$ мм из стали марки 40X. На рис. 6 показана диаграмма распределения температур в пластине в разные моменты времени от начала прохода луча лазера вдоль оси Ox . Также по расчетам приведены максимальные температуры от времени на разной глубине от поверхности пластины (рис. 7).

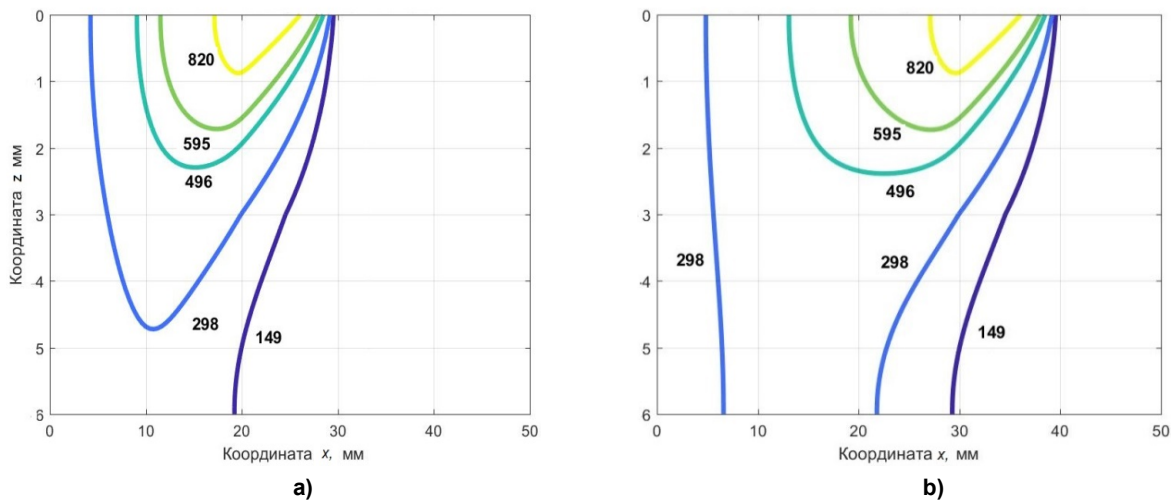


Рис. 6. Распределение температур в пластине при движении луча лазера: а – в момент времени 2 с от начала движения, координата центра фокального пятна 24,5 мм; б – в момент времени 3 с от начала движения, координата центра фокального пятна 34,5 мм. Цифрами обозначены температуры изотерм. Температура $T_z = 820$ °С соответствует температуре закалки

Fig. 6. Temperature distribution in the plate during the laser beam motion: а – at the moment of time 2 s from the beginning of motion, the focal spot center coordinate is 24.5 mm; б – at the moment of time 3 s from the beginning of motion, the focal spot center coordinate is 34.5 mm. Numbers indicate isotherm temperatures. The temperature of $T_z = 820$ °С corresponds to the quenching temperature

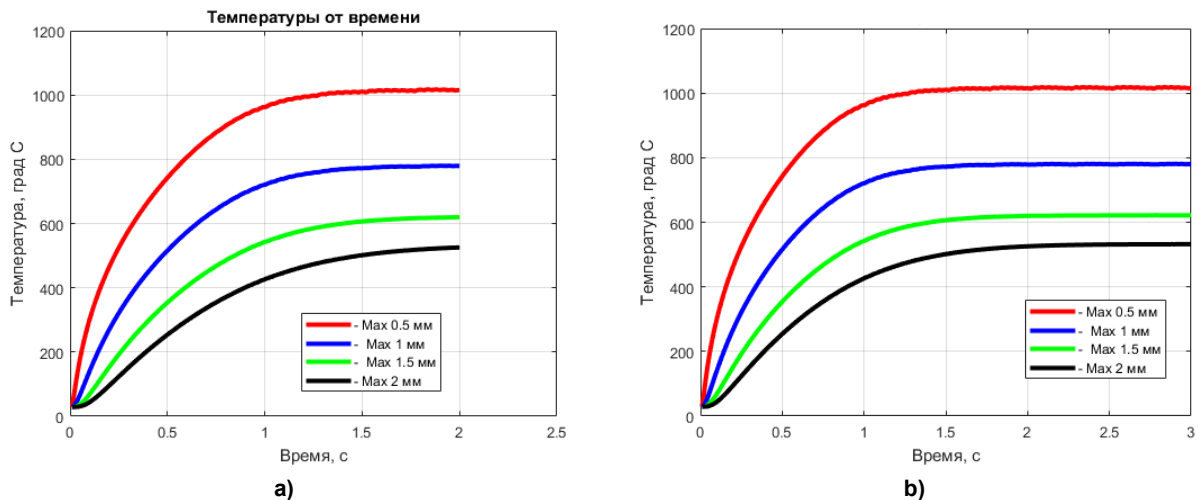


Рис. 7. Максимальные температуры от времени на разной глубине от поверхности пластины: а – по результатам расчета, показанного на рис. 6а; б – по результатам расчета на рис. 6б

Fig. 7. Maximum temperatures from time at different depths from the plate surface: а – according to the results of the calculation shown in Fig. 6a; б – according to the results of the calculation in Fig. 6b

В качестве сравнения на рис. 8 представлены зависимости температурного поля в пластине, полученные по двум аналитическим моделям и численному методу расчета.

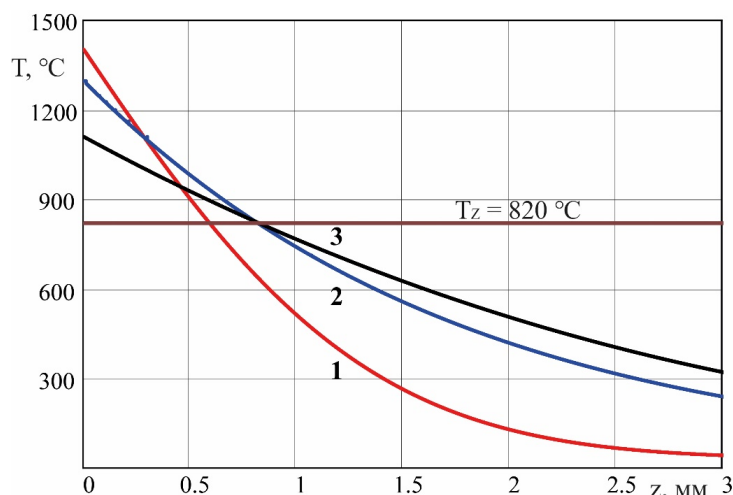


Рис. 8. Зависимости распределения максимальной температуры по глубине от поверхности пластины при лазерной термообработке металла для аналитических и численного способов расчета: 1 – по формуле (3); 2 – по формуле (2); 3 – численный метод расчета

Fig. 8. Dependencies of the distribution of the maximum temperature by depth from the surface of the plate during laser heat treatment of metal for analytical and numerical calculation methods: 1 – formula (3); 2 – formula (2); 3 – numerical solution

На основе проведенного моделирования получено, что для температуры закалки $T_z \approx 820$ °C следующие значения глубины упроченного слоя: для метода расчета на основе уравнения для движущегося источника (3) – 0,620 мм; для расчета на основе решения уравнения теплопроводности методом функций Грина (2) – 0,816 мм; для численного метода расчета – $z_z = 0,822$ мм.

Заключение

Таким образом, проведен сравнительный анализ точности прогнозирования глубины закаливаемого слоя для существующих аналитических методов расчета при лазерной термообработке металла. При сравнении их с численным расчетом наиболее близкий к нему результат показал метод, полученный по формуле на основе решения уравнения теплопроводности методом функций Грина при движении источника тепла, имеющего Гауссово распределение интенсивности. Этот метод можно рекомендовать при необходимости точного расчета теплового поля и при наличии ЭВМ. Если требуется найти приближенное решение без использования сложных вычислений с получаемой точностью около 20 %, то можно использовать вариант расчета по формуле, являющейся модификацией уравнения Розенталя.

Список литературы

1. Лосев В.Ф., Морозова Е.Ю., Ципилев В.П. Физические основы лазерной обработки материалов: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2011. 199 с. ISBN 978-5-4387-0052-4. Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/book/10277> (дата обращения: 22.02.2025). Режим доступа: для авторизир. пользователей.
2. Либенсон М.Н., Яковлев Е.Б., Шандыбина Г.Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика). В 3 ч. Ч. II: Лазерный нагрев и разрушение материалов: учеб. пособие / под общ. ред. В.П. Вейко. СПб: Изд-во НИУ ИТМО, 2014. 181 с.
3. Верещагин М.Н., Целуева С.Н., Целуев М.Ю. Модифицирование поверхностных слоев высокоэнергетической обработкой // Литьё и металлургия. 2019. № 2. С. 109–116. DOI: 10.21122/1683-6065-2019-2-109-116
4. Гуреев Г.Д., Гуреев Д.М. К вопросу о прогнозировании глубины зоны лазерной закалки // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2008. № 2 (17). С. 271-274. DOI: 10.14498/vsgtu638

5. Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. Томск: ООО «СТТ», 2016. 92 с.
6. Meijer J., van Sprang I. Optimization of Laser Beam Transformation Hardening by One Single Parameter. *CIRP annals: manufacturing technology*. 1991. Vol. 40, iss. 1. P. 183–186. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)61963-5
7. Веденов А.А., Гладуш Г.Г. Физические процессы при лазерной обработке материалов. М.: Энергоатомиздат, 1985. 208 с.
8. Рыкалин Н.Н. Расчёты тепловых процессов при сварке. М: Машгиз, 1951. 296 с.
9. Манако В.В., Путилин В.А. Аналитическое решение задачи нагрева образца движущимся лучом лазера // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2009. № 1 (18). С. 206–213. DOI: 10.14498/vsgtu664
10. Ashby M.F., Easterling K.E. The Transformation Hardening of Steel Surfaces by Laser Beams – I. Hypo-Eutectoid Steels // *Acta Metallurgica*. 1984. Vol. 32, no. 11. P. 1935–1948. DOI: 10.1016/0001-6160(84)90175-5
11. Babu P.D., Balamurugan K.R., Buvanashakaran G. Laser Surface Hardening: A Review // *International Journal of Surface Science and Engineering*. 2011. Vol. 5, no. 2/3. P. 131–151. DOI: 10.1504/IJSURFSE.2011.041398
12. Стали и сплавы. Марочник: справ. / под ред. В.Г. Сорокина, М.А. Гервасьева. М.: Интермет инжиниринг, 2001. 608 с.
13. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
14. Rosenthal D. The Theory of Moving Sources of Heat and Its Application to Metal Treatments // *Transactions of the ASME*. 1946. Vol. 68. P. 849–866.
15. Naprimerova E., Yachikov I., Latifulina Yu. et al. Mathematical Modeling of Non-Stationary Thermal State of Processed Metal during Its Laser Hardening // *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*. 2025. Vol. 60, no. 1. P. 121–129. DOI: 10.59957/jctm.v60.i1.2025.12

References

1. Losev V.F., Morozova E.Yu., Tsipilev V.P. *Fizicheskie osnovy lazernoy obrabotki materialov: ucheb. posobie* [Physical fundamentals of laser processing of materials. Textbook]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University Publ., 2011. 199 p. (In Russ.) ISBN 978-5-4387-0052-4.
2. Libenson M.N., Yakovlev E.B., Shandybina G.D. *Vzaimodeystvie lazernogo izlucheniya s veshchestvom (silovaya optika). V 3 ch. Ch. II: Lazernyy nagrev i razrushenie materialov: ucheb. posobie* [Interaction of Laser Radiation with Matter (Power Optics). In 3 parts. Part II. Laser Heating and Destruction of Materials]. Ed. by V.P. Veyko. St. Petersburg: ITMO Univ. Publ., 2014. 181 p. (In Russ.)
3. Vereschagin M.N., Tselueva S.N., Tseluev M.Yu. Modification of surface layers by high energy treatment. *Foundry production and metallurgy*. 2019;(2):109–116. (In Russ.) DOI: 10.21122/1683-6065-2019-2-109-116
4. Gureev G.D., Gureev D.M. To the question of laser hardening zone depth forecast. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2008;2(17):271–274. (In Russ.) DOI: 10.14498/vsgtu638
5. Kraynov A.Yu., Minkov L.L. *Chislennyye metody resheniya zadach teplo- i massoperenosa: ucheb. posobie* [Numerical Methods for Solving Heat and Mass Transfer Problems. Textbook]. Tomsk: STT LLC, 2016. 92 p. (In Russ.)
6. Meijer J., van Sprang I. Optimization of Laser Beam Transformation Hardening by One Single Parameter. *CIRP annals: manufacturing technology*. 1991;40(1):183–186. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)61963-5
7. Vedenov A.A., Gladush G.G. *Fizicheskie protsessy pri lazernoy obrabotke materialov* [Physical Processes in Laser Material Processing]. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1985. 208 p. (In Russ.)
8. Rykalin N.N. *Raschetny teplovykh protsessov pri svarke* [Calculations of Thermal Processes in Welding]. Moscow: Mashgiz Publ., 1951. 296 p. (In Russ.)
9. Manako V.V., Putilin V.A. Analytical task solution for heating by moving laser beam. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2009;1(18):206–213. (In Russ.) DOI: 10.14498/vsgtu664

10. Ashby M.F., Easterling K.E. The Transformation Hardening of Steel Surfaces by Laser Beams – I. Hypo-Eutectoid Steels. *Acta Metallurgica*. 1984;32(11):1935–1948. DOI: 10.1016/0001-6160(84)90175-5
11. Babu P.D., Balamurugan K.R., Buvanashakaran G. Laser Surface Hardening: A Review. *International Journal of Surface Science and Engineering*. 2011;5(2/3):131–151. DOI: 10.1504/IJSURFSE.2011.041398
12. Sorokin V.G., Gervas'ev M.A. (Eds.). *Stali i splavy. Marochnik: sprav.* [Steels and Alloys. Grade Guide]. Moscow: Intermet Inzhiniring Publ., 2001. 608 p. (In Russ.)
13. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1967. 599 p. (In Russ.)
14. Rosenthal D. The Theory of Moving Sources of Heat and Its Application to Metal Treatments. *Transactions of the ASME*. 1946;68:849–866.
15. Naprimerova E., Yachikov I., Latifulina Yu. et al. Mathematical Modeling of Non-Stationary Thermal State of Processed Metal during Its Laser Hardening. *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*. 2025;60(1):121–129. DOI: 10.59957/jctm.v60.i1.2025.12

Информация об авторах

Ячиков Игорь Михайлович, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; iachikovim@susu.ru.

Шаталов Егор Андреевич, аспирант кафедры информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; schatalovegor@yandex.ru.

Information about the authors

Igor M. Yachikov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Information and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; iachikovim@susu.ru.

Egor A. Shatalov, Postgraduate Student of the Department of Information and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; schatalovegor@yandex.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 21.09.2025

The article was submitted 21.09.2025