

КОНСИСТЕНТНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ВИЗУАЛЬНО-ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С БЛОЧНЫМ КОМПЛЕКСИРУЮЩИМ ФИЛЬТРОМ

А.Л. Шестаков, a.l.shestakov@susu.ru

Н.И. Циоплиакис, ntsiopliakis@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0008-0530-0500>

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. Математические модели для монокулярных визуально-инерциальных навигационных систем (ВИНС) рассматриваются в контексте известных ограничений рекуррентных алгоритмов фильтрации – проблем консистентности и вычислительной эффективности. **Цель исследования** заключается в разработке консистентных моделей ошибок ВИНС с отслеживанием двух типов визуальных признаков: опорных точек с параметризацией обратной глубины и опорных маркеров типа Agiso, используемых в качестве известных ориентиров. Модели адаптированы для использования в ВИНС на основе быстрого блочного фильтра Калмана (ББФК) – полностью рекуррентного алгоритма, приближающего оценки обобщенного фильтра Калмана (ОФК) при существенно меньших вычислительных затратах. **Материалы и методы.** Математические модели ВИНС линеаризуются относительно право-инвариантных ошибок, анализируется поведение моделей в условиях ненаблюдаемых преобразований параметров ВИНС. Численное тестирование ББФК-ВИНС с разработанными моделями проведено в среде MATLAB с использованием стандартных реализаций KLT-трекера опорных точек и детектора Agiso-маркеров. **Результаты.** Эффективность разработанных моделей для ББФК-ВИНС подтверждена численным моделированием сценария посадки с использованием KLT-трекера и детектора Agiso-маркеров. Показана согласованность расчетных диапазонов 3σ для ошибок оценок комплексирующего фильтра и фактических значений погрешности, отсутствие ложной наблюдаемости, а также ускорение вычислений ББФК по сравнению с обобщенным фильтром Калмана при близости формируемых ими оценок. **Заключение.** Проведенное исследование подтверждает, что при применении в рекуррентных алгоритмах фильтрации разработанные модели позволяют устранить ложную наблюдаемость ошибок оценивания абсолютных позиционных координат и угла рыскания, а также обеспечивают оценивание в условиях большой начальной неопределенности оценок. Перспективы дальнейшей работы связаны с рассмотрением более сложных и продолжительных сценариев движения.

Ключевые слова: рекуррентная фильтрация, ВИНС, маркеры Agiso, параметризация обратной глубины, право-инвариантные ошибки

Для цитирования: Шестаков А.Л., Циоплиакис Н.И. Консистентные инвариантные математические модели для визуально-инерциальной навигационной системы с блочным комплексирующим фильтром // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2026. Т. 26, № 1. С. 43–60. DOI: 10.14529/ctcr260104

CONSISTENT INVARIANT MATHEMATICAL MODELS FOR A VISUAL-INERTIAL NAVIGATION SYSTEM WITH A BLOCK FUSION FILTER

A.L. Shestakov, a.l.shestakov@susu.ru

N.I. Tsiopliakis, ntsiopliakis@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0008-0530-0500>

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. Mathematical models for monocular visual-inertial navigation systems (VINS) are considered in the context of well-known limitations of recursive filtering algorithms, namely consistency issues and computational efficiency. **The aim** of the study is to develop consistent VINS error models with tracking of two types of visual features: point landmarks parameterized by inverse depth and ArUco fiducial markers used as known landmarks. The proposed models are adapted for use in a VINS based on a Fast Block Kalman Filter (FBKF), a fully recursive algorithm that approximates the estimates of the Extended Kalman Filter (EKF) at significantly lower computational cost. **Materials and Methods.** The mathematical models of the VINS are linearized with respect to right-invariant errors, and the behavior of the models is analyzed under unobservable transformations of the VINS parameters. Numerical testing of the FBKF-based VINS with the developed models was carried out in the MATLAB environment using standard implementations of a KLT point tracker and an ArUco marker detector. **Results.** The effectiveness of the developed models for the FBKF-based VINS is confirmed by numerical simulation of a landing scenario using a KLT tracker and an ArUco marker detector. Consistency between the predicted 3σ confidence bounds of the fusion filter estimation errors and the actual error values is demonstrated, along with the absence of false observability and an acceleration of FBKF computations compared to the Extended Kalman Filter while maintaining comparable estimation accuracy. **Conclusion.** The conducted study confirms that, when applied in recursive filtering algorithms, the proposed models eliminate false observability of absolute position and yaw estimation errors and enable reliable estimation under conditions of large initial uncertainty. Future work will focus on the analysis of more complex and longer-duration motion scenarios.

Keywords: recursive filtering, VINS, ArUco markers, inverse depth parameterization, right-invariant errors

For citation: Shestakov A.L., Tsiopliakis N.I. Consistent invariant mathematical models for a visual-inertial navigation system with a block fusion filter. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2026;26(1):43–60. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr260104

Введение

Визуально-инерциальные навигационные системы (ВИНС) оценивают положение и ориентацию подвижного объекта по данным инерциальных датчиков и бортовой видеокамеры. Распространенный вариант ВИНС объединяет бесплатформенную инерциальную навигационную систему (БИНС) с системой технического зрения (СТЗ), отслеживающей неподвижные визуально-контрастные детали окружающей среды, так называемые **визуальные признаки**, на изображениях с видеокамеры. Поскольку перемещение проекций визуальных признаков на плоскость изображения зависит от собственного движения подвижного объекта, данные СТЗ могут служить в качестве источника корректирующей информации для БИНС, дополняя стандартные источники, такие как сигналы глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС).

Алгоритмы ВИНС, использующие обобщенный фильтр Калмана (ОФК) [1, 2] для рекуррентного оценивания вектора навигационных параметров подвижного объекта и постоянного вектора параметров положения N визуальных признаков, имеют следующие два основных недостатка: (I) кубическую вычислительную сложность относительно числа визуальных признаков N , ограничивающую число отслеживаемых признаков; (II) неконсистентность линеаризованной математической модели ошибок ВИНС, проявляющуюся в ложной наблюдаемости ошибок оценивания абсолютных позиционных координат и угла рыскания по данным относительного расположения объекта и визуальных признаков [3–6].

В настоящее время в ВИНС широко используются быстрые оконные фильтры типа Multi-State Constraint Kalman Filter (MSCKF) [3, 7–11] с линейной от N вычислительной сложностью, исключаящие параметры положения визуальных признаков из уравнений измерения и вектора состояния. Вместо совместного оценивания навигационных параметров и параметров положения признаков в MSCKF-ВИНС формулируется задача оценивания последовательности значений навигационных параметров объекта в пределах скользящего временного окна, что приводит к снижению размерности вектора состояния и вычислительной нагрузки. Оконные фильтры типа MSCKF демонстрируют сниженную погрешность линеаризации по сравнению с полностью рекуррентными ОФК-ВИНС благодаря отложенной линеаризации [7], позволяющей вычислять матрицы Якоби уравнений измерения с использованием более точных оценок положения признаков. С другой стороны, недостатком MSCKF по сравнению с полностью рекуррентным ОФК является ограничение максимальной длительности отслеживания каждого признака шириной временного окна, что не оптимально в условиях, допускающих длительный обзор одних и тех же признаков. В случае использования монокулярной видеокамеры в ВИНС с отслеживанием опорных точек (точечных визуальных признаков), когда в момент первого обнаружения точки известно лишь направление на нее, но не расстояние, снизить погрешность линеаризации и в MSCKF- и в ОФК-ВИНС позволяет параметризация обратной глубины [7, 12–15].

Для борьбы с неконсистентностью в MSCKF- и ОФК-ВИНС применяются такие методы, как вычисление матриц Якоби только по первым оценкам (First Estimation Jacobians, FEJ) [5, 9], внедрение ограничений наблюдаемости (Observability Constrains, OC) [4, 5], параметризация в связанной системе координат подвижного объекта [11, 16], применение инвариантных моделей ошибок [3, 17–20]. По сравнению со стандартной параметризацией в неподвижной опорной системе координат недостатком параметризации в связанной системе координат является избыточный дрейф оценок положения и угла рыскания. FEJ и OC увеличивают погрешность линеаризации, так как предполагают искусственную модификацию точек линеаризации или непосредственно матриц Якоби [4, 5, 9]. При использовании инвариантных моделей ошибок консистентность рекуррентных фильтров ВИНС достигается более естественным образом – за счет учета свойств групп Ли, порожденных преобразованиями ориентации и положения подвижного объекта и признаков [3, 17]. Кроме того, было показано, что рекуррентные ОФК-алгоритмы с инвариантными моделями ошибок достигают примерно той же точности [17], что и алгоритмы инкрементального сглаживания [21, 22].

Право-инвариантная модель ошибок для ВИНС с параметризацией опорных точек декартовыми координатами, анализ ее консистентности и адаптация под архитектуру MSCKF приведены в статье [3], однако в ней не рассмотрены вопросы введения инвариантных ошибок в модель с параметризацией обратной глубины. В статье [20] была рассмотрена право-инвариантная модель ошибок системы визуальной одометрии с отслеживанием 3D-объектов с неизвестным заранее положением.

Целью данной работы является разработка консистентных право-инвариантных моделей для монокулярной ВИНС на основе быстрого блочного фильтра Калмана (ББФК) с отслеживанием опорных точек с параметризацией обратной глубины, а также опорных маркеров типа Aruco [23], используемых в качестве ориентиров с заранее известными оценками положения. Алгоритм ББФК представляет собой реализацию полностью рекуррентного фильтра, позволяющую получать приближенные к оценкам ОФК оценки со сниженной, линейной от числа визуальных признаков N вычислительной сложностью, что достигается за счет экономичной аппроксимации совместной матрицы ковариаций ошибок признаков по методу главных компонент [24].

1. Математические модели ВИНС

1.1. Параметры модели ошибок ББФК-ВИНС

ББФК использует линеаризованную модель ошибок ВИНС [24]. В вектор ошибок $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_s^T, \mathbf{X}_{1...N}^T]^T$ входят: \mathbf{X}_s – вектор ошибок оценивания параметров ВИНС; \mathbf{X}_i , $i = 1...N$ – векторы ошибок оценивания параметров N визуальных признаков. Вектор оценок параметров ВИНС $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}_s^T, \hat{\mathbf{x}}_{1...N}^T]^T$ выражается через вектор их действительных значений $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T, \mathbf{x}_{1...N}^T]^T$ и вектор ошибок \mathbf{X} посредством некоторого оператора ретракции \oplus [25]: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{X}$.

Линеаризованная модель ошибок измерений, используемая в ББФК, описывает вектор невязок \mathbf{Y}_i как линейную комбинацию шума измерений, ошибок параметров БИНС и ошибок параметров расположения i -го признака:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{M}_{iv} \mathbf{v}_i - \mathbf{H}_{is} \mathbf{X}_s - \mathbf{H}_i \mathbf{X}_i, \quad i = 1 \dots N, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_i \sim \mathcal{N}(0, I)$ – нормированный вектор шума измерений;

\mathbf{M}_{iv} , \mathbf{H}_{is} , \mathbf{H}_i – матрицы-параметры модели ошибок измерений.

Линеаризованная модель динамики ошибок ВИНС в дискретном времени с шагом Δt , используемая в ББФК на этапе прогноза, определяет изменение ошибок за время Δt :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}_s &= \mathbf{F}_s \mathbf{X}_s + \mathbf{M}_{ws} \mathbf{w}_s, \\ \tilde{\mathbf{X}}_i &= \mathbf{F}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{F}_{is} \mathbf{X}_s + \mathbf{M}_{iw} \mathbf{w}_i + \mathbf{M}_{iws} \mathbf{w}_s, \quad i = 1 \dots N, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_s$, $\tilde{\mathbf{X}}_i$ – ошибки после этапа прогноза \mathbf{X}_s после этапа прогноза (временные индексы опущены для улучшения читаемости);

$\mathbf{w}_s \sim \mathcal{N}(0, I)$, $\mathbf{w}_i \sim \mathcal{N}(0, I)$, $i = 1 \dots N$ – нормированные векторы динамического шума, $\text{cov}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_s) = 0$, $\text{cov}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$ при $j \neq i$;

\mathbf{F}_s , \mathbf{M}_{ws} , \mathbf{F}_i , \mathbf{F}_{is} , \mathbf{M}_{iw} , \mathbf{M}_{iws} – матрицы-параметры модели динамики ошибок.

1.2. Право-инвариантная ошибка на группе SE(3)

В ВИНС оценивание положения подвижного объекта в опорной системе координат \mathbf{r}_h осуществляется с использованием измерений БИНС и СТЗ в связанных с подвижным объектом осях, что приводит к нелинейной зависимости между ошибками положения и ориентации. При линеаризации относительно этих ошибок матрицы Якоби для ошибок ориентации зависят от радиус-вектора положения, который известен с погрешностью; неточность расчетных матриц Якоби приводит к ложной наблюдаемости [3–5].

Решением данной проблемы является линеаризация относительно право-инвариантных ошибок положения ориентации [10, 17].

Рассмотрим группу специальных евклидовых преобразований SE(3), элементы которой описывают ориентацию и положение твердого тела и могут быть представлены в виде блочных матриц перехода 4×4:

$$T_{hb} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{hb} & \mathbf{r}_h \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{hb} \in SE(3), \quad \mathbf{C}_{hb} \in SO(3), \quad \mathbf{r}_h \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

где \mathbf{C}_{hb} – матрица перехода из опорной СК в связанную с подвижным объектом СК (ССК).

Право-инвариантная ошибка оценки матрицы перехода $\hat{T}_{hb} \in SE(3)$ определяется следующим образом:

$$\eta^R = \hat{T}_{hb} T_{hb}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{hb} \mathbf{C}_{hb}^T & \hat{\mathbf{r}}_h - \hat{\mathbf{C}}_{hb} \mathbf{C}_{hb}^T \mathbf{r}_h \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp^{SO(3)}(\delta \boldsymbol{\varphi}_h) & \delta \mathbf{r}_h \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^R \in SE(3), \quad (4)$$

где $\hat{T}_{hb} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{hb} & \hat{\mathbf{r}}_h \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$; $\delta \mathbf{r}_h = \hat{\mathbf{r}}_h - \mathbf{C}_{hb} \mathbf{r}_h$, $\delta \boldsymbol{\varphi}_h = \log^{SO(3)}(\hat{\mathbf{C}}_{hb} \mathbf{C}_{hb}^T)$.

В вектор ошибок фильтра право-инвариантная ошибка включается посредством 6-мерного векторного представления $\boldsymbol{\xi}$ в касательном пространстве $\mathfrak{se}(3)$. Касательное пространство связано с группой экспоненциальным преобразованием:

$$\boldsymbol{\xi} = \log^{SE(3)}(\eta^R) = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varphi}_\xi \\ \delta \mathbf{r}_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varphi}_h^T, \left(\left[J_l^{SO(3)}(\delta \boldsymbol{\varphi}_h) \right]^{-1} \delta \mathbf{r}_h \right)^T \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{se}(3), \quad (5)$$

$$\exp^{SE(3)}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \exp^{SO(3)}(\delta \boldsymbol{\varphi}_\xi) & J_l^{SO(3)}(\delta \boldsymbol{\varphi}_\xi) \delta \mathbf{r}_\xi \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & 1 \end{pmatrix} = \eta^R, \quad (6)$$

где $J_l^{SO(3)}(\cdot)$ – левый якобиан SO(3).

Так как $\delta\varphi_\xi = \delta\varphi_h$, и $\delta r_\xi = \delta r_h + o(\|S(\delta\varphi_h)\delta r_h\|) \approx \delta r_h$, то модели, линеаризованные относительно параметров ξ и η^R , совпадают.

Линейные модели ошибок с гауссовской аппроксимацией плотности вероятности формулируются именно в $\mathfrak{se}(3)$ – в векторном пространстве, где они корректны с точки зрения геометрии.

Группа $SE(3)$ может быть расширена за счет рассмотрения дополнительных векторов в опорной СК, таких как вектор скорости подвижного объекта, радиус-векторы положения визуальных признаков. На дополнительные векторы распространяются все те же правила преобразования, что и на r_h .

1.3. Нелинейные математические модели БИНС

Введем вектор параметров БИНС со следующим порядком компонентов:

$$\mathbf{x}_s 16 \times 1 = \left[\mathbf{q}_{hb}^T 4 \times 1 \quad \mathbf{r}_h^T 3 \times 1 \quad \mathbf{v}_h^T 3 \times 1 \quad \mathbf{b}_{gyr}^T 3 \times 1 \quad \mathbf{b}_{acc}^T 3 \times 1 \right]^T, \quad (7)$$

где \mathbf{q}_{hb} – кватернион перехода из опорной СК в ССК;

$\mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h$ – векторы положения и скорости подвижного объекта в опорной СК;

$\mathbf{b}_{gyr}, \mathbf{b}_{acc}$ – смещения нуля ДУС и акселерометра соответственно.

Здесь и далее принято, что ось OZ_h опорной СК направлена по местной вертикали в точке расположения ее центра; с поворотом вокруг оси OZ_h свяжем угол рыскания.

Модели измерений трехосевых ДУС ω_{gyr} и акселерометра \mathbf{n}_{acc} учитывают смещения нуля и белый шум измерений:

$$\omega_{gyr} 3 \times 1 = \mathbf{C}_{hb}^T \omega_h - \mathbf{b}_{gyr} + \mathbf{v}_\omega, \quad \mathbf{n}_{acc} 3 \times 1 = \mathbf{C}_{hb}^T (\mathbf{a}_h - \mathbf{g}_h) - \mathbf{b}_{acc} + \mathbf{v}_n, \quad (8)$$

где $\mathbf{C}_{hb} = C(\mathbf{q}_{hb})$ – матрица перехода из опорной СК в ССК;

$\omega_h, \mathbf{a}_h, \mathbf{g}_h$ – векторы угловой скорости, линейного ускорения и гравитационного ускорения в опорной СК соответственно;

$\mathbf{v}_\omega, \mathbf{v}_n$ – белые гауссовы шумы измерений.

Инерциальные оценки рассчитываются путем интегрирования уравнений БИНС:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{hb} = 1/2 \hat{\mathbf{q}}_{hb} \circ (\omega_{gyr} + \hat{\mathbf{b}}_{gyr}), \quad \dot{\hat{\mathbf{v}}}_h = \hat{\mathbf{C}}_{hb} (\mathbf{n}_{acc} + \hat{\mathbf{b}}_{acc}) + \mathbf{g}_h, \quad \dot{\hat{\mathbf{r}}}_h = \hat{\mathbf{v}}_h, \quad (9)$$

где $\mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h$ – векторы положения и скорости подвижного объекта в опорной СК.

Измерения СТЗ представляют собой однородные координаты \mathbf{q}_i^{CV} проекции i -й опорной точки на плоскость изображения видеокамеры, чему соответствует следующая нелинейная модель измерений:

$$\mathbf{q}_i^{CV} 2 \times 1 = h(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i^{CV}) := \pi_c \left(\mathbf{C}_{hb}^T (\mathbf{r}_h^i - \mathbf{r}_h) - \mathbf{d}_b^c \right) + \mathbf{v}_i^{CV}, \quad \pi_c(\cdot) = \pi(\mathbf{C}_{bc}^T(\cdot)), \quad (10)$$

где \mathbf{v}_i^{CV} – дискретный белый шум измерений;

\mathbf{C}_{bc} – матрица перехода из ССК в СК камеры;

\mathbf{d}_b^c – вектор положения центра СК камеры в ССК;

$\pi(\mathbf{l}_c) = [\mathbf{l}_{c1}, \mathbf{l}_{c2}]^T / \mathbf{l}_{c3}$ – функция проецирования на плоскость $z_c = 1$.

Модель измерений по опорным точкам с параметризацией обратной глубины. При параметризации обратной глубины [12] радиус-вектор положения i -й опорной точки в опорной СК выражается как:

$$\mathbf{r}_h^i = \mathbf{r}_h^{ci} + \frac{1}{\rho^i} \mathbf{m}_h^i, \quad \mathbf{x}_i^{(idp)} 7 \times 1 = \left[\mathbf{r}_h^{ciT} 3 \times 1, \mathbf{m}_h^{iT} 3 \times 1, \rho^i 1 \times 1 \right]^T, \quad i = 1 \dots N^{(idp)}, \quad (11)$$

где \mathbf{r}_h^{ci} – радиус-вектор центра СК камеры в момент первого наблюдения i -й опорной точки;

\mathbf{m}_h^i – вектор направления на i -ю опорную точку в момент ее первого наблюдения;

ρ^i – обратная глубина положения i -й опорной точки вдоль луча, исходящего из точки \mathbf{r}_h^{ci} вдоль \mathbf{m}_h^i ;

$\mathbf{x}_i^{(idp)}$ – вектор параметров обратной глубины.

Запишем на основе (10) и (11) выражение для измеренных СТЗ однородных координат точки с параметризацией обратной глубины:

$$\mathbf{q}_i = \pi_c \left(\rho^i \left[\mathbf{C}_{hb}^T (\mathbf{r}_h^{ci} - \mathbf{r}_h) - \mathbf{d}_b^c \right] + \mathbf{C}_{hb}^T \mathbf{m}_h^i \right) + \mathbf{v}_i^{CV}. \quad (10a)$$

Аргумент функции проецирования $\pi_c(\cdot)$ в (10a) был домножен на скаляр ρ^i , что не меняет ее значения, но позволяет повысить устойчивость при $\rho^i \rightarrow 0$ [12].

Модель измерений по опорным маркерам. СТЗ производит распознавание квадратного опорного маркера, идентифицирует его ID и определяет однородные координаты q^{iCV} , $i = 1 \dots 4$, проекций его 4 угловых точек на плоскость изображения (рис. 1a).

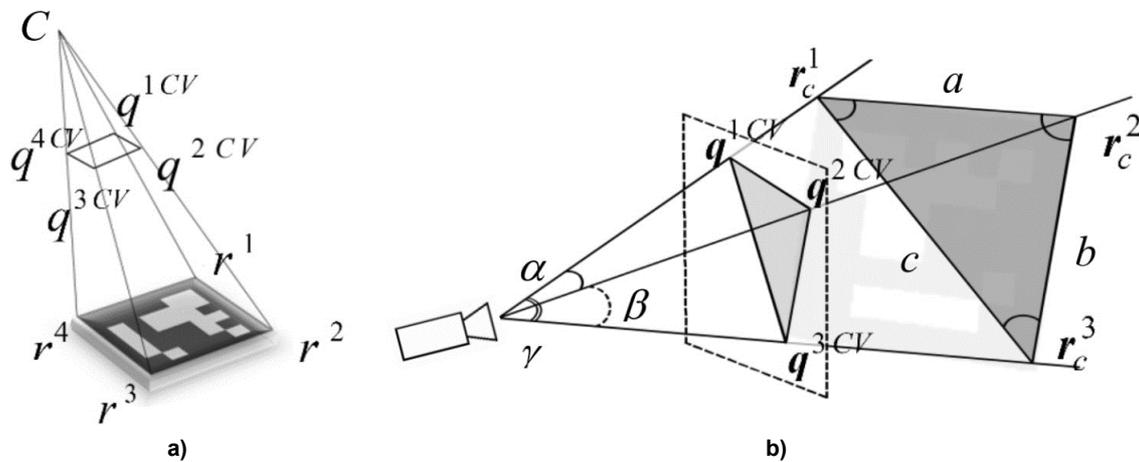


Рис. 1. Измерения СТЗ по опорным маркерам:
a – однородные координаты углов маркера; b – использование в P3P
Fig. 1. CV measurements using fiducial markers:
a – homogeneous coordinates of the marker corners; b – use in the P3P

Поскольку длина стороны маркера заранее известна, положение и ориентация маркера относительно монокулярной видеокамеры могут быть оценены по единственному изображению при помощи алгоритма perspective-3-point (P3P) [26]. P3P-оценка матрицы перехода $\hat{T}_{cm}^{P3P} \in SE(3)$, описывающей положение и ориентацию маркера относительно камеры, находится из условия совпадения расчетных и измеренных проекций его трех угловых точек $\mathbf{r}_c^1, \mathbf{r}_c^2, \mathbf{r}_c^3$ (рис. 1b):

$$\mathbf{q}^{iCV} = \pi \left(\hat{T}_{cm}^{P3P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{r}_m^i & \mathbf{r}_m^i & \mathbf{r}_m^i \end{bmatrix} \right), \quad i = 1 \dots 3, \quad (12)$$

где \mathbf{r}_m^i – координаты угловых точек маркера в СК маркера.

Задача P3P может иметь до четырех различных решений; выделение одного решения производится по критерию минимальности ошибки перепроектирования неиспользованной точки \mathbf{r}_c^4 .

Зная \hat{T}_{cm}^{P3P} , а также положение и ориентацию маркера в опорной СК, можно оценить положение подвижного объекта в опорной СК. Введем векторы параметров маркеров:

$$\mathbf{x}_m^{(mrk)}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{hm}^T_{4 \times 1} & \mathbf{r}_h^m{}^T_{3 \times 1} \end{bmatrix}^T, \quad m = 1 \dots N^{(mrk)}, \quad (13)$$

где \mathbf{q}_{hb} – кватернион перехода из опорной СК в СК m -го маркера;

\mathbf{r}_h^m – вектор положения m -го маркера в опорной СК.

1.4. Выбор параметризации моделей ошибок

Введем вектор ошибок БИНС \mathbf{X}_s , включающий право-инвариантные ошибки (5):

$$\mathbf{X}_{s\ 15 \times 1} = \left[\delta\boldsymbol{\varphi}_{\xi}^T{}_{3 \times 1} \quad \delta\mathbf{r}_{\xi}^T{}_{3 \times 1} \quad \delta\mathbf{v}_{\xi}^T{}_{3 \times 1} \quad \delta\mathbf{b}_{gyr}^T{}_{3 \times 1} \quad \delta\mathbf{b}_{acc}^T{}_{3 \times 1} \right]^T. \quad (14)$$

Будем рассматривать вектор ошибок i -й опорной точки с параметризацией обратной глубины следующего вида:

$$\mathbf{X}_i^{(idp)} = \left[\delta\mathbf{r}_{\xi}^{ciT}{}_{3 \times 1}, \delta\mathbf{m}_{\xi}^{iT}{}_{3 \times 1}, \delta\rho^i{}_{1 \times 1} \right]^T, \quad (15)$$

где $\delta\mathbf{r}_{\xi}^{ci} = J_{l(\delta\varphi_h)}^{-1} \delta\mathbf{r}_h^{ci}$;

$$\delta\mathbf{m}_{\xi}^{ci} = J_{l(\delta\varphi_h)}^{-1} \delta\mathbf{m}_h^{ci};$$

$$\delta\mathbf{r}_h^{ci} = \hat{\mathbf{r}}_h^{ci} - \delta\mathbf{C}_{hb} \mathbf{r}_h^{ci} - \text{право-инвариантная ошибка оценки } \mathbf{r}_h^{ci};$$

$$\delta\mathbf{m}_h^{ci} = \hat{\mathbf{m}}_h^{ci} - \delta\mathbf{C}_{hb} \mathbf{m}_h^{ci} - \text{право-инвариантная ошибка оценки } \mathbf{m}_h^{ci};$$

$$\delta\rho^i - \text{ошибка оценки обратной глубины } \rho^i.$$

Выбранный вектор ошибок имеет размерность 7, что превышает стандартную для точек с параметризацией обратной глубины размерность (6 компонент) [12], зато, как будет показано ниже, данный выбор обеспечивает консистентность. Кроме того, при применении в ББФК увеличение размерности вектора состояния не так критично, как в стандартной реализации ОФК, в связи с линейной вычислительной сложностью ББФК. Также после уменьшения начальной неопределенности оценки параметров обратной глубины могут быть сконвертированы в оценку радиус-вектора положения, имеющую 3-мерный вектор ошибок:

$$\mathbf{X}_i^{(dec)} = \delta\mathbf{r}_{\xi}^i = J_{l(\delta\varphi_h)}^{-1} \delta\mathbf{r}_h^i, \quad (16)$$

где $\delta\mathbf{r}_h^i = \hat{\mathbf{r}}_h^i - \delta\mathbf{C}_{hb} \mathbf{r}_h^i$ – право-инвариантная ошибка оценки положения i -й опорной точки в опорной системе координат.

Выберем параметризацию ошибок положения и ориентации опорного маркера. Параметризация, рассмотренная в статье [20], использует представление для право-инвариантной ошибки положения, аналогичное (16), что обеспечивает консистентность при инициализации положения маркера по относительным измерениям в ССК подвижного объекта. В нашем случае маркеры служат ориентирами с заранее заданными оценками положения в опорной системе координат, независимыми от оценок положения подвижного объекта. Поэтому удобнее использовать другую параметризацию, в которой право-инвариантная ошибка определена независимо от ориентации подвижного объекта:

$$\mathbf{X}_m{}_{6 \times 1} = \xi^m = \left[\delta\boldsymbol{\varphi}_{\xi^m}^T{}_{3 \times 1}, \delta\mathbf{r}_{\xi^m}^T{}_{3 \times 1} \right]^T, \quad (17)$$

где $\xi^m = \log^{SE(3)} \left(\hat{T}_{hm} T_{hm}^{-1} \right)$, $\hat{T}_{hm}, T_{hm} \in SE(3)$ – оценочное и действительное значение матрицы перехода, описывающей положение и ориентацию маркера в опорной СК.

Оператор ретракции. Для улучшения читаемости рассмотрим ВИНС с одним визуальным признаком каждого типа:

$$\mathbf{x} = \left[\mathbf{x}_s^T, \mathbf{x}_1^{(dec)T}, \mathbf{x}_2^{(idp)T}, \mathbf{x}_3^{(mrk)T} \right]^T. \quad (18)$$

Приведем выражения для оператора ретракции, в соответствии с которым вектор ошибок ВИНС \mathbf{X} вводится в вектор оценок параметров ВИНС $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_s &= \left[(\delta \mathbf{q}(\delta \varphi_\xi) \circ \mathbf{q}_{hb})^T, (\delta C(\delta \varphi_\xi) \cdot \mathbf{r}_h + J_l(\delta \varphi) \cdot \delta \mathbf{r}_\xi)^T, (\delta C(\delta \varphi_\xi) \cdot \mathbf{v}_h + J_l(\delta \varphi_\xi) \cdot \delta \mathbf{v}_\xi)^T, \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{b}_{gyr} + \delta \mathbf{b}_{gyr})^T, (\mathbf{b}_{acc} + \delta \mathbf{b}_{acc})^T \right]^T, \\ \hat{\mathbf{x}}_1^{(dec)} &= \delta C(\delta \varphi_\xi) \cdot \mathbf{r}_h^1 + J_l(\delta \varphi_\xi) \cdot \delta \mathbf{r}_\xi^1, \\ \hat{\mathbf{x}}_2^{(idp)} &= \left[(\delta C(\delta \varphi_\xi) \cdot \mathbf{r}_h^{c2} + J_l(\delta \varphi_\xi) \cdot \delta \mathbf{r}_\xi^{c2})^T, (\delta C(\delta \varphi_\xi) \cdot \mathbf{m}_h^{c2} + J_l(\delta \varphi_\xi) \cdot \delta \mathbf{m}_\xi^{c2})^T, \rho^2 + \delta \rho^2 \right]^T, \\ \hat{\mathbf{x}}_3^{(mrk)} &= \left[(\delta \mathbf{q}(\delta \varphi_\xi^3) \circ \mathbf{q}_{hb})^T, (\delta C(\delta \varphi_\xi^3) \cdot \mathbf{r}_h^3 + J_l(\delta \varphi_\xi^3) \cdot \delta \mathbf{r}_\xi^3)^T \right]^T, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\delta \mathbf{q}(\delta \varphi) = \left[\cos(\|\delta \varphi\|/2), \sin(\|\delta \varphi\|/2) / \|\delta \varphi\| \delta \varphi^T \right]^T$;

$$\delta C(\delta \varphi) = \exp^{SO(3)}(\delta \varphi).$$

Выражения (19) используются при вводе поправок, вычисленных фильтром на этапе коррекции: $\hat{\mathbf{x}} \leftarrow \hat{\mathbf{x}} \oplus \mathbf{K}\mathbf{Y}$.

1.5. Линеаризованные математические модели ВИНС

Модель ошибок измерений по опорным точкам с параметризацией обратной глубины. Получим по (10а) линеаризованное выражение для невязки между измерением и прогнозом $\mathbf{Y}_i = \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i$:

$$\mathbf{Y}_i \approx \mathbf{v}_i^{CV} - \partial \pi_c \hat{\mathbf{C}}_{hb}^T \left[\hat{\rho}^i (\delta \hat{\mathbf{r}}_\xi^{ci} - \delta \mathbf{r}_\xi) + \delta \mathbf{m}_\xi^i \right] - \partial \pi_c \hat{\mathbf{l}}_\rho \delta \rho^i, \quad (20)$$

где $\partial \pi_c = \partial \pi \cdot \mathbf{C}_{bc}^T$, $\partial \pi = \left(\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{l}_c} \Big|_{\hat{\mathbf{l}}_c} \right) = \begin{bmatrix} 1/\hat{l}_{c3} & 0 & -\hat{l}_{c1}/\hat{l}_{c3}^2 \\ 0 & 1/\hat{l}_{c3} & -\hat{l}_{c2}/\hat{l}_{c3}^2 \end{bmatrix}$;

$$\hat{\mathbf{l}}_c = \mathbf{C}_{bc}^T \left(\hat{\rho}^i \left[\hat{\mathbf{C}}_{hb}^T (\hat{\mathbf{r}}_h^{ci} - \hat{\mathbf{r}}_h) \right] - \mathbf{d}_b^c \right) + \hat{\mathbf{C}}_{hb}^T \hat{\mathbf{m}}_h^i; \quad \hat{\mathbf{l}}_\rho = \left[\hat{\mathbf{C}}_{hb}^T (\hat{\mathbf{r}}_h^{ci} - \hat{\mathbf{r}}_h) - \mathbf{d}_b^c \right].$$

Запишем матрицы-параметры модели измерений ББФК (1):

$$\mathbf{M}_{iv} = \sigma_{CV} \cdot \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{H}_{is} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 3}, & -\hat{\rho}^i \mathbf{H}_{im}, & 0_{2 \times 9} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \hat{\rho}^i \mathbf{H}_{im}, & \mathbf{H}_{im}, & \partial \pi_c \hat{\mathbf{l}}_\rho \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где $\mathbf{H}_{im} = \partial \pi_c \hat{\mathbf{C}}_{hb}^T$.

Свойство консистентности для модели ошибок измерений можно формализовать как нечувствительность матрицы ковариации невязок измерений \mathbf{Y}_i к ненаблюдаемому единичному стохастическому преобразованию параметров ВИНС [3], т. е. (I) к равному случайному смещению $\mathbf{s}_u \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_{s_u})$ всех радиус-векторов положения признаков; (II) к равному повороту всех векторов в опорной СК на случайный угол $\psi_u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\psi_u}^2)$ вокруг вектора гравитационного ускорения \mathbf{g} (т. е. повороту по углу рыскания).

Для предложенной модели нечувствительность к \mathbf{s}_u выполняется в связи с тем, что в (20) входит только разность радиус-векторов; нечувствительность к ψ_u выполняется в связи с нечувствительностью матриц ковариаций право-инвариантных ошибок векторов к ошибке поворота:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{l}_h &= \hat{\mathbf{l}}_h(\psi_u) - \delta \mathbf{C}_{hb}(\psi_u) \mathbf{l}_h = \left[\mathbf{l}_h + S(\psi_u \mathbf{k}) \mathbf{l}_h \right] - \left[\mathbf{l}_h + S(\psi_u \mathbf{k}) \mathbf{l}_h \right] + o(\|\psi_u\|) \approx 0, \\ &\Rightarrow \mathbf{P}_{\delta \mathbf{l}_h} = 0_{3 \times 3}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{l}_h, \delta \mathbf{l}_h$ – вектор в опорной СК и его право-инвариантная ошибка;

\mathbf{k} – орт оси OZ_h ;

$S(\cdot)$ – кососимметрическая матрица векторного умножения.

Дополнительно следует отметить, что матрицы Якоби модели (20) нечувствительны к детерминированным ненаблюдаемым преобразованиям сдвига и поворота.

Модель ошибок измерений по опорному маркеру. Введем право-инвариантную ошибку РЗР-оценок:

$$\xi^{P3P} = \log^{SE(3)} \left(\hat{T}_{cm}^{P3P} [T_{cm}]^{-1} \right) = \left[\delta\varphi_{\xi^{CV}}^T, \delta r_{\xi^{CV}}^T \right]^T. \quad (23)$$

Линеаризовав (12) относительно ξ^{P3P} и шума измерений СТЗ v^{CV} в предположении малости этих величин, получим следующее выражение:

$$v^{CV} = \mathbf{A} \cdot \xi^{P3P}, \quad \mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_1^T, \mathbf{A}_2^T, \mathbf{A}_3^T \right]^T, \quad v^{CV} = \left[v^{1CV T}, v^{2CV T}, v^{3CV T} \right]^T, \quad (24)$$

где $\mathbf{A}_i = \partial \pi^i \left[-S(\hat{r}_c^i), \mathbf{I}_3 \right]$; $v^{CV} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_6 \sigma^{CV})$.

Сформируем вектор невязок таким образом, чтобы обеспечить для модели ошибок измерений по опорному маркеру линейность по право-инвариантной ошибке ξ подвижного объекта. Это требуется, так как в рамках рассматриваемого сценария применения ВИНС ошибка ξ может быть велика. Ошибки оценок расположения маркера ξ^m и РЗР-оценок ξ^{P3P} можно считать малыми.

Рассмотрим групповую невязку $\chi \in SE(3)$ между РЗР-оценками и оценками расположения подвижного объекта и маркера:

$$\begin{aligned} \chi = \hat{T}_{hc} T_{cm}^{P3P} \hat{T}_{hm}^{-1} = \exp^{SE(3)} \left(\left[J_r^{SE(3)}(-\xi) \right]^{-1} \text{Ad}_{\hat{T}_{hc}} \cdot \xi^{P3P} + \right. \\ \left. + \xi - \left[J_r^{SE(3)}(\xi) \right]^{-1} \xi^m \right) + o(\|\xi^{P3P}\| + \|\xi^m\|), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\text{Ad}_{\hat{T}_{hc}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{hc} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ S(\hat{r}_h^c) \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{C}}_{hc} \end{bmatrix}$; $J_r^{SE(3)}(\xi) = \begin{pmatrix} J_r^{SO(3)}(\delta\varphi_\xi) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ Q(\xi) & J_r^{SO(3)}(\delta\varphi_\xi) \end{pmatrix}$ – правый якобиан $SE(3)$, $J_r^{SE(3)}(\xi) = \mathbf{I}_6 + o(\|\xi\|)$.

В качестве вектора невязок \mathbf{Y}_m будем использовать вектор $\mathbf{y} = \log^{SE(3)}(\chi)$, домноженный на матрицу, обеспечивающую декорреляцию ошибок РЗР-оценок в соответствии с моделью (24):

$$\mathbf{Y}_m = \left[\mathbf{A} \text{Ad}_{\hat{T}_{hc}^{-1}} \tilde{\mathbf{J}}_l \right] \cdot \mathbf{y} \approx v^{CV} - \mathbf{A} \text{Ad}_{\hat{T}_{hc}^{-1}} \tilde{\mathbf{J}}_l \cdot (\xi_m - \xi). \quad (26)$$

где $\tilde{\mathbf{J}}_l = J_r^{SE(3)}(-\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} = [0, 0, y_3, \dots, y_6]^T$ – при первой коррекции по маркеру; $\tilde{\mathbf{J}}_l = \mathbf{I}_6$ – при последующих коррекциях по маркеру.

Такая декорреляция позволяет избежать необходимости обращения матрицы \mathbf{A} , которая может вырождаться при некоторых положениях маркера относительно камеры. Учет $\tilde{\mathbf{J}}_l$ позволяет, не прибегая к итеративному оцениванию [27], повысить точность линеаризованной модели вектора невязок в условиях значительных ошибок оценок угла рыскания и координат в опорной СК подвижного объекта при первом наблюдении маркера.

Отметим, что при стремлении ξ^m , ξ^{P3P} к нулю \mathbf{y} стремится к ξ , обеспечена линейность по ξ .

Запишем матрицы-параметры модели измерений ББФК (1):

$$\mathbf{M}_{iv} = \sigma_{CV} \cdot \mathbf{I}_6, \quad \mathbf{H}_{is} = [-\mathbf{H}_i, \mathbf{0}_{6 \times 9}], \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{A} \text{Ad}_{\hat{T}_{hc}^{-1}} \tilde{\mathbf{J}}_l. \quad (27)$$

Консистентность модели (26), эквивалентная нечувствительности к равному стохастическому преобразованию $\xi_u = [\Psi_u \mathbf{k}^T, J_l^{-1}(\Psi_u \mathbf{k}) \mathbf{s}^T]^T$ положения и ориентации подвижного объекта и маркера, обеспечивается тем, что в модель входит только разность $\xi_m - \xi$. Отметим, что матрицы Якоби модели (26) нечувствительны к детерминированному ненаблюдаемому преобразованию в линейном приближении.

Модель динамики для право-инвариантных ошибок ВИНС. Использование дополнительных типов визуальных признаков – опорных точек с параметризацией обратной глубины и опорных маркеров – потребовало расширения модели динамики ВИНС с право-инвариантной ошибкой, рассмотренной в [15]. Сформированная модель описывает динамику ошибок параметров БИНС и ошибок параметров положения для используемых типов признаков. Приведем матрицы динамики ошибок БИНС в обозначениях ББФК (2):

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{hb} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & S(\mathbf{r}_h)\mathbf{C}_{hb} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ S(\mathbf{g}_h) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & S(\mathbf{v}_h)\mathbf{C}_{hb} & \mathbf{C}_{hb} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3}/T_m \text{ gyr} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3}/T_m \text{ acc} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_s = \mathbf{I}_{15} + \Delta t \cdot \mathbf{A}_s, \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_{ws} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{hb} \text{ ARW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ S(\mathbf{r}_h)\mathbf{C}_{hb} \text{ ARW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ S(\mathbf{v}_h)\mathbf{C}_{hb} \text{ ARW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{C}_{hb} \text{ VRW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_b \text{ acc} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_b \text{ gyr} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где Δt – шаг по времени; $\boldsymbol{\omega}_h$, \mathbf{g}_h – векторы угловой скорости и ускорения свободного падения в опорной СК; $T_m \text{ gyr}$, $T_m \text{ acc}$ – значения времени корреляции для смещений нуля ДУС, акселерометра, а также для ошибки синхронизации БИНС и СТЗ; $\sigma_b \text{ gyr}$, $\sigma_b \text{ acc}$ – СКО входного шума формирующих фильтров для смещений нуля ДУС, акселерометра.

Формирующие фильтры для смещений нуля инерциальных датчиков настроены на экспоненциально-коррелированный процесс:

$$\sigma_b = \sigma_m \sqrt{\left(2 - \frac{\Delta t}{T_m}\right) \frac{\Delta t}{T_m}}, \quad (30)$$

где σ_m – СКО экспоненциально-коррелированного процесса.

Приведем матрицы динамики признаков в обозначениях (2).

1. Для опорных точек с параметризацией декартовыми координатами:

$$\mathbf{F}_{is} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 9} & S(\mathbf{r}_h^i)\mathbf{C}_{hb} \Delta t & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{i \text{ ws}} = \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_h^i)\mathbf{C}_{hb} \text{ ARW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{I}_3, \mathbf{M}_{i \text{ w}} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, i = 1 \dots N^{(\text{dec})}.$$

2. Для опорных точек с параметризацией обратной глубины:

$$\mathbf{F}_{is} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 9} & S(\mathbf{r}_h^{ci})\mathbf{C}_{hb} \Delta t & \mathbf{0}_{4 \times 9} \\ \mathbf{0}_{3 \times 9} & S(\mathbf{m}_h^i)\mathbf{C}_{hb} \Delta t & \mathbf{0}_{4 \times 9} \\ & \mathbf{0}_{1 \times 15} & \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{i \text{ ws}} = \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_h^{ci})\mathbf{C}_{hb} \text{ ARW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ S(\mathbf{m}_h^i)\mathbf{C}_{hb} \text{ ARW} \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ & \mathbf{0}_{1 \times 12} & \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{I}_7, \mathbf{M}_{i \text{ w}} = \mathbf{0}_{7 \times 1}, i = 1 \dots N^{(\text{idp})}.$$

3. Для опорных маркеров:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{I}_6, \mathbf{F}_{ms} = \mathbf{0}_{6 \times 15}, \mathbf{M}_{m \text{ ws}} = \mathbf{0}_{6 \times 12}, \mathbf{M}_{m \text{ w}} = \mathbf{0}_{6 \times 1}, m = 1 \dots N^{(\text{mrk})}. \quad (33)$$

Свойство консистентности для моделей динамики эквивалентно отсутствию динамики для ненаблюдаемого стохастического преобразования параметров ВИНС. Для этого должно обеспечиваться $\mathbf{A}_s \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_u^T & \mathbf{0}_{1 \times 9} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{15 \times 1}$, что выполнено, так как $S(\mathbf{g}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_u \mathbf{k} = g \boldsymbol{\psi}_u \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

2. Тестирование ББФК-ВИНС с разработанными моделями

2.1. Условия моделирования

Моделирование производится в среде MATLAB, отслеживание опорных точек на виртуальной текстурированной сцене реализовано на основе KLT-трекера. Рассмотрим параметры моделирования. **Инерциальные датчики.** Случайное блуждание угла ДУС $ARW = 0,015^\circ / \sqrt{c}$, экспоненциально-коррелированный шум ДУС с параметрами $\sigma_{mgyr} = 0,05^\circ / c$, $T_{mgyr} = 20$ с. Случайное блуждание скорости акселерометра $VRW = 0,03$ м/с \sqrt{c} , экспоненциально-коррелированный шум акселерометра с параметрами $\sigma_{macc} = 0,00015$ м/с 2 , $T_{macc} = 20$ с. **Техническое зрение.** СКО шума однородных координат проекции опорной точки на плоскость кадра $CV_{noise} = 0,003$. Разрешение кадров: 1920×1080 . Дисторсия кадров не моделируется. Максимальное число отслеживаемых точек $N_{max} = 300$. **Частота работы.** БИНС – 400 Гц, СТЗ – 20 Гц. **Параметры траектории и движения.** Спуск с высоты $H_0 = 20$ м до высоты $H_1 = 2$ м с максимальной скоростью 2 м/с при воздействии случайных динамических возмущений. В верхнем и нижнем положениях – зависание над сценой. Движение продолжается 15 с. **Начальные ошибки навигационных параметров.** Ошибка по углу тангажа $\Delta\theta_0 = -0,1^\circ$, ошибка по углу крена $\Delta\gamma_0 = 0,1^\circ$. Ошибки остальных параметров нулевые.

2.2. Тестирование ББФК-ВИНС с отслеживанием опорных точек

Произведем численное моделирование работы ББФК-ВИНС при использовании параметризации обратной глубины и разработанных моделей динамики и измерений, сформулированных относительно право-инвариантных ошибок ВИНС. Чтобы подчеркнуть устойчивость параметризации обратной глубины к параметрической неопределённости, для всех точек будем использовать одни и те же начальные значения обратной глубины и ее СКО: $\rho_0 = 0,5$, $\sigma_{\rho_0} = 1$.

Результаты численного моделирования позволят проверить как корректность реализации разработанных моделей ошибок, так и работу ББФК при их использовании. Будем варьировать число главных компонент n_e , используемых в ББФК при аппроксимации корреляционной матрицы ошибок оценок.

Для оценок координат (pos), скорости (vel), ориентации (att) построим графики среднеквадратических ошибок при заданных n_e , нормированные на ошибку ОФК (рис. 2а), а также графики нормированного среднеквадратического расхождения между оценками при заданных n_e и оценками стандартного ОФК (рис. 2б).

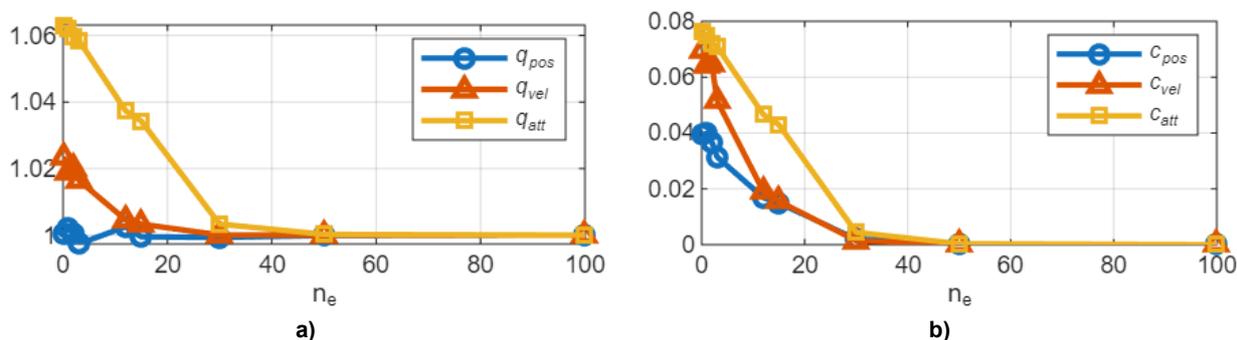


Рис. 2. Зависимость от n_e значений нормированных: а – среднеквадратических ошибок;

б – среднеквадратических расхождений относительно оценок ОФК

Fig. 2. Dependence on n_e of the normalized values of: a – RMS errors;

б – RMS deviations relative to the EKF estimates

Как видно из графиков на рис. 2а, б, наблюдается сходимость оценок ББФК к оценкам ОФК с ростом n_e . При $n_e > 30$ расхождение менее 0,5 %, при $n_e > 50$ расхождение менее 0,05 %. Сред-

нее время вычислений одной итерации ББФК (шаг прогноза + шаг коррекции) составило 43 мс (при $n_e = 100$ и $N = 300$), что примерно в 35 раз меньше времени вычислений ОФК при данном значении N . RMSE для ОФК составили: для координат – 0,07 м, для скорости – 0,015 м/с, для ориентации – 0,16°. Накопленная за время моделирования ошибка позиционных координат в горизонтальной плоскости составила 0,054 м, ошибка высоты – 0,073 м.

Проверим, что расчетные СКО фильтра не занижены. На рис. 3 представлено отношение фактической ошибки к расчетному значению 3σ для оценок координат, скорости и ориентации, при различных значениях n_e .

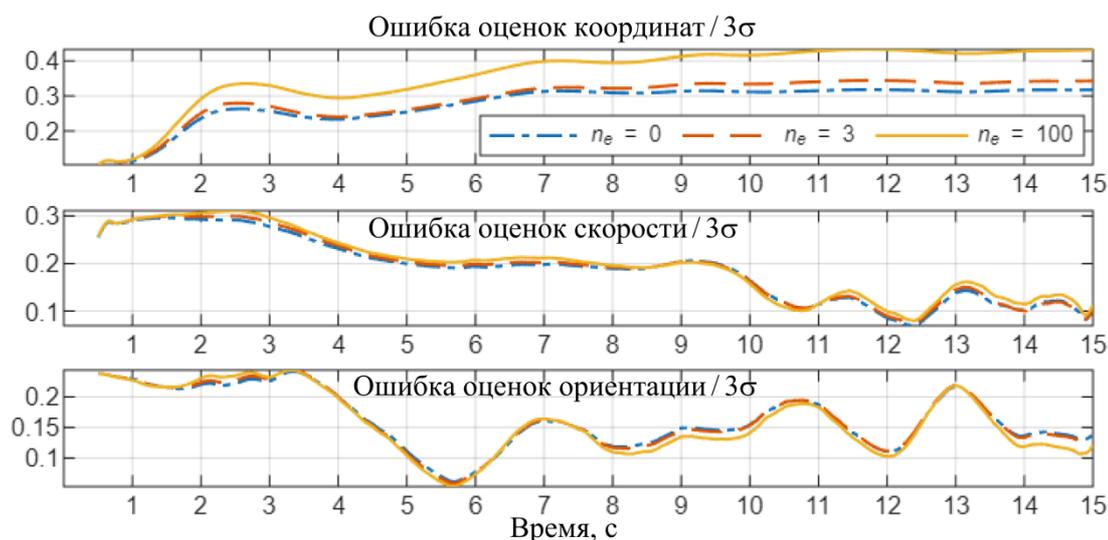


Рис. 3. Отношение ошибок оценок к расчетным значениям 3σ при заданных значениях n_e
Fig. 3. Ratio of estimation errors to the computed 3σ values for given values of n_e

Как видно из данных рис. 3, отношение фактических ошибок оценок к расчетным значениям 3σ меньше единицы, что соответствует правильной работе комплексирующего фильтра. При этом при малых значениях n_e это отношение меньше, чем при больших n_e , что объясняется консервативностью расчетных значений СКО.

2.3. Тестирование ББФК-ВИНС с отслеживанием опорного маркера

Разместим на поверхности сцены опорный маркер со стороной 0,5 м с известным расположением. Отслеживание опорных точек временно отключим. Изменим начальные условия моделирования из предыдущего пункта, задав ненулевыми начальные ошибки оценок позиционных координат угла рыскания подвижного объекта:

$$\Delta r_0 = [-1, 1, 0.5]^T \text{ м}, \quad \Delta \psi = 40^\circ. \quad (34)$$

Начальные оценки расположения маркера выберем следующие:

$$\hat{r}_{h0}^m = r_h^m = [0, 0, 0]^T, \quad (35)$$

$$\hat{C}_{hm0} = \exp^{SO(3)} \left([-5, 6, 0]^T \cdot \pi/180 \right) C_{hm}, \quad C_{hm} = I_3.$$

В соответствии с (35) ориентация маркера относительно вертикали известна не точно.

Произведем моделирование. На рис. 4–6 представлены действительные и оценочные параметры положения и ориентации подвижного объекта и маркера, а также расчетные диапазоны 3σ , построенные в соответствии с параметрами ковариации комплексирующего фильтра.

Ошибки оценок рис. 4–6 укладываются в расчетные диапазоны 3σ , что подтверждает корректную реализацию модели ошибок.

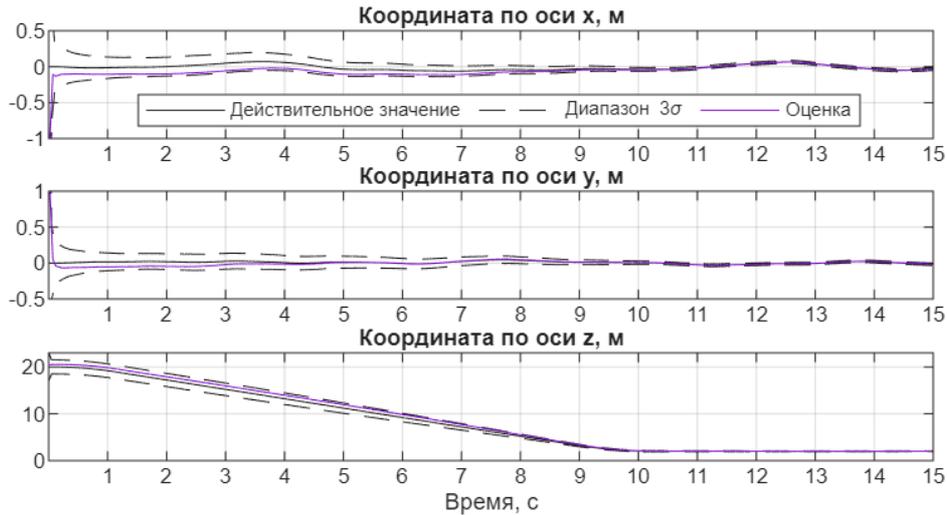


Рис. 4. Оценивание координат при коррекции по опорному маркеру
Fig. 4. Pose estimation during correction using a fiducial marker

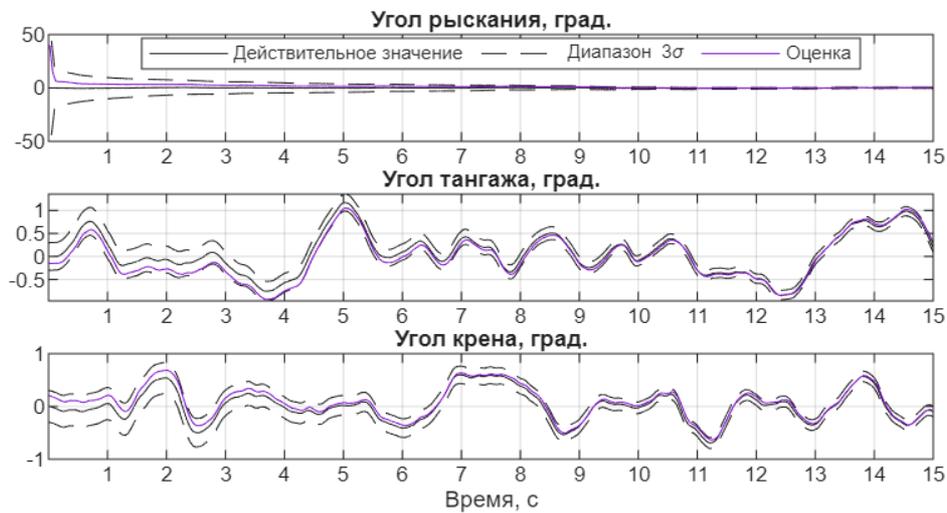


Рис. 5. Оценивание углов Эйлера при коррекции по опорному маркеру
Fig. 5. Estimation of Euler angles during correction using a fiducial marker

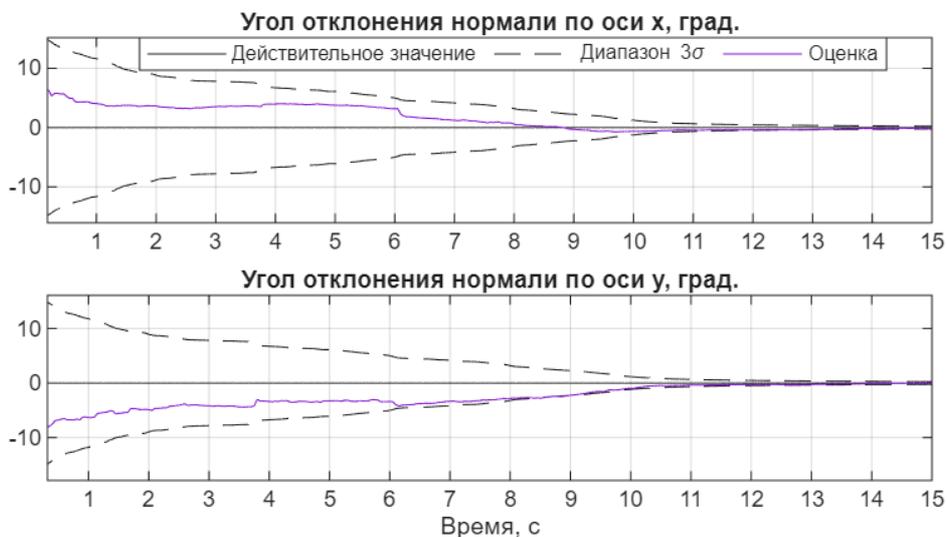


Рис. 6. Оценивание углов наклона нормали маркера при коррекции по опорному маркеру
Fig. 6. Estimation of the marker normal orientation angles during correction using a fiducial marker

2.4. Тестирование ББФК-ВИНС с отслеживанием опорных точек и опорных маркеров

Разместим на поверхности сцены два опорных маркера со стороной 0,5 м и с известным расположением, будем отслеживать на кадрах до 300 опорных точек (рис. 7).

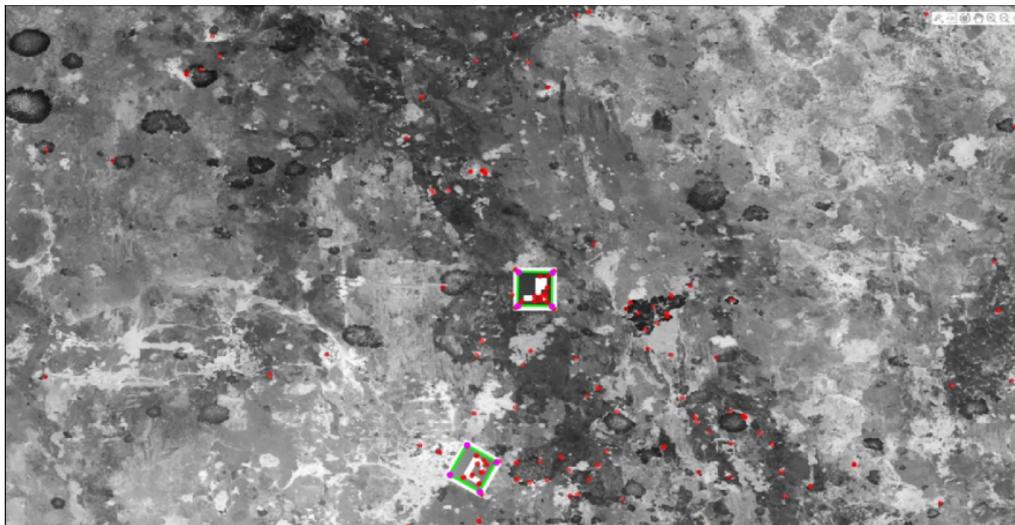


Рис. 7. Кадр сцены с отслеживаемыми опорными точками и опорными маркерами при моделировании спуска подвижного объекта
Fig. 7. Scene frame with tracked point features and fiducial markers during simulation of the vehicle descent

До 7-й секунды моделирования будем использовать коррекцию только по опорным точкам, после – по опорным точкам и маркерам. На рис. 8, 9 представлены действительные и оценочные параметры положения и ориентации подвижного объекта, а также расчетные диапазоны 3σ , построенные в соответствии с параметрами ковариации комплексирующего фильтра.

Как видно из рис. 8, 9 сброс начальной неопределенности оценок позиционных координат и угла рыскания происходит только по данным маркера с известным положением, что свидетельствует о том, что разработанные модели ошибок обеспечивают консистентность рекуррентного фильтра ВИНС.

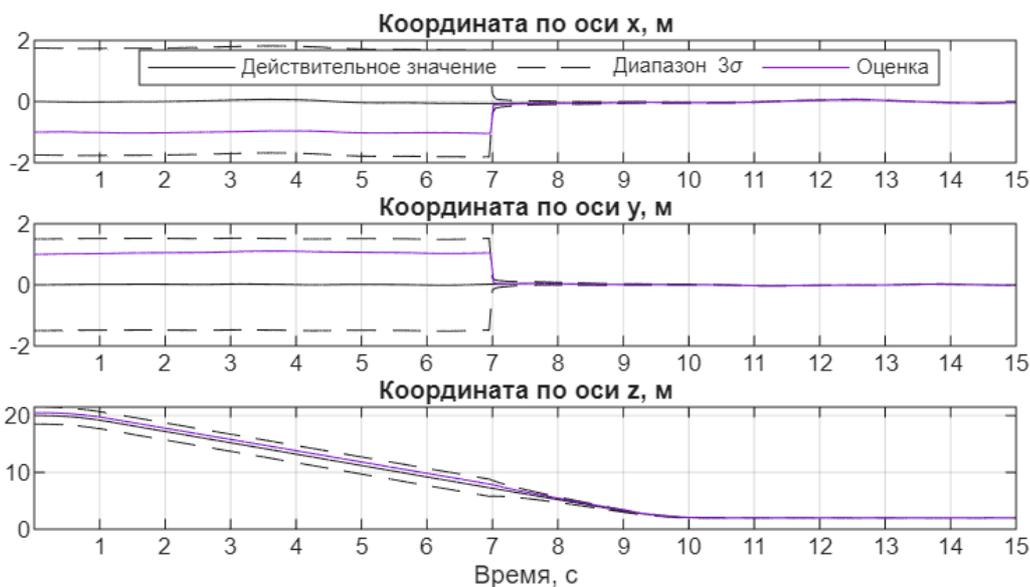


Рис. 8. Оценивание координат при коррекции по опорным точкам и опорным маркерам
Fig. 8. Pose estimation during correction using point features and fiducial markers

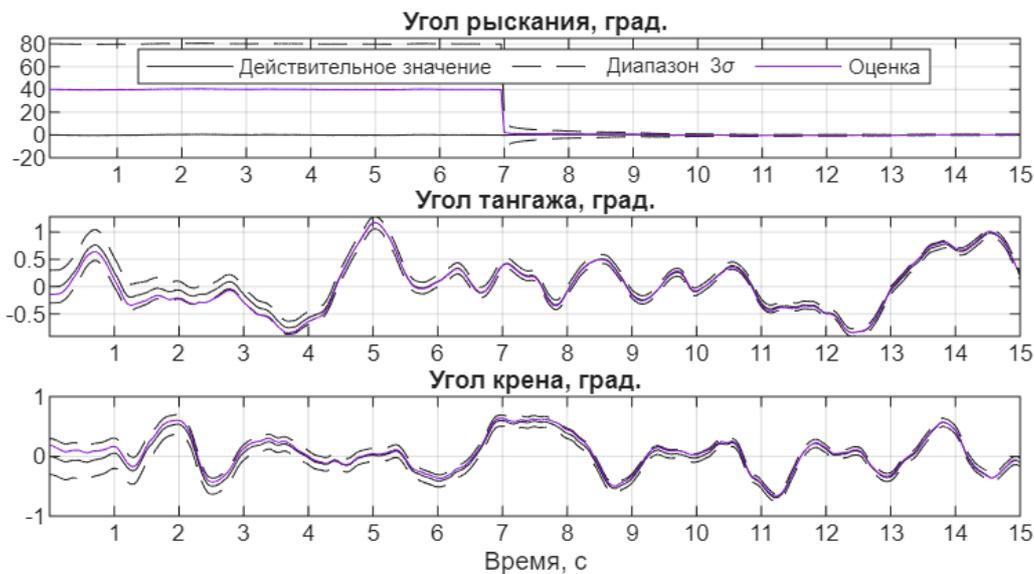


Рис. 9. Оценивание углов Эйлера при коррекции по опорным точкам и опорным маркерам
 Fig. 9. Estimation of Euler angles during correction using point features and fiducial markers

Заключение

Разработаны математические модели для монокулярной ББФК-ВИНС с опорными точками с параметризацией обратной глубины и опорными маркерами типа Aguco, используемыми в качестве ориентиров. Модели сформулированы относительно право-инвариантных ошибок, что позволило устранить ложную наблюдаемость ошибок оценивания абсолютных позиционных координат и угла рыскания, обеспечить оценивание в условиях большой начальной неопределенности оценок. Алгоритм ББФК продемонстрировал эффективность в применении к ВИНС с разработанными моделями ошибок, формируя оценки, близкие к оценкам ОФК, но при существенно меньшем времени вычислений. Эти свойства подтверждены в рамках численного моделирования работы ВИНС на этапе посадки, использующей данные KLT-трекера опорных точек и детектора Aguco-маркеров. Перспективы дальнейшей работы связаны с рассмотрением более сложных и продолжительных сценариев движения.

Список литературы

1. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. Изд. 4-е, испр. и доп. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2025. 498 с. ISBN 978-5-91995-105-6.
2. Куликова М.В., Куликов Г.Ю. Численные методы нелинейной фильтрации для обработки сигналов и измерений // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 4. С. 64–98.
3. An Invariant-EKF VINS Algorithm for Improving Consistency / K. Wu, T. Zhang, D. Su et al. // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vancouver, BC, Canada, 2017. P. 1578–1585. DOI: 10.1109/IROS.2017.8205965
4. Camera-IMU-based localization: Observability analysis and consistency improvement / J.A. Hesch, D.G. Kottas, S.L. Bowman, S.I. Roumeliotis // The International Journal of Robotics Research. 2013. Vol. 33, no. 1. P. 182–201. DOI: 10.1177/0278364913509675
5. Huang G.P., Mourikis A.I., Roumeliotis S.I. Observability-based Rules for Designing Consistent EKF SLAM Estimators // The International Journal of Robotics Research. 2009. Vol. 29, no. 5. P. 502–528. DOI: 10.1177/0278364909353640
6. Huang G. Visual-Inertial Navigation: A Concise Review // 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, 2019. P. 9572–9582. DOI: 10.1109/ICRA.2019.8793604
7. Mourikis A.I., Roumeliotis S.I. A Multi-State Constraint Kalman Filter for Vision-aided Inertial Navigation // Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Rome, 2007. P. 3565–3572. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.364024

8. Mourikis A.I. Characterization and optimization of the accuracy of mobile robot localization: PhD thesis. Minneapolis: University of Minnesota, 2008. 210 p.
9. Li M., Mourikis A.I. Improving the accuracy of EKF-based visual-inertial odometry // 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Saint Paul, MN, USA, 2012. P. 828–835. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6225229
10. A Square Root Inverse Filter for Efficient Vision-Aided Inertial Navigation on Mobile Devices / K.J. Wu, A.M. Ahmed, G.A. Georgiou, S.I. Roumeliotis // Robotics: Science and Systems Conference (RSS). 2015. DOI: 10.15607/RSS.2015.XI.008
11. Huai Z., Huang G. Robocentric visual-inertial odometry // The International Journal of Robotics Research. 2019. Vol. 41, no. 7. P. 667–689. DOI: 10.1177/0278364919853361
12. Civera J., Davison A.J., Montiel J.M.M. Inverse Depth Parametrization for Monocular SLAM // IEEE Transactions on Robotics. 2008. Vol. 24, no. 5. P. 932–945. DOI: 10.1109/TRO.2008.2003276
13. Civera J., Davison A.J., Montiel J.M.M. Inverse Depth to Depth Conversion for Monocular SLAM // Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Rome, 2007. P. 2778–2783. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363892
14. Imre E., Berger M.-O., Noury N. Improved Inverse-Depth Parameterization for Monocular Simultaneous Localization and Mapping // 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Kobe, 2009. P. 381–386. DOI: 10.1109/ROBOT.2009.5152481
15. Ammann N., Mayo L.G. Undelayed Initialization of Inverse Depth Parameterized Landmarks in UKF-SLAM with Error State Formulation // 2018 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). Auckland, 2018. P. 918–923. DOI: 10.1109/AIM.2018.8452375
16. Iterated extended Kalman filter based visual-inertial odometry using direct photometric feedback / M. Bloesch, M. Burri, S. Omari et al. // The International Journal of Robotics Research. 2017. Vol. 36, no. 10. P. 1053–1072, DOI: 10.1177/0278364917728574
17. Barrau A., Bonnabel S. Invariant Kalman Filtering // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. 2018. Vol. 1. P. 237–257. DOI: 10.1146/annurev-control-060117-105010
18. Barrau A., Bonnabel S. An EKF-SLAM Algorithm with Consistency Properties // arXiv preprint. 2015. DOI: 10.48550/arXiv.1510.06263
19. Iterated Invariant Extended Kalman Filter (IIEKF) / S. Goffin, A. Barrau, S. Bonnabel et al. // arXiv preprint. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.10665
20. A Right Invariant Extended Kalman Filter for Object based SLAM / Y. Song, Z. Zhang, J. Wu et al. // IEEE Robotics and Automation Letters. 2021. Vol. 7, no. 2. P. 1348–1355. DOI: 10.1109/LRA.2021.3139370
21. Kaess M., Ranganathan A., Dellaert F. iSAM: Fast Incremental Smoothing and Mapping with Efficient Data Association // Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Rome, 2007. P. 1670–1677. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363563
22. Степанов О.А., Моторин А.В., Золотаревич В.П. Алгоритмы байесовского оценивания в задаче одновременной навигации и картографирования // XXXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, 03–04 июня 2025 года: сб. материалов конф. СПб.: АО «Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2025. С. 7–11. EDN DESIAG.
23. Romero-Ramirez F.J., Muñoz-Salinas R., Medina-Carnicer R. Speeded up detection of squared fiducial markers // Image and Vision Computing. 2018. Vol. 76. P. 38–47. ISSN 0262-8856. DOI: 10.1016/j.imavis.2018.05.004
24. Циоплиакис Н.И. Быстрый блочный LD-фильтр Калмана для задач визуально-инерциальной навигации // XXXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, 03–04 июня 2025 года: сб. материалов конф. СПб.: АО «Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2025. С. 63–64. EDN YFSXYE.
25. Absil P.A., Baker C.G., Gallivan K.A. Trust-Region Methods on Riemannian Manifolds // Foundations of Computational Mathematics. 2007. Vol. 7, no. 3. P. 303–330. DOI: 10.1007/s10208-005-0179-9
26. Complete Solution Classification for the Perspective-Three-Point Problem / X.S. Gao, X.R. Hou, J. Tang, H.F. Cheng // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2003. Vol. 25, no. 8. P. 930–943. DOI: 10.1109/TPAMI.2003.1217599

27. Bell B.M., Cathey F.W. The Iterated Kalman Filter Update as a Gauss-Newton Method // IEEE Transactions on Automatic Control. 1993. Vol. 38, no. 2. P. 294–297. DOI: 10.1109/9.250476

References

1. Stepanov O.A. *Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoy informatsii. Ch. 1. Vvedeniye v teoriyu otsenivaniya* [Fundamentals of Estimation Theory with Applications to Navigation Information Processing Problems. Part 1. Introduction to Estimation Theory]. 4th ed., corrected and augmented. St. Petersburg: Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2025. 498 p. (In Russ.) ISBN 978-5-91995-105-6.

2. Kulikova M.V., Kulikov G.Yu. Numerical methods for nonlinear filtering of signals and measurements. *Computational technologies = Vychislitel'nye tekhnologii*. 2016;21(4):64–98. (In Russ.)

3. Wu K., Zhang T., Su D., Huang S., Dissanayake G. An Invariant-EKF VINS Algorithm for Improving Consistency. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Vancouver, BC, Canada, 2017. P. 1578–1585. DOI: 10.1109/IROS.2017.8205965

4. Hesch J.A., Kottas D.G., Bowman S.L., Roumeliotis S.I. Camera-IMU-based localization: Observability analysis and consistency improvement. *The International Journal of Robotics Research*. 2013;33(1):182–201. DOI: 10.1177/0278364913509675

5. Huang G.P., Mourikis A.I., Roumeliotis S.I. Observability-based Rules for Designing Consistent EKF SLAM Estimators. *The International Journal of Robotics Research*. 2009;29(5):502–528. DOI: 10.1177/0278364909353640

6. Huang G. Visual-Inertial Navigation: A Concise Review. In: *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Montreal, 2019. P. 9572–9582. DOI: 10.1109/ICRA.2019.8793604

7. Mourikis A.I., Roumeliotis S.I. A Multi-State Constraint Kalman Filter for Vision-aided Inertial Navigation. In: *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Rome, 2007. P. 3565–3572. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.364024

8. Mourikis A.I. *Characterization and optimization of the accuracy of mobile robot localization: PhD thesis*. Minneapolis: University of Minnesota, 2008. 210 p.

9. Li M., Mourikis A.I. Improving the accuracy of EKF-based visual-inertial odometry. In: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Saint Paul, MN, USA, 2012. P. 828–835. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6225229

10. Wu K.J., Ahmed A.M., Georgiou G.A., Roumeliotis S.I. A Square Root Inverse Filter for Efficient Vision-Aided Inertial Navigation on Mobile Devices. In: *Robotics: Science and Systems Conference (RSS)*. 2015. DOI: 10.15607/RSS.2015.XI.008

11. Huai Z., Huang G. Robocentric visual-inertial odometry. *The International Journal of Robotics Research*. 2019;41(7):667–689. DOI: 10.1177/0278364919853361

12. Civera J., Davison A.J., Montiel J.M.M. Inverse Depth Parameterization for Monocular SLAM. *IEEE Transactions on Robotics*. 2008;24(5):932–945. DOI: 10.1109/TRO.2008.2003276

13. Civera J., Davison A.J., Montiel J.M.M. Inverse Depth to Depth Conversion for Monocular SLAM. In: *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Rome, 2007. P. 2778–2783. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363892

14. Imre E., Berger M.-O., Noury N. Improved Inverse-Depth Parameterization for Monocular Simultaneous Localization and Mapping. In: *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Kobe, 2009. P. 381–386. DOI: 10.1109/ROBOT.2009.5152481

15. Ammann N., Mayo L.G. Undelayed Initialization of Inverse Depth Parameterized Landmarks in UKF-SLAM with Error State Formulation. In: *2018 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. Auckland, 2018. P. 918–923. DOI: 10.1109/AIM.2018.8452375

16. Bloesch M., Burri M., Omari S., Hutter M., Siegwart R. Iterated extended Kalman filter based visual-inertial odometry using direct photometric feedback. *The International Journal of Robotics Research*. 2017;36(10):1053–1072. DOI: 10.1177/0278364917728574

17. Barrau A., Bonnabel S. Invariant Kalman Filtering. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*. 2018;1:237–257. DOI: 10.1146/annurev-control-060117-105010

18. Barrau A., Bonnabel S. An EKF-SLAM Algorithm with Consistency Properties. *arXiv preprint*. 2015. DOI: 10.48550/arXiv.1510.06263

19. Goffin S., Barrau A., Bonnabel S., Bruls O., Sacré P. Iterated Invariant Extended Kalman Filter (IEKF). *arXiv preprint*. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.10665

20. Song Y., Zhang Z., Wu J., Wang Y., Zhao L., Huang S. A Right Invariant Extended Kalman Filter for Object based SLAM. *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2021;7(2):1348–1355. DOI: 10.1109/LRA.2021.3139370
21. Kaess M., Ranganathan A., Dellaert F. iSAM: Fast Incremental Smoothing and Mapping with Efficient Data Association. In: *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Rome, 2007. P. 1670–1677. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363563
22. Stepanov O.A., Motorin A.V., Zolotarevich V.P. [Bayesian estimation algorithms in the problem of simultaneous navigation and mapping]. In: *XXXII St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, June 3–4, 2025: conference proceedings*. St. Petersburg: Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2025. P. 7–11. (In Russ.) EDN DESIAG.
23. Romero-Ramirez F.J., Muñoz-Salinas R., Medina-Carnicer R. Speeded up detection of squared fiducial markers. *Image and Vision Computing*. 2018;76:38–47. ISSN 0262-8856. DOI: 10.1016/j.imavis.2018.05.004
24. Tsiopliakis N.I. [Fast block LD Kalman filter for visual-inertial navigation problems]. In: *XXXII St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, June 3–4, 2025: conference proceedings*. St. Petersburg: Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2025. P. 63–64. (In Russ.) EDN YFSXYE.
25. Absil P.A., Baker C.G., Gallivan K.A. Trust-Region Methods on Riemannian Manifolds. *Foundations of Computational Mathematics*. 2007;7(3):303–330. DOI: 10.1007/s10208-005-0179-9
26. Gao X.S., Hou X.R., Tang J., Cheng H.F. Complete Solution Classification for the Perspective-Three-Point Problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2003;25(8):930–943. DOI: 10.1109/TPAMI.2003.1217599
27. Bell B.M., Cathey F.W. The Iterated Kalman Filter Update as a Gauss-Newton Method // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. Vol. 38, no. 2. P. 294–297. DOI: 10.1109/9.250476

Информация об авторах

Шестаков Александр Леонидович, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; a.l.shestakov@susu.ru.

Циоплиакис Николаос Илиас, аспирант кафедры информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; ntsiopliakis@mail.ru.

Information about the authors

Alexander L. Shestakov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Information and Measurement Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; a.l.shestakov@susu.ru.

Nikolaos I. Tsiopliakis, Postgraduate student of the Department of Information and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; ntsiopliakis@mail.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 21.10.2025

The article was submitted 21.10.2025