

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АГРЕГАТА РОТАЦИОННОГО ТИПА*

Д.А. Кацай

Приводится математическая модель малогабаритного фрезерного агрегата с двухосным подвесом инструмента ротационного типа. Агрегат предназначен для выполнения поверхностной обработки асфальто-бетонных покрытий. Агрегат обеспечивает формирование поверхности с требуемым поперечным и продольным уклоном. Ротационный тип агрегата позволяет получить высокую производительность при малых усилиях взаимодействия режущих элементов с материалом. Математическая модель агрегата представлена в виде дифференциальных уравнений в форме Коши. Исследованы структурные свойства агрегата – как объекта управления. Произведен расчет коэффициентов регулятора по состоянию модальным методом.

Ключевые слова: ротационный фрезерный агрегат; поверхностная обработка; структурные свойства; модальный метод.

Введение

Разрабатываемый фрезерный агрегат предназначен для поверхностной обработки дорожных покрытий. В процессе его испытаний были выполнены измерения сил резания следующих материалов: асфальт и лед. Схема для однокомпонентного измерения тензометрическим датчиком (далее тензодатчик) консольного типа силы резания материалов агрегатом в ручном режиме работы представлена на рис. 1. В представленной схеме производится измерение вертикальной составляющей силы резания. Две другие составляющие силы резания: в поперечном и продольном направлении относительно перемещения агрегата измерялись при других расположениях тензодатчика, получаемых путем разворота на 90 градусов.

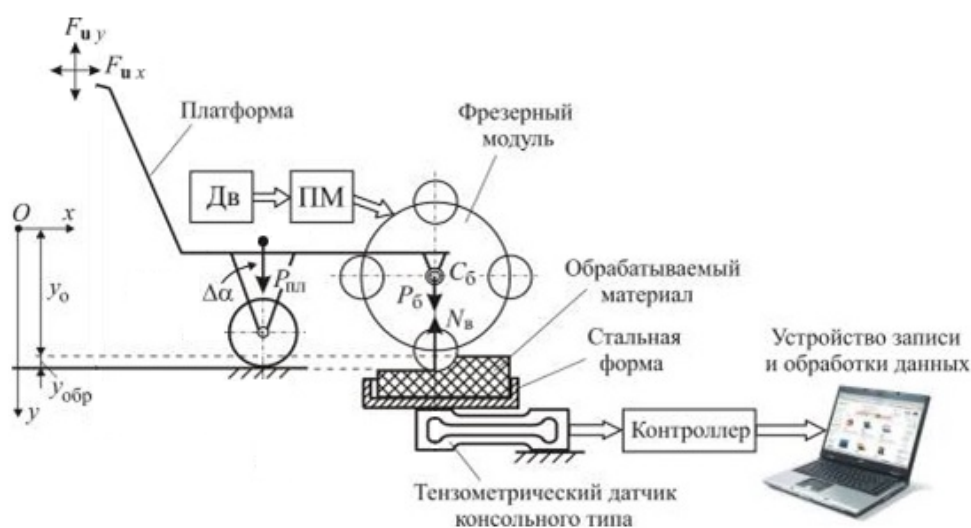


Рис. 1. Схема измерения вертикальной составляющей силы резания в ручном режиме работы агрегата

В ходе эксперимента оператор вручную плавно приводил в касание барабан фрезерного агрегата с обрабатываемым материалом. Практически сразу начинается разрушение материала. Выявлено, что при малом давлении барабана на обрабатываемую поверхность получают частицы разрушенного материала малого размера. С увеличением давления на материал увеличивается вертикальная составляющая усилия N_v и размеры частиц.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, действующего на основании Положения, утвержденного постановлением Правительства РФ от 03.02.94 г. № 65 по государственному контракту № 7851p/11400от 16.04.2010 на выполнение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ.

Результаты проведенных экспериментальных исследований процесса ротационного фрезерования в ручном режиме работы мобильного агрегата близки к результатам, полученным в лабораторных условиях на стационарном фрезерном станке [1]. Принципиальное отличие рассматриваемой схемы ротационного фрезерования в кинематической схеме и типе режущих элементов. На рис. 2 показан вариант агрегата с осью вращения водила (барабана), расположенной параллельно обрабатываемой поверхности. В статье [1] ось вращения водила расположена перпендикулярно обрабатываемой поверхности и на водиле установлены режущие элементы чашечного типа.



Рис. 2. Фото стенда для измерения вертикальной составляющей силы резания в ручном режиме работы агрегата

На основе фрезерного агрегата с ручным управлением разрабатывается механизированный агрегат с контуром управления положением фрезерного барабана относительно плоскости горизонта и подачи в направлении движения.

1. Постановка задачи

На рис. 3 показана кинематическая схема фрезерного агрегата, содержащего дополнительно введенную раму 1, образующую с платформой 2 карданов подвес для фрезерного барабана (ФБ) 3. Задача проводимого исследования состоит в анализе структурных свойств агрегата и синтезе обратной связи, обеспечивающей требуемые динамические свойства в процессе поверхностной обработки. Угловое положение ФБ контролируется датчиками углов $ДУ_2$ и $ДУ_3$, а поступательное перемещение с помощью датчика угла $ДУ_4$ в предположении о качении опорного колеса агрегата без проскальзывания. На рис. 4 представлены системы координат, связанные с деталями агрегата, и реакции в опорах барабана (R_{bl} , R_{br}) и фрез (R_{fl} , R_{fr}), контактирующих с материалом.

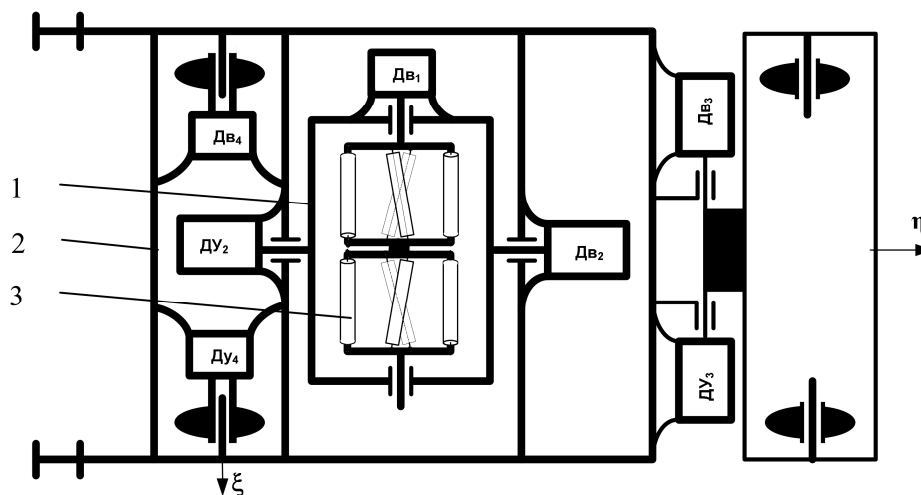


Рис. 3. Кинематическая схема агрегата

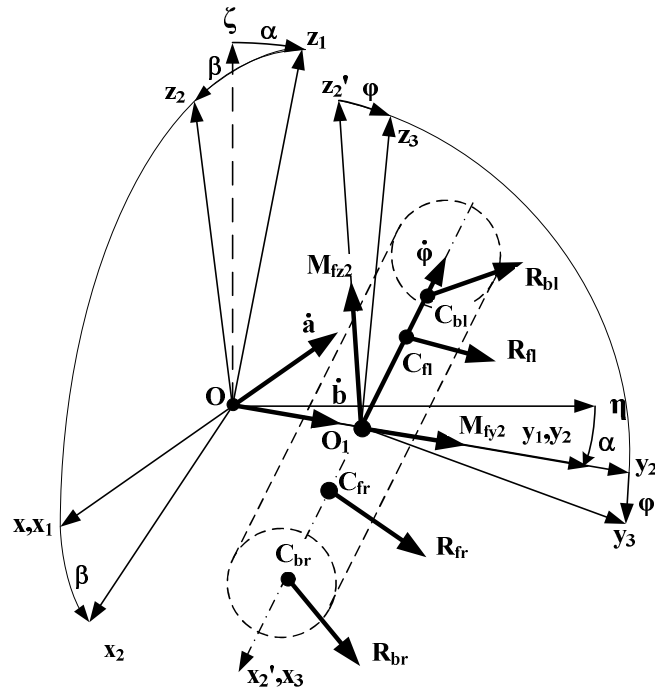


Рис. 4. Системы координат

Математическая модель агрегата представлена в форме системы из дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_{\text{пп}} \cdot \ddot{\eta} = F_{\eta}(t) - R_{\text{пп}}(t, \dot{\varphi}, \varphi); \tag{1}$$

$$J_{\text{рп}} \cdot \ddot{\alpha} = M_{\text{дв3}}(t) + M(\mathbf{P}) - M_{\alpha}(\varphi, \mathbf{R}, t); \tag{2}$$

$$J_{\text{пп}} \cdot \ddot{\beta} = M_{\text{дв2}}(t) - M_{\beta}(\varphi, \mathbf{R}, t), \tag{3}$$

где $m_{\text{пп}}$ – суммарная масса платформы и всех установленных на ней деталей и узлов, включая массу опорного узла агрегата; η – координата поступательного перемещения платформы; $F_{\eta}(t)$ – движущая сила, прикладываемая к платформе через двигатель Дв4; $R_{\text{пп}}(t, \dot{\varphi}, \varphi)$ – реакция связей агрегата с обрабатываемой поверхностью, передаваемая через узлы агрегата, выражения для которой можно представить в виде стохастической функции; $M(\mathbf{P})$ – момент от силы тяжести платформы с ФБ относительно оси вращения рамы; $M_{\alpha}(\varphi, \mathbf{R}, t)$ и $M_{\beta}(\varphi, \mathbf{R}, t)$ – моменты от взаимодействия режущих элементов фрез с обрабатываемым материалом, выражения для которых можно представить в виде стохастической функции [2] $R(t, \eta) = (R0(\eta) + \xi(t) \cdot \sigma(\Delta R(\eta))) \cdot R_w(t)$, где $R0(\eta)$ – реакция связи режущего элемента фрезы с обрабатываемым материалом, которая при малой подаче фрезы может быть представлена линейной функцией $R0(\eta) = b \cdot \eta + c$, b, c – коэффициенты, зависящие от свойств обрабатываемого материала; $R_w(t) = \{1, \text{ для } t \leq t1 \text{ и } 0 \text{ для } t1 < t \leq T\}$ – периодическая функция, модулирующая случайный процесс $\xi(t)$, обусловленная вращением ФБ, несущего на себе n фрез-сателлитов; $t1 = \gamma \cdot n / \dot{\varphi}$, γ – угловой размер фрезы-сателлита, $T = 2\pi / \dot{\varphi}$ – период одного оборота барабана, $\xi(t)$ – нормированный случайный процесс с нормальным законом распределения; дисперсия $D(\Delta R(x))$ моделируемой реакции $R(t, x)$ является функцией от подачи ФБ, задаваемой поступательным движением платформы в плоскости дорожного полотна: $\sigma(\Delta R(x))^2 = D(\Delta R(x)) = (kD \cdot R0(x))^2$, где kD – коэффициент, зависящий от свойств обрабатываемого материала и вида фрезы; $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_{\text{bl}}, \mathbf{R}_{\text{br}}, \mathbf{R}_{\text{n}}, \mathbf{R}_{\text{fr}})$.

Представим математическую модель агрегата в векторно-матричной форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w}(t), \quad (4)$$

$$\text{где } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\eta} \\ \alpha \\ \beta \\ \eta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -l' & c_{\alpha\beta} & c_{\alpha\eta} \\ 0 & 0 & 0 & c_{\beta\alpha} & c_{\beta\beta} & c_{\beta\eta} \\ 0 & 0 & 0 & c_{\eta\alpha} & c_{\eta\beta} & c_{\eta\eta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{\alpha} \\ u_{\beta} \\ u_{\eta} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} w_{\alpha}(t) \\ w_{\beta}(t) \\ w_{\eta}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

\mathbf{x} – вектор состояния агрегата; \mathbf{A} – матрица состояния; \mathbf{B} – матрица управления; \mathbf{u} – вектор управления; $\mathbf{w}(t)$ – вектор возмущения, обусловленный взаимодействием ротационного инструмента с обрабатываемой поверхностью; $c_{\alpha\beta}, c_{\alpha\eta}, c_{\beta\alpha}, c_{\beta\beta}, c_{\beta\eta}, c_{\eta\alpha}, c_{\eta\beta}, c_{\eta\eta}$ – коэффициенты, зависящие от выражений для реакций взаимодействия ротационного инструмента с обрабатываемой поверхностью; $l' = l/J_{\text{рп}}$; l – расстояние от оси вращения фрезерного барабана до оси подвеса рамы агрегата.

Особенность построения математической модели в линейной постановке состоит в распределении коэффициентов реакций взаимодействия ротационного инструмента с обрабатываемой поверхностью на две части. В вектор возмущения $\mathbf{w}(t)$ вошли постоянные составляющие реакций, а через коэффициенты $c_{\alpha\beta}, c_{\alpha\eta}, c_{\beta\alpha}, c_{\beta\beta}, c_{\beta\eta}, c_{\eta\alpha}, c_{\eta\beta}, c_{\eta\eta}$ введены линейные составляющие реакций.

Управляемость агрегата по критерию Калмана должна соответствовать выполнению следующего критерия: $\text{rank}(\mathbf{Q}_u) = 6$, где $\mathbf{Q}_u = (\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^5 \cdot \mathbf{B})$ – матрица управляемости.

Подстановка матриц состояния \mathbf{A} и управления \mathbf{B} в матрицу управляемости \mathbf{Q}_u позволяет сделать вывод о выполнении критерия управляемости независимо от параметров агрегата. Для подтверждения вывода приведем подматрицу, полученную из первых двух компонент матрицы управляемости:

$$\mathbf{Q}'_u = (\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Находим выражение для главного определителя: $|\mathbf{Q}'_u| = 1$. Ненулевое значение главного определителя и отсутствие в его выражении параметров агрегата подтверждает структурную управляемость агрегата. Выполнение критерия управляемости дает основание сделать вывод о реализации с помощью управления \mathbf{u} желаемых динамических свойств фрезерного агрегата.

Прямому измерению в агрегате доступны углы отклонения α и β рамы и платформы с помощью датчиков углов и поступательное перемещение агрегата с помощью датчика перемещения. Перечисленной совокупности датчиков соответствует следующее уравнение наблюдения:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \xi(t), \quad \text{где } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица наблюдения; } \xi(t) \text{ – вектор измерительного}$$

шума Гауссова типа.

Для формирования закона управления в форме линейной комбинации переменных состояния $\mathbf{u} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$ необходим полный вектор состояния агрегата. С помощью критерия Калмана проверим наблюдаемость агрегата с помощью матрицы наблюдаемости:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^5 \cdot \mathbf{C}^T \end{pmatrix}.$$

Анализ главных определителей, получаемых из матрицы наблюдаемости, позволил выбрать один, имеющий следующее численное значение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (6)$$

Один из главных определителей матрицы наблюдаемости отличен от нуля, следовательно, $\text{rank}(\mathbf{Q}_c) = 6$. Как и в случае с управляемостью ранг матрицы наблюдаемости не зависит от параметров агрегата, а определяется структурой его математической модели. Следовательно, можно в реальном времени восстанавливать недостающие компоненты вектора состояния агрегата и формировать управление фрезерным барабаном.

2. Синтез обратной связи

Для формирования вектора управления \mathbf{u} необходимо ввести регулятор размерности 3×6 :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{31} & \dots & p_{36} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Синтез коэффициентов регулятора выполним модальным методом. С этой целью запишем характеристическое уравнение агрегата, охваченного обратной связью:

$$|\lambda \cdot \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{P})| = 0, \quad (8)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица шестого порядка.

Обозначим через $\mathbf{V}_\lambda(\mathbf{P})$ вектор коэффициентов характеристического уравнения. Выражения для компонентов вектора содержат 18 неизвестных коэффициентов регулятора p_{ij} , где $i = 3$, $j = 6$. Для нахождения численных значений коэффициентов регулятора сформируем желаемые численные значения коэффициентов характеристического уравнения. С этой целью представим передаточную функцию агрегата в виде произведения трех динамических звеньев второго порядка с различными постоянными времени T_i . Коэффициенты относительного демпфирования выберем одинаковыми со значением $\xi \approx 0,7$, при котором переходный процесс в агрегате будет происходить по аperiodическому закону без перерегулирования. Такое требование к коэффициенту демпфирования обусловлено ожидаемым качеством результата фрезерования: исключить появление нежелательных углублений на обрабатываемой поверхности.

Обозначим через $\mathbf{V}_{\lambda g}$ вектор коэффициентов характеристического уравнения с желаемыми корнями. На основании вышеизложенного критерия назначения параметров динамических звеньев получим следующее выражение для формирования характеристического полинома с желаемыми коэффициентами:

$$m_g(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \left(\lambda^2 + \frac{2\xi}{T_i} \lambda + \frac{1}{T_i^2} \right). \quad (9)$$

После раскрытия скобок и суммирования коэффициентов при различных степенях λ получим выражения для всех компонент вектора $\mathbf{V}_{\lambda g}$.

Для нахождения коэффициентов регулятора приравняем сформированные вектора коэффициентов характеристического уравнения

$$\mathbf{V}_\lambda(\mathbf{P}) = \mathbf{V}_{\lambda g}. \quad (10)$$

Для решения системы алгебраических уравнений в программе Mathcad можно воспользоваться одной из стандартных процедур find или Minerr. В систему из шести алгебраических уравнений входит 18 коэффициентов регулятора. Избыточность количества параметров регулятора можно использовать для дальнейшего улучшения свойств динамической системы. С этой целью можно сформировать дополнительные ограничения в виде равенств или неравенств, используя, например, числители передаточных функций системы. В случае возникновения проблемы в решении можно обратиться к поиску стартовой точки путем аналитического конструирования регулятора с применением матричного уравнения Риккати с матричной переменной. Решение уравнения Риккати позволяет получить регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы. Получаемые при этом численные значения корней могут оказаться неоптимальными по требованиям быстродействия или перерегулирования и настраиваются на следующем шаге модальным методом.

В качестве численного примера выберем следующие частоты собственных колебаний агрегата: $f_1 = 3$ Гц, $f_2 = 10$ Гц, $f_3 = 18$ Гц, которым будут соответствовать постоянные времени: $T_1 = 0,053$ с, $T_2 = 0,016$ с, $T_3 = 0,009$ с.

Пусть матрица состояния **A** имеет следующие численные значения: $l' = 1$; $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\eta} = c_{\beta\alpha} = c_{\beta\beta} = c_{\beta\eta} = 0$; $c_{\eta\alpha} = c_{\eta\beta} = c_{\eta\eta} = -1$. Зададим начальные значения всех коэффициентов регулятора нулевыми $p_{ij} = 0$, где $i = 3$, $j = 6$. После обращения к процедуре Minerr в программе Mathcad получим значения коэффициентов регулятора (см. таблицу).

Численные значения коэффициентов регулятора

P	91,20	26,65	208,93	1170,23	-1573,16	-19014,58
	-246,91	-146,76	-2161,64	-1404,78	936,51	-16311,23
	15,31	27,86	328,25	264,05	222,27	3420,57

Подстановка коэффициентов регулятора в выражение для характеристического уравнения замкнутой системы дает следующие значения корней:

$$\lambda_{1,2} = -79,168 \pm 80,768i ; \lambda_{3,4} = -43,982 \pm 44,871i ; \lambda_{5,6} = -13,195 \pm 13,461i .$$

Округление коэффициентов регулятора до целых значений с помощью функции ceil в программе Mathcad приводит к изменениям в значениях корней на величины не более 4 %, что свидетельствует о низкой чувствительности динамических свойств агрегата к изменению коэффициентов не только регулятора, но и параметров его матрицы состояния.

Реализация обратной связи в агрегате потребует восстановления всего вектора его состояния. Поскольку на агрегат поступает случайное возмущение от взаимодействия ротационного инструмента с обрабатываемым материалом, сопровождающееся измерительным шумом, то целесообразно в качестве наблюдающего устройства использовать фильтр Калмана.

Выводы

Проверка структурных свойств агрегата показывает, что на его основе можно построить дорожную фрезерную машину с требуемыми динамическими характеристиками. В качестве управляющего устройства целесообразно использовать регулятор по состоянию, коэффициенты которого можно настраивать модальным методом.

Литература

- Кацай, Д.А. Ротационное фрезерование асфальта. Процессы и оборудование металлургического производства: межрегион. сб. науч. тр. / Д.А. Кацай, П.Г. Мазеин, С.Д. Сметанин; под ред. С.И. Платова. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2009. – Вып. № 8. – С. 61–66.
- Кацай, Д.А. Математическая модель автоматизированной системы управления мобильным агрегатом повышенной энергоэффективности / Д.А. Кацай // Труды научно-практической конференции «Актуальные проблемы автоматизации и управления». – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013. – С. 35–39.

Кацай Дмитрий Алексеевич, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры приборостроения, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); kd@mail@mail.ru.

Поступила в редакцию 3 марта 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"
2014, vol. 14, no. 2, pp. 81–87

RESEARCH OF DYNAMICS OF THE UNIT OF ROTATIONAL TYPE

D.A. Katsay, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
kd@mail@mail.ru

The mathematical model of the small-sized milling unit is given in article from two-wasps-nym by the subweight of the tool of rotational type. The unit is intended for performance of a surface treatment of asphalt concrete coverings. The unit provides surface formation with a demanded cross and longitudinal bias. The rotational type of the unit allows to receive high efficiency at small efforts of interaction of cutting elements with a material. The mathematical model of the unit is presented in the form of the differential equations in the form of Cauchy. Structural properties of the unit – as object of management are investigated. Calculation of coefficients of the regulator for a state is made by a modal method.

Keywords: rotary milling unit; surface treatment; structural properties; modal method.

References

1. Katsay D.A., Mazein P.G., Smetanin S.D. [Asphalt Rotational Milling]. *Protsessy i oborudovanie metallurgicheskogo proizvodstva: mezhregional'nyy sbornik nauchnykh trudov* [Processes and Equipment of Metallurgical Production: Interregional Collection of Scientific Works]. Magnitogorsk, GOU VPO "MGU" Publ., 2009, iss. no. 8, pp. 61–66.
2. Katsay D.A. [Mathematical Model of the Automated Control System of Mobile Units Enhanced Energy Efficiency]. *Trudy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Aktual'nye problemy avtomatizatsii i upravleniya"* [Proc. Scientific and Practical Conference "The Automation and Control Actual Problems"]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2013, pp. 35–39.

Received 3 March 2014