

Управление в технических системах Control in technical systems

Научная статья

УДК 004.92

DOI: 10.14529/ctcr260303

АЛГОРИТМЫ И JS-КОДЫ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ АНГУЛЯРНЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ В Х3D

А.И. Телегин¹, teleginai@susu.ru

Г.И. Волович², g_volovich@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3572-1823>

Е.В. Гусев³, gusev@v@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8458-1222>

В.И. Ширяев³, shiriaevvi@susu.ru

С.Г. Пудовкина¹, pudovkinasg@susu.ru

¹ Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе,
Миасс, Россия

² ООО «Челэнергоприбор», Челябинск, Россия

³ Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. Целью исследования является разработка алгоритмов и кодов на языке JavaScript (JS) для решения Первой Задачи Динамики (ПЗД) ангулярных Манипуляционных Роботов (МР), моделируемых в расширяемом языке разметки трехмерных виртуальных миров (Х3D). **Методы исследования** относятся к механике Систем Тел (СТ), системному анализу и робототехнике. **Результаты исследования** содержат математические модели для решения ПЗД в виде прямых рекуррентных формул вычисления абсолютных угловых скоростей, ускорений и линейных ускорений полюсов тел МР, обратных рекуррентных формул вычисления главных векторов сил и моментов сил, а также движущих моментов сил, действующих в шарнирных узлах МР. Эти формулы приведены к видам, для численной реализации которых достаточно использовать методы JS-объектов типа SFVec3f и SFRotation, что позволило получить короткие JS-коды вычисления перечисленных величин. Предложены два способа формирования и хранения входных и выходных данных. Первый основан на механизме внешнего Х3D-прототипирования. Во втором данные декларируются в интерфейсной части узла <Script>. Оба способа, а также их различные комбинации позволяют создавать, хранить, дополнять и расширять входные, промежуточные и выходные данные для решения различных задач механики и управления, в частности, для постановки и численного решения ПЗД. На примерах параметризации привода МР и адаптивного ПИД-регулятора Заданных Движений Тел (ЗДТ) описан способ расширения и дополнения входных данных. Для тестирования разработанных JS-кодов использованы известные Уравнения Динамики (УД) СТ с одной и тремя степенями свободы, а также УД динамически уравновешенной системы шести тел. **Заключение.** Полученные результаты используются для Х3D-прототипирования МР в программной системе «СисТел», предназначенной для цифрового моделирования МР, входящих в состав роботизированных технологических комплексов.

Ключевые слова: Х3D, прототипирование, первая задача динамики, параметры Эйлера, уравнения динамики, верификация уравнений динамики, тестирование кода, адаптивный ПИД-регулятор

Для цитирования: Алгоритмы и JS-коды решения первой задачи динамики ангулярных манипуляторов в Х3D / А.И. Телегин, Г.И. Волович, Е.В. Гусев и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2026. Т. 26, № 3. С. 26–45. DOI: 10.14529/ctcr260303

ALGORITHMS AND JS CODES FOR SOLVING THE FIRST PROBLEM OF DYNAMICS OF ANGULAR MANIPULATORS IN X3D

A.I. Telegin¹, teleginai@susu.ru

G.I. Volovich², g_volovich@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3572-1823>

E.V. Gusev³, gusev@v@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8458-1222>

V.I. Shiriaev³, shiriaevvi@susu.ru

S.G. Pudovkina¹, pudovkinasg@susu.ru

¹ South Ural State University, Miass, Russia

² LLC Chelenergopribor, Chelyabinsk, Russia

³ South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. The goal is to develop algorithms and codes in JavaScript (JS) to solve the First Dynamic Problem (FDP) of angular Manipulation Robots (MR), modeled in an extensible markup language for three-dimensional virtual worlds (X3D). The research methods relate to the mechanics of Body Systems (BS), system analysis and robotics. The results of the study contain mathematical models for solving the FDP in the form of direct recurrent formulas for calculating the absolute angular velocities, accelerations and linear accelerations of the poles of MR bodies, inverse recurrent formulas for calculating the main vectors of forces and moments of forces, as well as the driving moments of forces acting in the articulated nodes of MR. These formulas are given the types, for the numerical implementation of which it is sufficient to use the methods of JS objects such as SFVec3f and SFRotation, which made it possible to obtain short JS codes for calculating the listed quantities. Two methods of generating and storing input and output data are proposed. The first one is based on the external X3D prototyping mechanism. In the second case, the data is declared in the interface part of the node <Script>. Both methods, as well as their various combinations, make it possible to create, store, supplement and expand input, intermediate and output data for solving various problems of mechanics and control, in particular, for formulation and numerical solution of FDP. Using examples of parameterization of the MR drive and the adaptive PID controller for Specified Body Movements (SBM), a method for expanding and supplementing input data is described. To test the developed JS codes, the well-known Equations of BS Dynamics (ED) with one and three degrees of freedom, as well as the ED of a dynamically balanced system of six bodies, were used. **Conclusion.** The obtained results are used for X3D prototyping of MR in the “SisTel” software system, designed for digital modeling of MR, which are part of robotic technological complexes.

Keywords: X3D, prototyping, first dynamic problem, Euler parameters, dynamics equations, verification of dynamics equations, code testing, adaptive PID controller

For citation: Telegin A.I., Volovich G.I., Gusev E.V., Shiriaev V.I., Pudovkina S.G. Algorithms and JS codes for solving the first problem of dynamics of angular manipulators in X3D. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2026;26(3):26–45. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr260303

Введение

В работе используются результаты исследований, опубликованных в статьях [1, 2], и рассматривается решение ПЗД СТ, в которых каждая связанная пара тел имеет (хотя бы одну) общую точку. К классу таких СТ относятся МР.

ПЗД ставится и решается, как правило, для вычисления динамических нагрузок, необходимых для определения прочности и жесткости несущих конструкций, деталей шарнирных узлов, подшипниковых опор и т. д. [3, 4]. Часто ПЗД решается для проверки достаточности мощности приводов, обрабатывающих ЗДТ [5, 6], которые, в свою очередь, вычисляются по целевым движениям рабочих органов МР (схвата с грузом, краскораспылителя, сварочных устройств, сборочного инструмента и т. д.) в процессе решения обратной задачи кинематики. Кроме перечисленных в Программной Системе «СисТел» ПЗД решается с целью верификации различных форм и видов представления УД СТ.

УД в нормальной форме Коши используется для численного интегрирования [7, 8]. УД в регрессионной форме используется для идентификации постоянных параметров МР [9, 10]. УД в форме уравнений Гамильтона используются для поиска первых интегралов и управления [11, 12]. Аналитические виды УД используются в задачах синтеза СТ с заданными свойствами [13]. Конечные и/или рекуррентные виды математических моделей СТ используются как в численных, так и в аналитических исследованиях [13–15]. Линеаризованные (около ЗДТ) виды УД используются для исследования колебаний МР около (вблизи) ЗДТ, определения собственных частот МР и т. д. [16]. УД в форме уравнений Лагранжа второго рода используются для решения задач динамики и управления [3, 5, 6, 10, 15–17].

Таким образом, разработка эффективных методов аналитического и численного решения ПЗД МР является актуальной задачей.

Постановка задачи: разработать математические модели, алгоритмы и JS-коды для вычисления сил и моментов сил, приведенных к полюсам тел МР, т. е. для решения ПЗД МР с использованием объектов SFVec3f и SFRotation. Верифицировать расчетные формулы и протестировать JS-коды численного решения ПЗД.

1. Математические модели, алгоритмы и JS-коды численного решения ПЗД МР

Согласно правилам описания МР (см. первый раздел статьи [1]) с каждым телом МР мысленно связывается Система Координат Тела (СКТ), в которой задаются Постоянные Параметры Тела (ППТ). К ППТ с k -м порядковым номером, т. е. к ППТ(k) относятся:

1) $\bar{R}_k = \overline{O_{k-1}O_k} = R_k^x \bar{x}_{k-1} + R_k^y \bar{y}_{k-1} + R_k^z \bar{z}_{k-1}$ – межполюсный вектор, где R_k^x, R_k^y, R_k^z – относительные координаты полюса тела O_k , т. е. декартовы координаты точки O_k в СКТ($k-1$);

2) m_{ok} – масса k -го тела;

3) $\bar{r}_{ck} = \overline{O_k C_k} = c_k^x \bar{x}_k + c_k^y \bar{y}_k + c_k^z \bar{z}_k$ – вектор центра масс, где C_k – Центр Масс (ЦМ) k -го тела, c_k^x, c_k^y, c_k^z – декартовы координаты ЦМ(k) в СКТ(k) $O_k \bar{x}_k \bar{y}_k \bar{z}_k$;

4) I_{ck} – список Осевых Моментов Инерции (ОМИ) $I_{ck}^x, I_{ck}^y, I_{ck}^z$ в Центральной Системе Координат (ЦСК) k -го тела, где I_{ck}^x – момент инерции k -го тела относительно оси $C_k \bar{x}_k$, I_{ck}^y – момент инерции k -го тела относительно оси $C_k \bar{y}_k$, I_{ck}^z – момент инерции k -го тела относительно оси $C_k \bar{z}_k$;

5) J_{ck} – список Центробежных Моментов Инерции (ЦМИ) $J_{ck}^x, J_{ck}^y, J_{ck}^z$ в ЦСК(k). Из элементов списков I_{ck} и J_{ck} образуется Тензор Инерции k -го Тела (ТИТ(k)) в ЦСК $C_k \bar{x}_k \bar{y}_k \bar{z}_k$, матрица которого имеет следующий вид:

$$I_k^c = \begin{pmatrix} I_{ck}^x & -J_{ck}^x & -J_{ck}^y \\ -J_{ck}^x & I_{ck}^y & -J_{ck}^z \\ -J_{ck}^y & -J_{ck}^z & I_{ck}^z \end{pmatrix},$$

где $k = 1, 2, \dots, N$ – количество подвижных тел МР. В JS-коде решения ПЗД матрица I_k^c представлена векторами $T_{ck}^x = (I_{ck}^x, -J_{ck}^x, -J_{ck}^y)$, $T_{ck}^y = (-J_{ck}^x, I_{ck}^y, -J_{ck}^z)$, $T_{ck}^z = (-J_{ck}^y, -J_{ck}^z, I_{ck}^z)$.

Параметр $\bar{R}_k$ является геометрическим. Модуль вектора $\bar{R}_k$ является длиной $(k-1)$ -го тела и сумма $|\bar{R}_k|$ по k определяет вылет руки МР [1]. Набор параметров $m_{ok}, c_k^x, c_k^y, c_k^z, I_{ck}^x, I_{ck}^y, I_{ck}^z, J_{ck}^x, J_{ck}^y, J_{ck}^z$ описывает Массовые и Инерционные Параметры (МИП) k -го тела.

ППТ и ЗДТ образуют входные данные в ПЗД МР. ЗДТ в текущий момент времени описываются следующими Кинематическими Параметрами Тел (КПТ): $\bar{q}_k$ – Направляющие Косинусы Оси Поворота (НКОП) k -го тела относительно его базы, т. е. $(k-1)$ -го тела; $q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k$ – относительные угол поворота, угловая скорость и ускорение k -го тела. Из КПТ $\bar{q}_k$ и q_k формируется Параметр Эйлера (ПЭ) k -го тела, задающий поворот СКТ(k) относительно СКТ($k-1$). ПЭ(k) обозначим через Q_k . Отметим, что для k -й Вращательной Кинематической Пары (ВКП) первые три числа ПЭ Q_k , т. е. компоненты орта $\bar{q}_k$, являются постоянными, так как они описывают ориентацию оси вращения k -го тела относительно его базы (предшествующего тела). Четвертое число ПЭ Q_k , т. е. угол поворота q_k , является функцией времени [1, 2].

К выходным данным относятся Полюсные Силовые Факторы (ПСФ), т. е. силы и моменты сил, приведенные к полюсам тел. ПСФ являются решением ПЗД МР.

Условимся через (i,j) ссылаться (обращаться) к формуле под номером j в i-м разделе учебно-го пособия [18]. Наша ближайшая цель – использовать Обратные Рекуррентные Формулы (ОРФ) (4.1), (4.2) для решения ПЗД методами JS-объектов типа SFVec3f и SFRotation, встроенных в ХЗД. Для МР с учетом равенства $\bar{g} = -g\bar{y}$ и обозначений $\ddot{\bar{r}}_k = \ddot{O}\bar{O}_k$, $\bar{m}_{ok} = m_{ok}\bar{r}_{ck}$ ОРФ (4.1), (4.2) вычисления ПСФ принимают вид:

$$\bar{F}_k = m_{ok}(\ddot{\bar{r}}_k + \ddot{\bar{r}}_{ck} + g\bar{y}) + \bar{F}_{k+1}, \quad (1)$$

$$\bar{M}_k = m_{ok}\bar{r}_{ck} \times (\ddot{\bar{r}}_k + \ddot{\bar{r}}_{ck} + g\bar{y}) + \dot{\bar{K}}_{ck} + \bar{R}_{k+1} \times \bar{F}_{k+1} + \bar{M}_{k+1}, \quad (2)$$

где $k = N, N-1, \dots, 1$; $\bar{F}_{N+1} = \bar{M}_{N+1} = 0$,

$$\dot{\bar{K}}_{ck} = I_k^c \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k^c \cdot \bar{\omega}_k, \quad \ddot{\bar{r}}_{ck} = \bar{\varepsilon}_k \times \bar{r}_{ck} + \bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{r}_{ck}). \quad (3)$$

Вектор $\ddot{\bar{r}}_i$ Абсолютного Ускорения Полюса (АУП) i-го тела вычисляется по Прямой Рекуррентной Формуле (ПРФ)

$$\ddot{\bar{r}}_i = \ddot{\bar{r}}_{i-1} + \bar{\varepsilon}_{i-1} \times \bar{R}_i + \bar{\omega}_{i-1} \times (\bar{\omega}_{i-1} \times \bar{R}_i). \quad (4)$$

Абсолютная Угловая Скорость (АУС) $\bar{\omega}_i$ и Ускорение (АУУ) $\bar{\varepsilon}_i = \dot{\bar{\omega}}_i$ i-го тела вычисляются по ПРФ

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i \bar{q}_i, \quad \bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_{i-1} + \ddot{q}_i \bar{q}_i + \dot{q}_i \bar{\omega}_{i-1} \times \bar{q}_i. \quad (5)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, N$, $\ddot{r}_0 = \bar{\omega}_0 = \bar{\varepsilon}_0 = 0$.

Для МР с ВКП, шаровыми и шаровыми с пальцем кинематическими парами формулы (1)–(5) используются для решения следующих задач:

- вычисления ПСФ $\bar{F}_k$ и $\bar{M}_k$ для ЗДТ;
- вычисления сил и моментов сил трения в шарнирах;
- вычисления динамических реакций в подшипниковых опорах ВКП;
- верификации УД МР в различных формах и видах.

Для вычисления Кинематических Функций Тел (КФТ), т. е. проекций на оси $O_i\bar{x}_i$, $O_i\bar{y}_i$, $O_i\bar{z}_i$ СКТ(i) векторов $\bar{y}$, АУС(i) $\bar{\omega}_i$, АУУ(i) $\bar{\varepsilon}_i$ и УПТ(i) $\ddot{\bar{r}}_i$, используются элементы $Y[i]$, $w[i]$, $e[i]$ и $rtt[i]$ списков Y, w, e, rtt. Для решения ПЗД МР в JS-кодах используются следующие глобальные списки входных данных:

```
var R = [], m0 = [], rc = [], Ic = [], Jc = [], // списки ППТ,
    Tx = [], Ty = [], Tz = [], // списки строк матрицы ТИТ,
    Q = [], q = [], qt = [], qtt = [], // списки КПТ,
```

а также следующие списки промежуточных данных:

```
Y = [], w = [], e = [], rtt = [], // списки КФТ
```

и выходных данных:

```
F = [], M = [] // списки ПСФ.
```

В объектно-ориентированном программировании понятия «конструктор», «свойства» и «методы» объекта связаны с описанием характеристик объекта и его поведения. Конструктор используется для создания (инициализации) объекта. Свойства – это параметры объекта, например, проекции вектора или НКОП и угол поворота. Метод – это функция, выполняющая определенные действия. Методы могут менять свойства объекта, взаимодействовать с другими объектами и т. д. Здесь мы используем методы JS-объектов типа SFVec3f и SFRotation.

Объект типа SFVec3f создается конструктором *имяВектора* = new SFVec3f(x, y, z), где x, y, z – свойства вектора "имяВектора", т. е. его проекции на оси выбранной Системы Координат (СК). Отсутствующие свойства автоматически заменяются нулями. Например, $Y = \text{new SFVec3f}(0, 1)$ – орт вертикали, $X = \text{new SFVec3f}(1)$ – орт горизонтали. Мы будем использовать следующие методы векторов: add(вектор) – возвращает сумму векторов; cross(вектор) – возвращает векторное произведение; dot(вектор) – возвращает скалярное произведение; multiply(число) – возвращает умножение вектора на число. Например, метод *вектор_1.add(вектор_2)* возвращает сумму векторов "вектор_1" и "вектор_2".

Объект типа SFRotation(x, y, z, angle) описывает ПЭ поворота СК. Свойства x, y, z задают Вектор Оси Поворота (ВОП) и свойство angle задает угол поворота в радианах. ВОП лежит на оси поворота, направлен в положительную сторону оси и имеет произвольную длину. Если длина ВОП равна единице, то компоненты ВОП и НКОП совпадают. ПЭ можно создать, используя конструктор

ПЭ_1 = new SFRotation(x, y, z, angle) или ПЭ_2 = new SFRotation(вектор_1, вектор_2).

Во втором конструкторе оба аргумента – трехмерные векторы. В ПЭ_2 параметры (x, y, z, angle) описывают поворот, переводящий *вектор_1* в *вектор_2*. В процессе конструирования ПЭ Q_k его ВОП автоматически преобразуется в НКОП(k), т. е. в орт оси поворота $\bar{q}_k$.

Здесь используются следующие методы ПЭ: *getAxis()* – возвращает орт оси поворота; *inverse()* – возвращает ПЭ обратного поворота; *multVec(вектор_1)* – возвращает вектор, равный умножению матрицы поворота, заданной через ПЭ, на *вектор_1*.

Если ПЭ Q_i задает поворот СКТ(i) относительно СКТ(i-1) и вычислен $Y[i-1]$, т. е. вектор проекций орта вертикали $\bar{y}$ на оси СКТ(i-1), то, используя метод *inverse()* и *multVec(Y[i-1])*, получим

$$Y[i] = Q[i].inverse().multVec(Y[i-1]).$$

Аналогично из ПРФ $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i \bar{q}_i$ вычисления АУС(i) получим следующую программную реализацию вычисления проекций вектора $\bar{\omega}_i$ на оси СКТ(i):

$$w[i] = Q[i].inverse().multVec(w[i-1]).add(Q[i].getAxis().multiply(qt[i])).$$

Здесь учтено, что орт $\bar{q}_i$ представлен в СКТ(i) и метод *getAxis()* возвращает проекции оси поворота $O_i \bar{q}_i$ на оси СКТ(i). Аналогично, используя ПРФ (5) вычисления АУУ(i), получим следующий JS-код вычисления проекций АУУ(i) на оси СКТ(i):

$$e[i] = Q_multVec(e[i-1]).add(qi.multiply(qtt[i])).add(wi.cross(qi).multiply(qt[i])),$$

где $Q_ = Q[i].inverse()$, $qi = Q[i].getAxis()$ и $wi = Q_multVec(w[i-1])$ – проекции АУС(i-1) на оси СКТ(i).

По определению (см. описание ППТ) вектор $\bar{R}_i$ представлен проекциями R_i^x, R_i^y, R_i^z на оси СКТ(i-1). Поэтому с использованием методов сложения векторов (*add*) и векторного произведения (*cross*) правая часть ПРФ (4) имеет следующую программную реализацию:

$$rtt[i-1].add(e[i-1].cross(R[i])).add(w[i-1].cross(w[i-1].cross(R[i]))).$$

Таким образом, JS-код программы вычисления КФТ имеет вид:

Листинг 1. Функция вычислений проекций на оси СКТ орта вертикали, АУС, АУУ и АУП тел

```
function КФТ_MP() {  
  Y[0] = new SFVec3f(0, 1); w[0] = new SFVec3f; e[0] = new SFVec3f; rtt[0] = new SFVec3f;  
  // Перебор тел MP и программная реализация ПРФ (1)–(4)  
  for(var i = 1; i <= N; i++) { i1 = i - 1; Q_ = Q[i].inverse(); qi = Q[i].getAxis();  
  Y[i] = Q_.multVec(Y[i1]); // проекции орта вертикали на оси СКТ(i)  
  wi = Q_.multVec(w[i1]); w[i] = wi.add(qi.multiply(qt[i]));  
  e[i] = Q_.multVec(e[i1]).add(qi.multiply(qtt[i])).add(wi.cross(qi).multiply(qt[i])),  
  rtt[i] = Q_.multVec(rtt[i1]).add(e[i1].cross(R[i])).add(w[i1].cross(w[i1].cross(R[i]))); }; };
```

Программная реализация ОРФ (1), (2) с использованием описанных методов представлена в листинге 2. Здесь ТИТ(k) сформирован из списков ОМИ(k) и ЦМИ(k). Вектор Tw содержит результат умножения ТИТ(k) на вектор проекций ($\omega_k^x, \omega_k^y, \omega_k^z$) АУС(k) на оси СКТ(k). Вектор Te содержит результат умножения ТИТ(k) на вектор проекций ($\varepsilon_k^x, \varepsilon_k^y, \varepsilon_k^z$) АУУ(k) на оси СКТ(k).

Листинг 2. Функция вычислений ПСФ по ОРФ (1), (2)

```
function ПСФ_MP() { R[N+1] = new SFVec3f; Q[N+1] = new SFRotation;  
  F[N+1] = new SFVec3f; M[N+1] = new SFVec3f;  
  for(var k = N; k > 0; k--) {  
    // Вычисление по ОРФ (1) главного вектора сил, приведенных к полюсу k-го тела  
    Fk = rtt[k].add(e[k].cross(rc[k])).add(w[k].cross(w[k].cross(rc[k]))).add(Y[k].multiply(g)).multiply(m0[k]);  
    k1 = k + 1; F[k] = Fk.add(Q[k1].multVec(F[k1]));  
    // Вычисление по ОРФ (2) главного вектора моментов сил, приведенных к полюсу k-го тела  
    Te = new SFVec3f(Tx[k].dot(e[k]), Ty[k].dot(e[k]), Tz[k].dot(e[k]));  
    Tw = new SFVec3f(Tx[k].dot(w[k]), Ty[k].dot(w[k]), Tz[k].dot(w[k]));  
    M[k] = rc[k].cross(Fk).add(R[k1].cross(Q[k1].multVec(F[k1]))).  
    add(Te).add(w[k].cross(Tw)).add(Q[k1].multVec(M[k1])); }; };
```

2. Формализм выписывания выражений ПСФ

Для верификации формул вычисления ПСФ и тестирования JS-кодов их программной реализации нам потребуются следующие формулы. Если ТИТ(k) диагональный, т. е. $I_k^c = \text{diag}(I_{ck}^x, I_{ck}^y, I_{ck}^z)$, то формула (7.20) принимает вид

$$\dot{\bar{K}}_{ck} = \dot{K}_{ck}^x \bar{x}_k + \dot{K}_{ck}^y \bar{y}_k + \dot{K}_{ck}^z \bar{z}_k, \quad (6)$$

где

$$\dot{K}_{ck}^x = I_{ck}^x \varepsilon_k^x + I_{yk}^z \omega_k^y \omega_k^z, \quad \dot{K}_{ck}^y = I_{ck}^y \varepsilon_k^y + I_{zk}^x \omega_k^x \omega_k^z, \quad \dot{K}_{ck}^z = I_{ck}^z \varepsilon_k^z + I_{xk}^y \omega_k^x \omega_k^y \quad (7)$$

– проекции вектора $\bar{K}_{ck}$ на оси СКТ(k); $\omega_k^x, \omega_k^y, \omega_k^z$ – проекции АУС(k) на оси СКТ(k); $\varepsilon_k^x, \varepsilon_k^y, \varepsilon_k^z$ – проекции АУУ(k) на оси СКТ(k); $I_{yk}^z = I_{ck}^z - I_{ck}^y, I_{zk}^x = I_{ck}^x - I_{ck}^z, I_{xk}^y = I_{ck}^y - I_{ck}^x$.

В процессе выписывания УД будем использовать ПРФ (7.21) вычисления проекций ω_i^ξ АУС(i) на оси СКТ(i) в следующем виде:

$$\omega_i^\xi = \sum_\eta \xi_i^\eta \omega_{i-1}^\eta + q_i^\xi \dot{q}_i, \quad (8)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, $\omega_0^\eta = 0$, $\xi_i^\eta = \bar{\xi}_i \cdot \bar{\eta}_{i-1}$ (если $\bar{\xi}_i = \bar{\eta}_{i-1}$, то $\xi_i^\eta = 1$),

$$q_i^\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{q}_i \in \{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\} \text{ и } \bar{q}_i \neq \bar{\xi}_i, \\ 1, & \text{если } \bar{q}_i = \bar{\xi}_i, \\ \bar{q}_i \cdot \bar{\xi}_i, & \text{если } \bar{q}_i \neq \bar{\xi}_i. \end{cases}$$

Здесь и далее для сокращения записей используются немые символы ξ, η, ζ , принимающие значения на множестве $\{x, y, z\}$ символов (имен, обозначений) осей СКТ. В сумме по η три слагаемых, например, $\sum_\eta A_\eta = A_x + A_y + A_z$, т. е. $\eta \in \{x, y, z\}$ [18].

В процессе выписывания ω_i^ξ по ПРФ (8) рекомендуем использовать обозначения $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$ и следующие таблицы обозначений направляющих косинусов осей СКТ в ВКП(i).

Таблицы направляющих косинусов осей СКТ(i) относительно СКТ(i-1)
Tables of guide cosines of the axes of the BCS(i) relative to the BCS(i-1)

$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1}$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$\bar{y}_i = \bar{y}_{i-1}$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$\bar{z}_i = \bar{z}_{i-1}$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$
$\bar{x}_{i-1}$	1	0	0	$\bar{x}_{i-1}$	c_i	0	s_i	$\bar{x}_{i-1}$	c_i	$-s_i$	0
$\bar{y}_{i-1}$	0	c_i	$-s_i$	$\bar{y}_{i-1}$	0	1	0	$\bar{y}_{i-1}$	s_i	c_i	0
$\bar{z}_{i-1}$	0	s_i	c_i	$\bar{z}_{i-1}$	$-s_i$	0	c_i	$\bar{z}_{i-1}$	0	0	1

Эти таблицы используются для разложения орт осей СКТ(i) на оси СКТ(i-1). Например, если i-е тело повернуто относительно (i-1)-го тела на угол q_i вокруг оси $O_i \bar{z}_i$, то из третьей таблицы получим

$$\bar{x}_i = c_i \bar{x}_{i-1} + s_i \bar{y}_{i-1}, \quad \bar{y}_i = -s_i \bar{x}_{i-1} + c_i \bar{y}_{i-1}, \quad \bar{z}_i = \bar{z}_{i-1}, \quad x_i^z = y_i^z = 0, \quad z_i^z = 1. \quad (9)$$

В правой части ПРФ (8) в общем случае (когда все множители не равны нулю) четыре слагаемых. Для $i = 1$ $\bar{\omega}_{i-1} = \bar{\omega}_0 = 0$, т. е. $\omega_0^x = \omega_0^y = \omega_0^z = 0$ и $\omega_1^\xi = q_1^\xi \dot{q}_1$. Для МР, как правило, $q_1^x = q_1^z = 0$, $q_1^y = 1$, т. е. АУС(1) $\bar{\omega}_1 = (0, \dot{q}_1, 0)$. Тогда для $i = 2$ в сумме по η одно слагаемое $\xi_2^y \dot{q}_1$ и т. д.

ПРФ (7.24) вычисления проекций ε_i^ξ АУУ(i) на оси СКТ(i) в принятых обозначениях имеет вид

$$\varepsilon_i^\xi = \sum_\eta \left(\xi_i^\eta \varepsilon_{i-1}^\eta + q_{\eta i}^\xi \omega_{i-1}^\eta \dot{q}_i \right) + q_i^\xi \ddot{q}_i, \quad (10)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, $\varepsilon_0^\eta = 0$ и трехиндексный символ $q_{\eta i}^\xi = \bar{q}_i \times \bar{\xi}_i \cdot \bar{\eta}_{i-1}$. Если $\bar{q}_i = \bar{\xi}_i$, то $q_{\eta i}^\xi = 0$.

Рассмотрим примеры ручного выписывания формул вычисления ПСФ, которые будем использовать для тестирования разработанных JS-кодов.

Пример 1. Для маятника на рис. 1 имеем $N = 1$, $\bar{r}_{c1} = -b_1 \bar{y}_1$, $b_1 = |\overline{O_1 C_1}|$, $\bar{z} = \bar{z}_1$, $\bar{\omega}_1 = \dot{q}_1 \bar{z}_1$, $\bar{\varepsilon}_1 = \dot{q}_1 \bar{q}_1$, $\bar{r}_1 = \overline{O O_1} = 0$. Если маятник статически уравновешен, т. е. $C_1 = O_1$, $b_1 = 0$, $\bar{r}_{c1} = 0$, то по формулам (1), (2) получим $\bar{F}_1 = m_{01} g \bar{y}$, $\bar{M}_1 = \dot{q}_1 I_1^c \cdot \bar{z}_1 + \dot{q}_1^2 \bar{z}_1 \times I_1^c \cdot \bar{z}_1$. Используя ТИТ, в общем виде получим $I_1^c \cdot \bar{z}_1 = -J_{c1}^y \bar{x}_1 - J_{c1}^z \bar{y}_1 + I_{c1}^z \bar{z}_1$, $\bar{z}_1 \times I_1^c \cdot \bar{z}_1 = -J_{c1}^y y_1 + J_{c1}^z x_1$. Следовательно,

$$\bar{M}_1 = (J_{c1}^z \dot{q}_1^2 - J_{c1}^y \dot{q}_1) \bar{x}_1 - (J_{c1}^z \dot{q}_1 + J_{c1}^y \dot{q}_1^2) \bar{y}_1 + I_{c1}^z \dot{q}_1 \bar{z}_1 = M_1^x \bar{x}_1 + M_1^y \bar{y}_1 + I_{c1}^z \dot{q}_1 \bar{z}_1.$$

В случае $b_1 > 0$ по ОРФ (1) выпишем

$$\bar{F}_1 = m_{01}[-b_1\dot{q}_1\bar{z}_1 \times \bar{y}_1 - b_1\dot{q}_1^2\bar{z}_1 \times (\bar{z}_1 \times \bar{y}_1) + g\bar{y}].$$

Учитывая, что $\bar{z}_1 \times \bar{y}_1 = -\bar{x}_1$, $\bar{z}_1 \times (\bar{z}_1 \times \bar{y}_1) = -\bar{z}_1 \times \bar{x}_1 = -\bar{y}_1$, получим

$$\bar{F}_1 = m_{01}[b_1(\ddot{q}_1\bar{x}_1 + \dot{q}_1^2\bar{y}_1) + g\bar{y}], \bar{r}_{c1} \times \bar{F}_1 = -b_1m_{01}(-b_1\dot{q}_1\bar{z}_1 - g s_1\bar{z}_1).$$

Следовательно,

$$\bar{M}_1 = M_1^x\bar{x}_1 + M_1^y\bar{y}_1 + [(I_{c1}^z + m_{01}b_1^2)\ddot{q}_1 + m_{01}gb_1\sin(q_1)]\bar{z}_1.$$

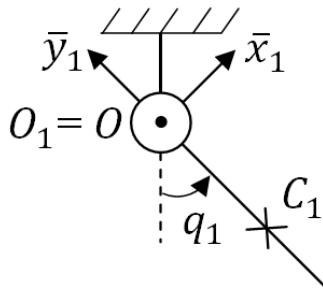


Рис. 1. Маятник
Fig. 1. The pendulum

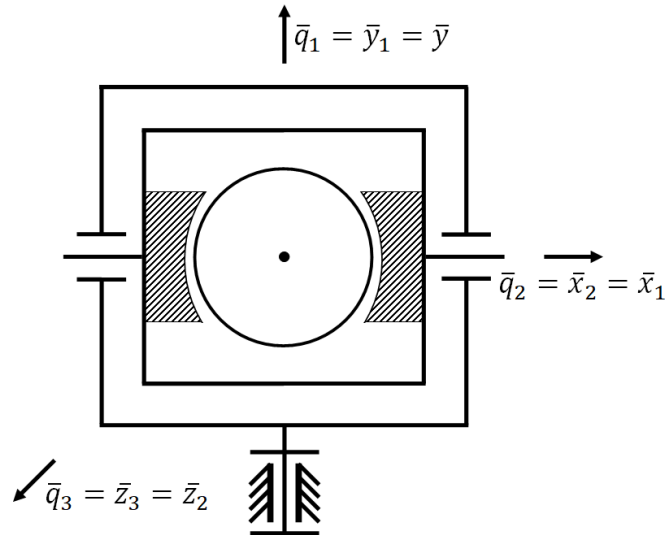


Рис. 2. Гирископ в трехосном кардановом подвесе
Fig. 2. A gyroscope in a three-axis gimbal

Пример 2. Для гироскопа в трехосном кардановом подвесе на рис. 2 имеем

$$N=3, \bar{r}_k = \bar{r}_{ck} = \bar{R}_k = 0, I_k^c = \text{diag}(I_{ck}^x, I_{ck}^y, I_{ck}^z)$$

для всех k . Следовательно, ОРФ (1), (2) принимают вид $\bar{F}_k = m_{0k}g\bar{y} + \bar{F}_{k+1}$, $\bar{M}_k = \dot{\bar{K}}_{ck} + \bar{M}_{k+1}$, где $k=2, 1$. Для $k=3$ $\bar{F}_3 = m_{03}g\bar{y}$, $\bar{M}_3 = \dot{\bar{K}}_{c3}$.

Для ротора $I_3^c = \text{diag}(I_{c3}^x, I_{c3}^y, I_{c3}^z)$, т. е. $I_{x3}^y = 0$. Следовательно, по формулам (6), (7) выпишем

$$\bar{M}_3 = \dot{\bar{K}}_{c3} = \dot{K}_{c3}^x\bar{x}_3 + \dot{K}_{c3}^y\bar{y}_3 + \dot{K}_{c3}^z\bar{z}_3, \text{ где } \dot{K}_{c3}^z = I_{c3}^z\varepsilon_3^z + I_{x3}^y\omega_3^x\omega_3^y = I_{c3}^z\varepsilon_3^z.$$

Если внешняя (наружная) рамка вращается вокруг вертикальной оси $C\bar{y}_1$, внутренняя вокруг горизонтальной оси $C\bar{x}_2$, ротор вокруг оси $C\bar{z}_3$, где C – ЦМ гироскопа, то (см. рис. 2)

$$\bar{q}_1 = \bar{y}_1 = \bar{y}, \quad \bar{q}_2 = \bar{x}_2 = \bar{x}_1, \quad \bar{q}_3 = \bar{z}_3 = \bar{z}_2.$$

Из формул (9) имеем $\bar{x}_3 = c_3\bar{x}_2 + s_3\bar{y}_2$, $\bar{y}_3 = -s_3\bar{x}_2 + c_3\bar{y}_2$, $\bar{z}_3 = \bar{z}_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 &= \dot{\bar{K}}_{c2} + \dot{\bar{K}}_{c3} = \dot{K}_{c2}^x\bar{x}_2 + \dot{K}_{c2}^y\bar{y}_2 + \dot{K}_{c2}^z\bar{z}_2 + \dot{K}_{c3}^x(c_3\bar{x}_2 + s_3\bar{y}_2) + \dot{K}_{c3}^y(-s_3\bar{x}_2 + c_3\bar{y}_2) + I_{c3}^z\varepsilon_3^z\bar{z}_2 = \\ &= (\dot{K}_{c2}^x + c_3\dot{K}_{c3}^x - s_3\dot{K}_{c3}^y)\bar{x}_2 + (\dot{K}_{c2}^y + s_3\dot{K}_{c3}^x + c_3\dot{K}_{c3}^y)\bar{y}_2 + (\dot{K}_{c2}^z + I_{c3}^z\varepsilon_3^z)\bar{z}_2. \end{aligned}$$

Из второй таблицы имеем $\bar{x}_2 = \bar{x}_1$, $\bar{y}_2 = c_2\bar{y}_1 + s_2\bar{z}_1$, $\bar{z}_2 = -s_2\bar{y}_1 + c_2\bar{z}_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \dot{\bar{K}}_{c1} + \bar{M}_2 = \dot{K}_{c1}^x\bar{x}_1 + \dot{K}_{c1}^y\bar{y}_1 + \dot{K}_{c1}^z\bar{z}_1 + (\dot{K}_{c2}^x + c_3\dot{K}_{c3}^x - s_3\dot{K}_{c3}^y)\bar{x}_1 + \\ &+ (\dot{K}_{c2}^y + s_3\dot{K}_{c3}^x + c_3\dot{K}_{c3}^y)(c_2\bar{y}_1 + s_2\bar{z}_1) + (\dot{K}_{c2}^z + I_{c3}^z\varepsilon_3^z)(-s_2\bar{y}_1 + c_2\bar{z}_1) = \\ &= (\dot{K}_{c1}^x + \dot{K}_{c2}^x + c_3\dot{K}_{c3}^x - s_3\dot{K}_{c3}^y)\bar{x}_1 + [\dot{K}_{c1}^y + c_2(\dot{K}_{c2}^y + s_3\dot{K}_{c3}^x + c_3\dot{K}_{c3}^y) - s_2(\dot{K}_{c2}^z + I_{c3}^z\varepsilon_3^z)]\bar{y}_1 + \\ &+ [\dot{K}_{c1}^z + s_2(\dot{K}_{c2}^y + s_3\dot{K}_{c3}^x + c_3\dot{K}_{c3}^y) + c_2(\dot{K}_{c2}^z + I_{c3}^z\varepsilon_3^z)]\bar{z}_1. \end{aligned}$$

Приведем моменты сил $\bar{M}_k$ к осям вращения гироскопа и его рамок. Для ротора имеем

$$M_3 = \bar{q}_3 \cdot \bar{M}_3 = \bar{z}_3 \cdot \bar{M}_3 = I_{c3}^z\varepsilon_3^z.$$

Для внутренней рамки с учетом обозначений $I_{yk}^z = I_{ck}^z - I_{ck}^y$, $I_{zk}^x = I_{ck}^x - I_{ck}^z$, $I_{xk}^y = I_{ck}^y - I_{ck}^x$ получим

$$\begin{aligned} M_2 &= \bar{x}_2 \cdot \bar{M}_2 = \dot{K}_{c2}^x + c_3\dot{K}_{c3}^x - s_3\dot{K}_{c3}^y = I_{c2}^x\varepsilon_2^x + I_{y2}^y\omega_2^y\omega_2^z + \\ &+ c_3[I_{c3}^x\varepsilon_3^x + (I_{c3}^z - I_{c3}^y)\omega_3^y\omega_3^z] - s_3[I_{c3}^y\varepsilon_3^y + (I_{c3}^x - I_{c3}^z)I_{z3}^x\omega_3^x\omega_3^z]. \end{aligned}$$

Аналогично для внешней рамки

$$M_1 = \bar{y}_1 \cdot \bar{M}_1 = \dot{K}_{c1}^y + c_2(\dot{K}_{c2}^y + s_3 \dot{K}_{c3}^x + c_3 \dot{K}_{c3}^y) - s_2(\dot{K}_{c2}^z + I_{c3}^z \varepsilon_3^z).$$

С учетом равенств $\omega_1^x = \omega_1^z = 0$, $\varepsilon_1^y = \ddot{q}_1$, $\dot{K}_{c1}^y = I_{c1}^y \varepsilon_1^y + I_{z1}^x \omega_1^x \omega_1^z = I_{c1}^y \ddot{q}_1$ получим

$$\begin{aligned} M_1 &= I_{c1}^y \ddot{q}_1 + c_2 \dot{K}_{c2}^y - s_2 \dot{K}_{c2}^z + c_2(s_3 \dot{K}_{c3}^x + c_3 \dot{K}_{c3}^y) - I_{c3}^z s_2 \varepsilon_3^z = \\ &= I_{c1}^y \ddot{q}_1 + c_2[I_{c2}^y \varepsilon_2^y + (I_{c2}^x - I_{c2}^z) \omega_2^x \omega_2^z] - s_2[I_{c2}^z \varepsilon_2^z + (I_{c2}^y - I_{c2}^x) \omega_2^x \omega_2^y] + \\ &+ c_2\{s_3[I_{c3}^x \varepsilon_3^x + (I_{c3}^z - I_{c3}^y) \omega_3^y \omega_3^z] + c_3[I_{c3}^y \varepsilon_3^y + (I_{c3}^x - I_{c3}^z) \omega_3^x \omega_3^z]\} - I_{c3}^z s_2 \varepsilon_3^z. \end{aligned}$$

Продemonстрируем формализм выписывания по ПРФ (8), (10) проекций АУС и АУУ тел на оси СКТ.

Для $i = 1$ имеем $\bar{\omega}_1 = \dot{q}_1 \bar{y}_1$, т. е. $\omega_1^x = \omega_1^z = 0$, $\omega_1^y = \dot{q}_1$. По ПРФ (8) выпишем

$$\begin{aligned} \omega_2^x &= \sum_{\eta} x_2^{\eta} \omega_1^{\eta} + x_2^x \dot{q}_2 = x_2^y \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \dot{q}_2, \quad \omega_2^y = \sum_{\eta} y_2^{\eta} \omega_1^{\eta} + x_2^y \dot{q}_2 = y_2^y \dot{q}_1 = c_2 \dot{q}_1, \\ \omega_2^z &= \sum_{\eta} z_2^{\eta} \omega_1^{\eta} + x_2^z \dot{q}_2 = z_2^y \dot{q}_1 = -s_2 \dot{q}_1, \quad \omega_3^x = \sum_{\eta} x_3^{\eta} \omega_2^{\eta} + z_3^x \dot{q}_3 = c_3 \omega_2^x + s_3 \omega_2^y, \\ \omega_3^y &= \sum_{\eta} y_3^{\eta} \omega_2^{\eta} + z_3^y \dot{q}_3 = -s_3 \omega_2^x + c_3 \omega_2^y, \quad \omega_3^z = \sum_{\eta} z_3^{\eta} \omega_2^{\eta} + z_3^z \dot{q}_3 = \omega_2^z + \dot{q}_3. \end{aligned}$$

Для $i = 1$ $\bar{\varepsilon}_1 = \dot{\bar{\omega}}_1 = \ddot{q}_1 \bar{y}_1$, т. е. $\varepsilon_1^x = \varepsilon_1^z = 0$, $\varepsilon_1^y = \ddot{q}_1$. Для $i = 2$ по ПРФ (10) выпишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^x &= \sum_{\eta} (x_2^{\eta} \varepsilon_1^{\eta} + x_{\eta 2}^x \omega_1^{\eta} \dot{q}_2) + x_2^x \ddot{q}_2 = x_2^y \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \ddot{q}_2, \\ \varepsilon_2^y &= \sum_{\eta} (y_2^{\eta} \varepsilon_1^{\eta} + x_{\eta 2}^y \omega_1^{\eta} \dot{q}_2) + x_2^y \ddot{q}_2 = y_2^y \ddot{q}_1 + \bar{z}_2 \cdot \bar{y}_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = c_2 \ddot{q}_1 - s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2, \\ \varepsilon_2^z &= \sum_{\eta} (z_2^{\eta} \varepsilon_1^{\eta} + x_{\eta 2}^z \omega_1^{\eta} \dot{q}_2) + x_2^z \ddot{q}_2 = z_2^y \ddot{q}_1 - \bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = -s_2 \ddot{q}_1 - c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2. \end{aligned}$$

Для упрощения ручного выписывания по ПРФ (8), (10) в случае $\bar{q}_i \in \{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\}$ рекомендуем придерживаться следующих правил. Для $i > 2$ процесс выписывания начинать с конкретизации чисел $i, i-1$ и разворачивания сумм по $\eta \in \{x, y, z\}$, где символ q в обозначениях $q_{\eta i}^{\xi}$ и q_i^{ξ} заменять на соответствующий символ из множества $\{x, y, z\}$. Например, для $i = 3$ и (в нашем случае) $\bar{q}_3 = \bar{z}_3$ ПРФ (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^{\xi} &= \sum_{\eta} (\xi_{\eta 3}^{\eta} \varepsilon_2^{\eta} + z_{\eta 3}^{\xi} \omega_2^{\eta} \dot{q}_3) + z_3^{\xi} \ddot{q}_3 = \\ &= \xi_3^x \varepsilon_2^x + z_{x3}^x \omega_2^x \dot{q}_3 + \xi_3^y \varepsilon_2^y + z_{y3}^y \omega_2^y \dot{q}_3 + \xi_3^z \varepsilon_2^z + z_{z3}^z \omega_2^z \dot{q}_3 + z_3^{\xi} \ddot{q}_3. \end{aligned}$$

Теперь можно конкретизировать символ $\xi \in \{x, y, z\}$, где в трехсимвольных обозначениях типа z_{x3}^{ξ} , z_{y3}^{ξ} , z_{z3}^{ξ} вектор $\bar{q}_i \times \bar{\xi}_i$ заменить на соответствующий орт из множества $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\}$. В рассматриваемом примере из общего по ξ выражения ε_3^{ξ} последовательно для $\xi = x$, $\xi = y$, $\xi = z$ выпишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^x &= x_3^x \varepsilon_2^x + \bar{y}_3 \cdot \bar{x}_2 \omega_2^x \dot{q}_3 + x_3^y \varepsilon_2^y + \bar{y}_3 \cdot \bar{y}_2 \omega_2^y \dot{q}_3 + x_3^z \varepsilon_2^z + \bar{y}_3 \cdot \bar{z}_2 \omega_2^z \dot{q}_3 + z_3^x \ddot{q}_3, \\ \varepsilon_3^y &= y_3^x \varepsilon_2^x - \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \omega_2^x \dot{q}_3 + y_3^y \varepsilon_2^y - \bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2 \omega_2^y \dot{q}_3 + y_3^z \varepsilon_2^z - \bar{y}_3 \cdot \bar{z}_2 \omega_2^z \dot{q}_3 + z_3^y \ddot{q}_3, \\ \varepsilon_3^z &= z_3^x \varepsilon_2^x + z_3^y \varepsilon_2^y + z_3^z \varepsilon_2^z + z_3^z \ddot{q}_3. \end{aligned}$$

В заключение при помощи одной из таблиц нужно осуществить конкретизацию символов типа ξ_i^{η} и скалярных произведений орт СКТ. Номер таблицы определяется по орту $\bar{q}_i$. Если $\bar{q}_i = \bar{x}_i$, то используется первая таблица. Если $\bar{q}_i = \bar{y}_i$, то вторая. Иначе – третья. В нашем случае $\bar{q}_3 = \bar{z}_3$ и, следовательно, окончательно получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^x &= c_3 \varepsilon_2^x - s_3 \omega_2^x \dot{q}_3 + s_3 \varepsilon_2^y + c_3 \omega_2^y \dot{q}_3 = c_3(\varepsilon_2^x + \omega_2^y \dot{q}_3) + s_3(\varepsilon_2^y - \omega_2^x \dot{q}_3), \\ \varepsilon_3^y &= -s_3 \varepsilon_2^x - c_3 \omega_2^x \dot{q}_3 + c_3 \varepsilon_2^y - s_3 \omega_2^y \dot{q}_3 = c_3(\varepsilon_2^y - \omega_2^x \dot{q}_3) - s_3(\varepsilon_2^x + \omega_2^y \dot{q}_3), \\ \varepsilon_3^z &= \varepsilon_2^z + \ddot{q}_3. \end{aligned}$$

Таким образом, все формулы для вычисления ПСФ гироскопа выписаны. После их подстановки в формулы вычисления M_1 , M_2 , M_3 и элементарных упрощений получим следующую систему УД гироскопа:

$$\begin{cases} [I_{c1}^y + I_{c2}^z + I_{c3}^z + (I_{z3}^y + I_{z3}^x) c_2^2] \ddot{q}_1 - I_{c3}^z s_2 \ddot{q}_3 + 2(I_{x3}^z + I_{y2}^z) s_2 c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - I_{c3}^z c_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 = M_1, \\ (I_{c2}^x + I_{c3}^x) \ddot{q}_2 - (I_{x3}^z + I_{y2}^z) s_2 c_2 \dot{q}_1^2 + I_{c3}^z c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = M_2, \\ I_{c3}^z (\ddot{q}_3 - s_2 \dot{q}_1 - c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2) = M_3. \end{cases} \quad (11)$$

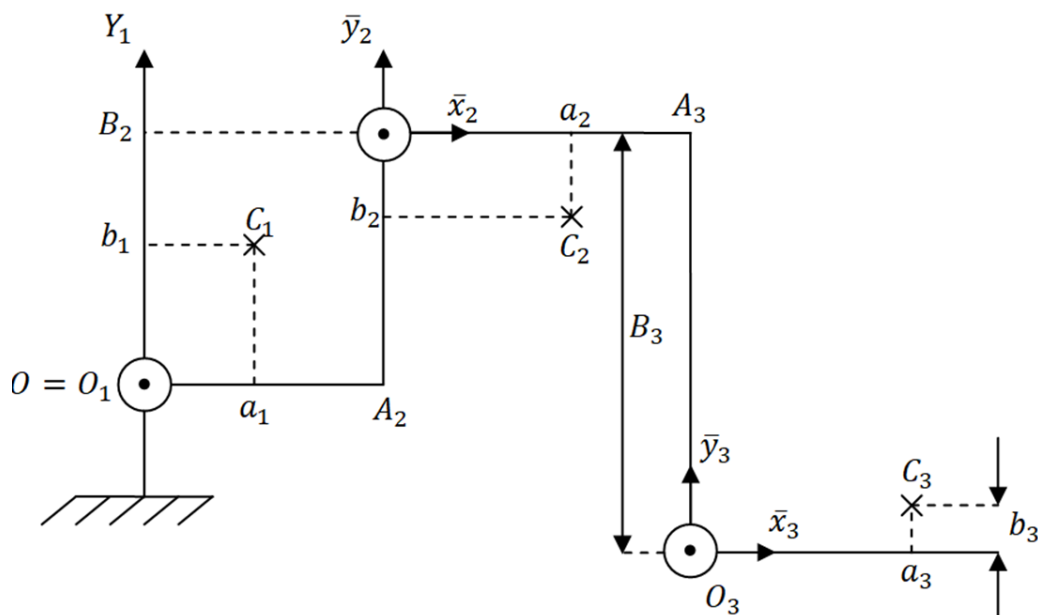


Рис. 3. Система трех тел в вертикальной плоскости
Fig. 3. A system of three bodies in a vertical plane

Пример 3. Для СТ в вертикальной плоскости на рис. 3 имеем $N = 3$ и ОРФ вычисления движущих моментов сил $M_i = \bar{z} \cdot \bar{M}_i$ имеют вид [13]

$$\begin{cases} M_3 = a_{23}(c_{23}\ddot{q}_1 + s_{23}\dot{q}_1^2) + b_{23}(s_{23}\ddot{q}_1 - c_{23}\dot{q}_1^2) + \\ + a_{33}(c_3\ddot{q}_{12} + s_3\dot{q}_{12}^2) + b_{33}(s_3\ddot{q}_{12} - c_3\dot{q}_{12}^2) + I_{d3}^z\ddot{q}_{13} + g(m_3^x c_{13} - m_3^y s_{13}), \\ M_2 = a_{22}(c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1^2) + b_{22}(s_2\ddot{q}_1 - c_2\dot{q}_1^2) + \\ + a_{33}(c_3\ddot{q}_{13} - s_3\dot{q}_{13}^2) + b_{33}(s_3\ddot{q}_{13} + c_3\dot{q}_{13}^2) + I_{d2}^z\ddot{q}_{12} + g(m_2^x c_{12} - m_2^y s_{12}) + M_3, \\ M_1 = a_{22}(c_2\ddot{q}_{12} - s_2\dot{q}_{12}^2) + b_{22}(s_2\ddot{q}_{12} + c_2\dot{q}_{12}^2) + \\ + a_{23}(c_{23}\ddot{q}_{13} - s_{23}\dot{q}_{13}^2) + b_{23}(s_{23}\ddot{q}_{13} + c_{23}\dot{q}_{13}^2) + I_{d1}^z\ddot{q}_1 + g(m_1^x c_1 - m_1^y s_1) + M_2, \end{cases}$$

где использованы три множества постоянных параметров, выраженных через ППТ. Во-первых, m_i^x, m_i^y – проекции статического момента i -го Дополненного Тела (ДТ(i)) на оси $O_i\bar{x}_i, O_i\bar{y}_i$ СКТ(i), в частности,

$$\begin{aligned} m_3^x &= m_{03}a_3, m_3^y = m_{03}b_3, m_2^x = m_{02}a_2 + m_3A_3, m_2^y = m_{02}b_2 + m_3B_3, \\ m_1^x &= m_{01}a_1 + m_2A_2, m_1^y = m_{01}b_1 + m_2B_2, \end{aligned}$$

где m_3 – масса ДТ(i), вычисляемая по ОРФ $m_i = m_{0i} + m_{i+1}$ [18]. Во-вторых, моменты инерции ДТ(i) относительно оси $O_i\bar{z}$ ($\bar{z}$ – нормаль к плоскости движения), в частности, [18]

$$\begin{aligned} I_{d3}^z &= I_{c3}^z + m_{03}(a_3^2 + b_3^2), I_{d2}^z = I_{c2}^z + m_{02}(a_2^2 + b_2^2) + m_3(A_3^2 + B_3^2), \\ I_{d1}^z &= I_{c1}^z + m_{01}(a_1^2 + b_1^2) + m_2(A_2^2 + B_2^2). \end{aligned}$$

В-третьих,

$$\begin{aligned} a_{22} &= A_2m_2^x + B_2m_2^y, b_{22} = B_2m_2^x - A_2m_2^y, a_{23} = A_2m_3^x + B_2m_3^y, b_{23} = B_2m_3^x - A_2m_3^y, \\ a_{33} &= A_3m_3^x + B_3m_3^y, b_{33} = B_3m_3^x - A_3m_3^y. \end{aligned}$$

Остальные обозначения являются следующими функциями углов поворота:

$$\begin{aligned} q_{12} &= q_1 + q_2, q_{13} = q_1 + q_2 + q_3, q_{23} = q_2 + q_3, \\ s_i &= \sin(q_i), c_i = \cos(q_i), s_{ij} = \sin(q_{ij}), c_{ij} = \cos(q_{ij}). \end{aligned}$$

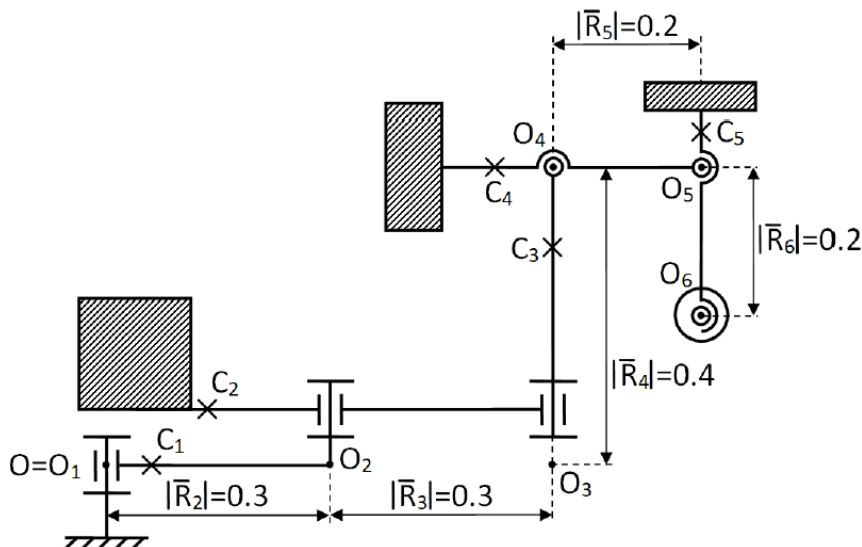


Рис. 4. Динамически уравновешенная система шести тел
Fig. 4. Dynamically balanced system of six bodies

Пример 4. На рис. 4 изображена динамически уравновешенная система шести тел, ППТ которой представлены в следующей таблице.

Таблица ППТ СТ на рис. 4
The table of CBP BS in Fig. 4

i	$\bar{R}_i$	m_{oi}	$\bar{r}_{ci}$	I_{ci}	J_{ci}
1	0 0 0	4	0.1 0 0	0.2 0.15 0.2	0.0 0.0 0.0
2	0.3 0 0	2	-0.3 0.1 0	0.875 0.2 0.12	0.0 0.0 0.0
3	0.3 0 0	0.2	0 0.3 0	0.3 0.26 0.13	0.0 0.0 0.0
4	0 0.4 0	1.2	-0.1 0 0	0.076 0.04 0.04	0.0 0.0 0.0
5	0.2 0 0	0.4	0 0.1 0	0.02 0.032 0.02	0.0 0.0 0.0
6	0 -0.2 0	0.2	0 0 0	0.002 0.002 0.001	0.0 0.0 0.0

УД этой СТ имеют вид

$$\begin{cases} (I_{a1}^y + I_{a2}^y + I)\ddot{q}_1 + (I_{a2}^y + I)\ddot{q}_2 + I\ddot{q}_3 = M_1^y, \\ (I_{a2}^y + I)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + I\ddot{q}_3 = M_2^y, \\ I(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) = M_3^y, \\ (I_{c4}^x + I_{c5}^y + I_{c6}^z)\ddot{q}_4 + (I_{c5}^y + I_{c6}^z)\ddot{q}_5 + I_{c6}^z\ddot{q}_6 = M_4^z, \\ (I_{c5}^y + I_{c6}^z)(\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) + I_{c6}^z\ddot{q}_6 = M_5^z, \\ I_{c6}^z(\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5 + \ddot{q}_6) = M_6^z, \end{cases}$$

где $I = I_{c3}^y + I_{c4}^y + I_{c5}^y + 0.038$, $I_{a1}^y = I_{c1}^y + m_{01}a_1^2 + m_2A_2^2$, $I_{a2}^y = I_{c2}^y + m_{02}a_2^2 + m_3A_3^2$, т. е. не зависят от состояния тел (от углов поворота и угловых скоростей тел) и множители при ускорениях постоянны. Поэтому для любых значений q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) значения ПСФ M_1^y , M_2^y , M_3^y , M_4^z , M_5^z , M_6^z остаются неизменными, что подтверждено в процессе тестирования.

Процесс тестирования разработанных JS-кодов осуществляется путем сравнения результатов решения ПЗД при помощи этих кодов и при помощи формул вычисления ПСФ или движущих моментов сил, полученных (выведенных) другими исследователями, и/или другими методами. Здесь для тестирования ПО использованы УД, представленные в примерах 1–4.

Формулы примера 1 известны из учебников по теоретической механике.

УД гироскопа, выписанные в примере 2, совпадают с УД, выведенными по формализму Лагранжа в монографии [17, с. 130]. Последние два УД (11) совпадают с УД гироскопа, выведенными в учебном пособии [19, с. 104–107]. В первом уравнении книги [19] отсутствует слагаемое $I_{c3}^z s_2 \ddot{q}_3$. Однако ротор гироскопа для внешней рамки является несомым телом, поэтому для

$q_2 \neq 0$ он влияет на динамику этой рамки. Например, в случае $q_2 = \pi/2$ ось вращения внешней рамки и ротора совпадают, т. е. кинетическая энергия гироскопа должна содержать слагаемое $I_{c3}^z(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2$. Следовательно, согласно формализму Лагранжа первое уравнение системы (11) должно содержать ускорение $\ddot{q}_3$.

Числовые значения моментов сил M_i , вычисленные по формулам (12) для ЗДТ, совпадают с решением ПЗД СТ на рис. 3 с использованием тестируемых JS-кодов в листингах 1, 2. Формулы (12) являются частным случаем УД СТ в вертикальной плоскости, выведенные по формализму Аппеля, т. е. никак не связаны с формулами (1)–(5) [13]. В формулах вычисления движущих моментов сил, выписанных в примере 3, использованы ПРФ (8) и (10), не входящие в алгоритмическое обеспечение тестируемых кодов.

Для тестирования ПО мы использовали также целый класс тестов, основанных на УД статически и динамически уравновешенных СТ [13].

3. Прототипирование данных для численного решения ПЗД МР

В качестве примера, демонстрирующего предлагаемый способ создания данных, рассмотрим Шаровой Маятник (ШМ) по следующим причинам. Во-первых, для ШМ $N = 1$ (тривиальный случай СТ). Во-вторых, для ШМ все JS-коды – самые короткие. В-третьих, ПЗД для ШМ решается элементарно. Поэтому на примере ШМ в первую очередь осуществляется верификация формул и тестирование JS-кодов их цифровой реализации. X3D-разметка ШМ на рис. 1 приведена в листинге 3. Здесь используется первый способ создания и хранения данных. Поэтому после первых трех типовых строк кода декларируются четыре подключения внешних прототипов, за которыми следуют вложенные друг в друга Узлы Трансформации (УТ), размечающие структуру моделируемой СТ. В рассматриваемом примере – это ШМ, состоящий из двух тел (основания и тела с закрепленной точкой). В УТ каждого тела вложены экземпляры прототипов, в которых формируются данные.

Узлы <KeySensor>, <Script> и <ROUTE> декларируют управление задачами нажатием клавиш. Простейший JS-код управления запуском решения ПЗД МР представлен в листинге 4. Последние пять скриптов загружаются к исполнению соответствующих JS-кодов.

Листинг 3. X3D-разметка ШМ (ШМ.x3d – запускаемый файл)

```
<?xml version = "1.0" encoding = "UTF-8"?>
<X3D version = '3.2'> <WorldInfo title = "ШМ.x3d"/>
<Scene><Background skyColor = "1 1 1"/><Viewpoint position = "0 0 2"/>
<ExternProtoDeclare name = "прототипТела" url = "данныеМР/ПО/прототипТела.x3d"/>
<ExternProtoDeclare name = "прототипППТ" url = "данныеМР/ПО/проППТ.x3d"/>
<ExternProtoDeclare name = "прототипЗДТ" url = "данныеМР/ПО/проЗДТ.x3d"/>
<ExternProtoDeclare name = "прототипПСФ" url = "данныеМР/ПО/проПСФ.x3d"/>
<Transform DEF = "Тело_0"><ProtoInstance DEF = "тело_0" name = "прототипТела"/>
<ProtoInstance DEF = "ППТ_0" name = "прототипППТ"/>
<ProtoInstance DEF = "ЗДТ_0" name = "прототипЗДТ"/>
<ProtoInstance DEF = "ПСФ_0" name = "прототипПСФ"/>
<Transform DEF = "Тело_1"><ProtoInstance DEF = "тело_1" name = "прототипТела"/>
<ProtoInstance DEF = "ППТ_1" name = "прототипППТ"/>
<ProtoInstance DEF = "ЗДТ_1" name = "прототипЗДТ"/>
<ProtoInstance DEF = "ПСФ_1" name = "прототипПСФ"/>
</Transform></Transform>
<KeySensor DEF = "клавиша"/>
<Script DEF = "управление" directOutput = "TRUE" url = "данныеМР/ПО/задачи.js">
<field name = "символ" type = "SFString" accessType = "inputOnly"/>
</Script>
<ROUTE fromField = "keyPress" fromNode = "клавиша"
toField = "символ" toNode = "управление"/>
<Script url = "данныеМР/ШМ/ППТ.js"/><Script url = "данныеМР/ШМ/ППТ.js"/>
<Script url = "данныеМР/ШМ/ЗДТ.js"/><Script url = "данныеМР/ШМ/ПСФ.js"/>
<Script url = "данныеМР/ШМ/test.js"/>
</Scene> </X3D>
```

К входным относятся Геометрические Параметры Тел (ГПТ), подробно описанные в статье [1], где изложены три способа (простейший, простой и типовой) описания геометрии тел в ХЗД-моделях МР. Здесь мы используем цифровые коды типовых моделей тел, которые записываются в файл ГПТ.js. ГПТ формируются и хранятся в экземплярах внешнего ХЗД-прототипа с именем "прототипТела", разметка которого представлена в статье [1].

Листинг 4. JS-код управления задачами нажатием клавиш

```
function символ(код) {  
  switch(код) { case "с": ППТ_МР(); break;  
    case "s": ЗДТ_МР(); КФТ_МР(); ПСФ_МР(); выводПСФ(); break; }; };
```

ППТ формируются и хранятся в экземплярах внешнего ХЗД-прототипа "проППТ", разметка которого повторяет листинг 10 статьи [1] за исключением значения поля url, содержащего адрес JS-кода генератора ППТ. В листинге 5 приведен JS-код записи ППТ в экземпляры прототипа "проППТ".

Листинг 5. JS-код генератора тринадцати цифровых кодов ППТ

```
//  $R_k^x, R_k^y, R_k^z$  (R), m0,  $c_k^x, c_k^y, c_k^z$  (rc),  $I_{ck}^x, I_{ck}^y, I_{ck}^z$  (Ic),  $J_{ck}^x, J_{ck}^y, J_{ck}^z$  (Jc)  
function Параметры(пар) { value = new MFFloat(пар[0], пар[1], пар[2], пар[3],  
  пар[4], пар[5], пар[6], пар[7], пар[8], пар[9], пар[10], пар[11], пар[12]);  
  Browser.currentScene.getNamedNode('ППТ').addChild(value);}
```

В листинге 6 приведены ППТ ШМ массой 2 [кг], ЦМ которого расположен ниже точки подвеса на расстоянии 0.3 [м] и ТИТ(1) = diag(0.1, 0.01, 0.1) [кг·м²]. Оператор сцена.getNamedNode('ППТ_0').код = new MFFloat(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) используется для задания количества подвижных тел N (первое число в списке кодов), и остальные числа используются для кодирования различных способов описания постоянных параметров привода, постоянных параметров шарнирных узлов и других постоянных параметров МР, рассмотрение которых выходит за пределы заявленной темы статьи.

Листинг 6. JS-код инициализации ППТ ШМ

```
var сцена = Browser.currentScene;  
function initialize() {  
  сцена.getNamedNode('ППТ_0').код = new MFFloat(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);  
  сцена.getNamedNode('ППТ_1').код = new MFFloat(  
    // R, m0 rc Ic Jc  
    0, 0, 0, 2, 0, -0.3, 0, 0.1, 0.01, 0.1, 0, 0, 0);  
};
```

Для записи геометрических ППТ R_k^x, R_k^y, R_k^z в поле translation УТ(k), а также записи МИП в глобальные списки, используется js-функция ППТ_МР(), код которой представлен в листинге 7.

Листинг 7. JS-код записи ППТ в глобальные списки R = [], m0 = [], rc = [], Ic = [], Jc = []

```
function ППТ_МР() { П = сцена.getNamedNode('ППТ_0').код;  
  N = П[0]; // N – количество подвижных тел  
  for ( var k = 1; k <= N; k++) {  
    Тело[k] = сцена.getNamedNode('Тело_' + parseFloat(k)); // взять УТ(k)  
    П = сцена.getNamedNode('ППТ_' + parseFloat(k)).код; // взять ППТ(k)  
    Тело[k].translation = new SFVec3f(П[0], П[1], П[2]);  
    R[k] = Тело[k].translation; // межполюсный вектор k-го тела  
    m0[k] = П[3]; rc[k] = new SFVec3f(П[4], П[5], П[6]); // масса и вектор ЦМ k-го тел  
    Ic[k] = new SFVec3f(П[7], П[8], П[9]); // ОМИ(k) в ЦСК(k)  
    Jc[k] = new SFVec3f(П[10], П[11], П[12]); // ЦМИ(k) в ЦСК(k)  
    // формирование Тензора Инерции k-го тела (ТИТ)  
    Tx[k] = new SFVec3f( Ic[k].x, -Jc[k].x, -Jc[k].y);  
    Ty[k] = new SFVec3f(-Jc[k].x, Ic[k].y, -Jc[k].z);  
    Tz[k] = new SFVec3f(-Jc[k].y, -Jc[k].z, Ic[k].z);  
  }; };
```

Аналогично реализованы X3D-прототипы "проЗДТ" и "проПСФ".

Код js-функции, формирующий (создающий), обрабатывающий и представляющий ЗДТ, разрабатывается пользователем. Способы задания (описания) ЗДТ закодированы числами 0, 1, 2, 3, ..., где 0 – код табличного описания, 1 – код графического описания, 2 – код аналитического описания, 3 – код словесного описания. Перечисленные способы описания ЗДТ преобразуются в таблицу, где между соседними (по времени) значениями ЗДТ осуществляется линейная интерполяция. Здесь нам потребуется простейшее описание заданных значений НКОП(k) $\bar{q}_k$, угла поворота q_k , угловой скорости $\dot{q}_k$ и ускорения $\ddot{q}_k$ k -го тела МР в текущий момент времени, т. е. для тестирования разработанных JS-кодов решения ПЗК будем использовать КПТ(k).

В СКТ(k)

$$\bar{q}_k = q_k^x \bar{x}_k + q_k^y \bar{y}_k + q_k^z \bar{z}_k$$

– орт оси $O_k \bar{q}_k$ поворота k -го тела относительно $(k-1)$ -го тела, где q_k^x, q_k^y, q_k^z – НКОП(k) $O_k \bar{q}_k$ в СКТ(k). Для хранения перечисленных параметров используется X3D-прототип "проЗДТ". JS-коды его генератора параметров и их инициализации аналогичны листингам 5 и 6. Разница только в количестве параметров. Экземпляр X3D-прототипа "проЗДТ" для k -го тела содержит семь цифр – t (текущее время), q_k^x, q_k^y, q_k^z (НКОП(k) в момент времени t), $q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k$ (угол поворота, его скорость и ускорение в момент времени t). В листинге 8 приведено ЗДТ ШМ в момент времени $t = 0$. Оператор

сцена.getNamedNode('ЗДТ_0').код = new MFFloat(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

используется для кодирования различных способов описания ЗДТ МР. Если первое число равно нулю, то ориентация тел задается относительными ПЭ и JS-код их вычисления через другие параметры ориентации тел МР не используется. Если второе число равно нулю, то задаются движения тел только в один (начальный, текущий) момент времени. Остальные числа управляют величиной шага по времени (постоянный или меняющийся по определенному алгоритму), значением НКОП (для ВКП он постоянный, для шаровых с пальцем или шаровых кинематических пар – он переменный) и т. д.

Из листинга 8 видно, что ШМ в момент времени $t = 0$ повернут вокруг оси $O_1 \bar{z}_1$ ($q_x = 0, q_y = 0, q_z = 1$) на угол $q_1 = 0,5$ радиан, имеет угловую скорость $\dot{q}_1 = 1/\text{с}$ и ускорение $\ddot{q}_1 = 2/\text{с}^2$.

Листинг 8. JS-код инициализации ЗДТ ШМ

```
var сцена = Browser.currentScene;
function initialize() {
сцена.getNamedNode('ЗДТ_0').код = new MFFloat( 0,0, 0, 0,0, 0, 0 );
сцена.getNamedNode('ЗДТ_1').код = new MFFloat(
// t, qx, qy, qz, q, qt, qtt
0, 0, 0, 1, 0.5, 1, 2 );
};
```

По списку орт $\bar{q}_k$ и диапазонам изменения относительных углов поворота тел определяется коэффициент сервиса МР [7]. В листинге 9 приведен JS-код, который после загрузки МР в X3D-сцену автоматически записывает параметры q_k^x, q_k^y, q_k^z в поле rotation УТ(k) и формирует глобальные переменные.

Листинг 9. JS-код записи ЗДТ в глобальные переменные Q = [], q = [], qt = [], qtt = []

```
function ЗДТ_МР() { for ( var k = 1; k <= N; k++) {
П = сцена.getNamedNode('ЗДТ_' + parseFloat(k)).код; // взять код ЗДТ(k)
q[k] = П[4]; qt[k] = П[5]; qtt[k] = П[6]; Тело[k].rotation = new SFRotation(П[1], П[2], П[3], q[k]);
Q[k] = Тело[k].rotation; // Параметр Эйлера k-го тела
}; };
```

ПСФ, вычисленные в процессе решения ПЗД, записываются и хранятся (до востребования) в экземплярах X3D-прототипа "проПСФ". Экземпляр прототипа "проПСФ" для k -го тела содержит семь цифр – t (текущее время), F_k^x, F_k^y, F_k^z (проекции силы на оси СКТ в момент времени t),

M_k^x, M_k^y, M_k^z (проекции момента силы на оси СКТ в момент времени t). По аналогии с листингом 8 оператор

сцена.getNamedNode('ПСФ_0').код = new MFFloat(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

используется для кодирования различных вариантов сохранения ПСФ МР (0 – в виде таблиц, 1 – в виде графиков, 2 – выборочно, например, сохранять только экстремальные значения ПСФ и т. д.).

Числовые значения ППТ, КПТ и ЗДТ автоматически переносятся из html- или Exel-таблиц в соответствующие цифровые коды листингов 6, 8, т. е. пользователю не обязательно знать, как реализован описанный способ формирования и хранения входных данных ПЗД МР.

Основное достоинство предложенного способа прототипирования данных состоит в его гибкости, обеспеченной описанием данных через Цифровые Коды (ЦК), введенные в статье [1] для описания геометрии тел и использованные в статье [2] для прототипирования схвата. Важно отметить, что часть ЦК задает пользователь для управления вариантами трактовки данных, описывающих параметры МР [1, 2]. Все ЦК имеют один тип (MFFloat), и режим доступа к ним декларируется в теле соответствующего прототипа [1] (см. листинги 4, 10).

4. Формирование данных в узле <Script> для численного решения ПЗД МР

ППТ, ЗДТ, ПСФ и другие параметры тел и МР в целом можно формировать и хранить в интерфейсной части узла <Script>, которая полностью совпадает с интерфейсной частью X3D-прототипа. По сути узел <Script> – это экземпляр внешнего X3D-прототипа, разработанного авторами языка X3D [20]. В статье [2] приведен интерфейс двухпальцевого схвата и подробно описаны типы X3D-данных и режимы доступа к ним (см. листинг 5 и с. 55). Здесь в листинге 10 приведен пример описания данных (для СТ на рис. 3) в интерфейсной части узла <Script>.

Листинг 10. X3D-разметка структуры и данных (ППТ, ЗДТ, ПСФ) СТ на рис. 3

```
<?xml version = "1.0" encoding = "UTF-8"?>
<X3D version = '3.2'>
<Scene><Background skyColor = "1 1 1"/><Viewpoint position = "0 0 5"/>
<Transform DEF = "Тело_0"><Inline DEF = "тело_0" url = "данныеМР/ПМП3/тело_0.x3d"/>
<Transform DEF = "Тело_1"><Inline DEF = "тело_1" url = "данныеМР/ПМП3/тело_1.x3d"/>
<Transform DEF = "Тело_2"><Inline DEF = "тело_2" url = "данныеМР/ПМП3/тело_2.x3d"/>
<Transform DEF = "Тело_3"><Inline DEF = "тело_3" url = "данныеМР/ПМП3/тело_3.x3d"/>
</Transform></Transform></Transform></Transform>
<Script url = "данныеМР/ПМП3/ПМП3.js">
<field accessType = "initializeOnly" name = "R" type = "MFVec3f"
value = "0 0 0, 0 0 0, 0.5 0.5 0, 0.5 -0.8 0"/>
<field accessType = "initializeOnly" name = "m0" type = "MFFloat" value = "0, 3, 2, 1"/>
<field accessType = "initializeOnly" name = "rc" type = "MFVec3f"
value = "0 0 0, 0.2 0.3 0, 0.4 -0.1 0, 0.4 0.1 0"/>
<field accessType = "initializeOnly" name = "Ic" type = "MFVec3f"
value = "0 0 0, 0.02 0.1 0.1, 0.01 0.01 0.01, 0.0015 0.01 0.01"/>
<field accessType = "initializeOnly" name = "Jc" type = "MFVec3f"
value = "0 0 0, 0 0 0, 0 0 0, 0 0 0"/>
<field accessType = "inputOutput" name = "Q" type = "MFRotation"
value = "0 0 1 0, 0 0 1 1, 0 0 1 1, 0 0 1 1"/>
<field accessType = "inputOutput" name = "q" type = "MFFloat" value = "0 1.1 1.2 1.3"/>
<field accessType = "inputOutput" name = "qt" type = "MFFloat" value = "0 2.1 2.2 2.3"/>
<field accessType = "inputOutput" name = "qtt" type = "MFFloat" value = "0 3.1 3.2 3.3"/>
<field accessType = "outputOnly" name = "F" type = "MFVec3f"/>
<field accessType = "outputOnly" name = "M" type = "MFVec3f"/>
</Script> </Scene> </X3D>
```

В листинге 11 на примере моделирования основания СТ на рис. 3 представлены JS-коды цифровых моделей тел МР. В листинге 12 использован простейший способ создания ЦК модели основания [1]. Модели остальных тел описываются аналогично. В листинге 13 представлен JS-код формирования глобальных списков данных и обращения к JS-функциям решения ПЗД МР.

Листинг 11. X3D-разметка стойки СТ на рис. 3

```
<?xml version = "1.0" encoding = "UTF-8"?> <X3D version = '3.2'>
<Scene> <Background skyColor = "1 1 1"/> <Viewpoint position = "0 0 3"/>
<ExternProtoDeclare name = "прототипТела" url = "данныеМР/ПМР3/прототипТела.x3d"/>
<ProtoInstance DEF = "тело_0" name = "прототипТела"/>
<Script url = "данныеМР/ПМР3/ГПТ_0.js"/>
</Scene></X3D>
```

Листинг 12. JS-код цифрового кодирования основания СТ на рис. 3

```
//данныеМР/ПМР3/ГПТ_0.js
var сцена = Browser.currentScene;
function initialize() { сцена.getNamedNode('тело_0').код = new MFFloat(
0, 0.2, 0.02, 0.02, 0, -0.1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
0, 0.02, 0.1, 0.02, 0, -0.05, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0);
};
```

Изложенные здесь способы описания данных можно комбинировать. Варианты эффективных комбинаций определяются целями цифрового моделирования МР, РТК, ГПС и задачами, решаемыми для достижения этих целей. Здесь мы рассмотрели решение ПЗД, т. е. самой простой, но очень важной задачи. Для решения ПЗД достаточно использовать любой из двух способов формирования, хранения и использования данных.

Листинг 13. JS-код формирования глобальных списков и решения ПЗД

```
// Перечень глобальных величин
var Тело = [], Tx = [], Ty = [], Tz = [], Y = [], e = [], w = [], rtt = [],
сцена = Browser.currentScene;
function initialize() { for ( var k = 0; k <= N; k++)
{ Тело[k] = сцена.getNamedNode('Тело_' + parseFloat(k));
Тело[k].translation = R[k]; Тело[k].rotation = Q[k];
// формирование Тензора Инерции k-го тела (ТИТ)
Tx[k] = new SFVec3f( Ic[k].x, -Jc[k].x, -Jc[k].y);
Ty[k] = new SFVec3f(-Jc[k].x, Ic[k].y, -Jc[k].z);
Tz[k] = new SFVec3f(-Jc[k].y, -Jc[k].z, Ic[k].z);
}; КФТ_МР(); ПСФ_МР(); };
```

В конце статьи [1] мы указали, что для моделирования тел МР не обязательно использовать предложенные три способа (простейший, простой и типовой), т. е. пользователи предлагаемой теории могут создавать файлы "тело_i.x3d" путем X3D-программирования. Такая возможность сохраняется, так как в декларации (Inline-подключения модели стойки)

```
<Inline DEF = "тело_0" url = "данныеМР/ПМР3/тело_0.x3d"/>
файл "тело_0.x3d" может содержать X3D-разметку стойки СТ на рис. 3.
```

5. О расширении, дополнении и распределении параметров МР

Для вычисления МИП тела, моделируемого простейшими Графическими Объектами (ГО), т. е. боксами, цилиндрами, конусами и шарами, достаточно Цифровой Код (ЦК) каждого ГО, содержащего 14 чисел [1], расширить величиной плотности (ρ) равномерного распределения массы ГО и десятью новыми числами, описывающими МИП ГО. Тогда ЦК цифровой модели тела будет содержать строки следующих 25 чисел:

$k, x, y, z, X, Y, Z, c_x, c_y, c_z, q, R, G, B, \rho, m, x_c, y_c, z_c, i_x, i_y, i_z, j_x, j_y, j_z$,
где k – код ГО (0 – бокс, 1 – цилиндр, 2 – конус, 3 – шар); x, y, z – размеры ГО вдоль осей СКТ; X, Y, Z – декартовы координаты геометрического центра ГО в СКТ; c_x, c_y, c_z, q – ПЭ поворота ГО относительно СКТ; R, G, B – код цвета ГО; ρ – плотность распределения массы ГО; m – масса ГО; x_c, y_c, z_c – координаты ЦМ ГО в СКТ; i_x, i_y, i_z – ОМИ ГО в СКТ; j_x, j_y, j_z – ЦМИ ГО в СКТ.

Количество таких строк равно числу ГО в модели тела. Если $\rho = 0$, то МИП ГО не вычисляются. В этом случае исследователь должен ввести числовые значения МИП в ППТ или перенести их из конструкторской документации в таблицы входных ППТ МР (при наличии такой документации). Еще один способ определения МИП тел связан с решением задачи идентификации параметров тел МР.

ГПТ дополняются, например, для учета деталей приводов, расположенных на теле. Отметим, что на i -м теле могут располагаться детали и передаточные устройства привода j -го тела, где $j > i$. В общем случае для дополнения ГПТ необходимо сначала параметризовать движущиеся детали привода. Рассмотрим, например, параметризацию деталей электропривода МР, вращающихся вокруг своих осей симметрии. Такие детали будем называть роторами. К ним относятся роторы электродвигателей (ЭД), валы, зубчатые колеса (шестерни), шкивы и другие элементы ЭД, редукторов, соединительных муфт и других конструктивных элементов приводов и передаточных устройств. ЦК этих элементов дополняют ЦК моделей тел. Для этого после ЦК модели i -го тела [1] достаточно записать ЦК роторов, расположенных на i -м теле, т. е. числовые значения следующих параметров:

$$-j, r, h, a, b, c, x, y, z, q, \rho,$$

где j – номер привода; r, h – радиус и высота ротора привода; a, b, c, x, y, z, q – параметры положения ротора; ρ – усредненная плотность распределения массы ротора. Для учета податливости, люфтов, гистерезиса и других физических особенностей конструкций приводов рассмотренный ЦК расширяется. Правила и способы такого расширения определяются возможностями идентификации таких параметров, а также их программной реализации. Учет вращающихся осесимметричных тел привода в УД МР рассмотрен в монографии [21].

Важно отметить, что параметры, описывающие свойства подсистем МР, расположенных на теле, формируются и хранятся (до востребования) в экземплярах соответствующих прототипов или в полях узла <Script>. Например, Параметры Электропривода k -го тела формируются и хранятся в экземпляре прототипа "проПЭП", вложенного в УТ(k).

Если параметр описывает свойство МР в целом, например, набор Собственных Частот колебаний МР (в заданном положении руки), то экземпляр прототипа "проПСЧ" должен быть вложен в УТ(0) или в любой другой групповой узел, например, узел <Group>, вложенный в текущую сцену. При этом коэффициенты жесткости и демпфирования, приведенные к осям вращения тел ВКП и необходимые для вычисления ПСЧ МР, должны формироваться и храниться в прототипе "проВКП", экземпляры которого вкладываются в УТ тел.

Рассмотрим варианты параметризации следующего адаптивного ПИД-регулятора ЗДТ:

$$M(t, q, \dot{q}) = K_p(q)x + K_d(q)\dot{x} + K(t, q, \dot{q}), \quad (12)$$

где $M(t, q, \dot{q})$ – вектор-столбец шести движущих моментов сил, приведенных к осям вращения тел МР (далее все векторы имеют шесть компонент); t – текущее время; q – вектор-строка углов относительных поворотов тел; $\dot{q}$ – вектор-строка относительных угловых скоростей тел; $K_p(q) = H(q)B$ – квадратная (6×6) матрица коэффициентов усиления пропорциональной части регулятора; $x = q_p(t) - q^T$ – вектор-столбец ошибок управления углами поворота тел; $K_d(q) = H(q)A$ – квадратная (6×6) матрица коэффициентов усиления дифференциальной части регулятора; $\dot{x} = \dot{q}_p(t) - \dot{q}^T$ – вектор-столбец ошибок управления угловыми скоростями тел; $K(t, q, \dot{q}) = H(q)\ddot{q}_p + h(q, \dot{q})$ – вектор-столбец интегральной части регулятора; $q_p(t)$ – вектор-столбец программных (заданных) вращений тел; $\dot{q}_p(t)$ – вектор-столбец программных скоростей вращений тел; $\ddot{q}_p(t)$ – вектор-столбец программных ускорений вращений тел; $H(q)$ – квадратная (6×6) Матрица Инерционных Коэффициентов (МИК) МР; A, B – квадратные (6×6) матрицы постоянных коэффициентов, описывающие качество управления; $h(q, \dot{q})$ – вектор-столбец сумм моментов сил тяжести, центробежных и кориолисовых инерционных сил, приведенных к осям вращения тел. МИК и вектор $h(q, \dot{q})$ являются составляющими УД МР, представленных в следующем векторно-матричном виде

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = M. \quad (13)$$

Всегда можно подобрать матрицы A и B так, что элементы $x_{pi}(t)$ вектора x изменяются по гра-

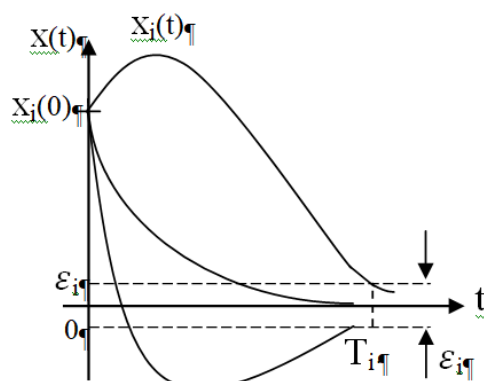


Рис. 5. Графики изменения ошибок управления
Fig. 5. Graphs of control error changes

всегда можно подобрать так, чтобы ошибки управления $x_{pi}(t)$ изменялись по представленным графикам с заданными параметрами ϵ_i, T_i [9].

Из формулы (12) ПИД-регулятора ЗДТ видно, что коэффициенты при пропорциональной и дифференциальной части регулятора зависят от углов поворота тел, а интегральная часть зависит еще и от заданных угловых ускорений тел и текущего времени, так как выражение интегральной части регулятора содержит $\ddot{q}_p(t)$. Таким образом, ПИД-регулятор (12) адаптируется к состоянию тел и программному ускорению в текущий момент времени.

Если в приводах тел МР используются электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением, то $M_i = k_i I_i$, где M_i – i -я компонента вектор-столбца M , k_i, I_i – коэффициент противо-ЭДС и ток якорной обмотки. Для формирования и хранения перечисленных параметров вводится в обращение и использование прототип Параметров Адаптивного Регулятора "проПАР" или расширяется интерфейсная часть узла <Script> соответствующими полями. Для параметров датчиков (угла поворота, угловой скорости) и электронных блоков (усилителей мощности, стабильных источников тока, управляемых кодами и т. д.) системы управления можно ввести в обращение и использовать X3D-прототип цифровых Параметров Системы Управления "проПСУ" или дополнить интерфейсную часть узла <Script> соответствующими полями.

Для параметризации древовидных систем тел с динамически замыкаемыми и размыкаемыми ветвями, например, для шагающих аппаратов и машин, места размещения постоянных и переменных (динамических) параметров могут быть распределены между неподвижным телом (опорной поверхностью), корпусом и телами ног или их базами.

Заключение

Изложенные здесь результаты используются для X3D-прототипирования МР в программной системе «СисТел», предназначенной для цифрового моделирования МР в составе роботизированных технологических комплексов. Предложенные способы формирования данных позволяют инкапсулировать их в разрабатываемый прототип МР. Важно наделить прототип "проМР" такими свойствами, методами и гибкими механизмами расширения, которые позволят ставить и решать не только известные задачи, но и перспективные, например, задачи автоматической самодиагностики и калибровки параметров МР. Существуют и будут ставиться задачи, для решения которых нужны новые знания. В этой связи интерес представляют архитектуры графовых нейронных сетей, в частности, рекуррентные и сверточные графовые нейронные сети [22]. С помощью графовых нейросетей можно решать естественнонаучные задачи. Например, графовые нейросети применяются для моделирования динамики сложных систем, состоящих из тел (твердых и деформируемых) и сплошных сред (жидких и газообразных) и движущихся в гравитационных и электромагнитных полях. Прогнозируя на каждом временном шаге движения каждой частицы таких систем, можно правдоподобно воссоздать динамику всей системы и получить новые знания о законах, управляющих этим движением.

фикам на рис. 5, где ϵ_i, T_i – параметры, задающие качество управления i -м телом. Действительно, замкнем УД (13) управлением (12). Тогда получим

$$H\ddot{q} + h = K_p x + K_d \dot{x} + K = HBx + HA\dot{x} + H\ddot{q}_p + h.$$

После сокращения вектора h получим

$$H\ddot{q} = HBx + HA\dot{x} + H\ddot{q}_p.$$

МИК является положительно определенной. Поэтому после умножения последнего равенства слева на матрицу H^{-1} получим

$$\ddot{q}_p - \ddot{q} + A\dot{x} + Bx = \ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0.$$

Таким образом, для вектор-столбца ошибок управления имеем следующую систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0.$$

В этой системе матрицы постоянных коэффициентов A и B

Список литературы

1. X3D-прототипирование моделей тел манипуляционных роботов / А.И. Телегин, Е.В. Гусев, В.Л. Кодкин, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24, № 4. С. 16–30. DOI: 10.14529/ctcr240402
2. Интерфейс X3D-прототипа схвата манипуляционного робота / А.И. Телегин, Г.И. Волович, Е.В. Гусев, С.Г. Пудовкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2025. Т. 25, № 4. С. 43–58. DOI: 10.14529/ctcr250403
3. Механика промышленных роботов: учеб. пособие для вузов. В 3 кн. Кн. 2: Расчет и проектирование механизмов / Е.И. Воробьев, О.Д. Егоров, С.А. Попов; под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. М.: Высшая школа, 1988. 367 с. ISBN 5-06-001134-8
4. Левина З.М. Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
5. Механика машин: учеб. пособие для вузов / И.И. Вульфсон, М.Л. Ерихов, М.З. Коловский и др.; под ред. Г.А. Смирнова. М.: Высшая школа, 1996. 511 с. ISBN 5-06-002373-7
6. Динамика управления роботами / В.В. Козлов, В.П. Макарычев, А.В. Тимофеев, Е.И. Юревич. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 336 с.
7. Бутырин С.А. Разработка алгоритмов управления манипулятором с компенсацией взаимовлияния движений и программного обеспечения численных экспериментов с моделями роботов на ЭВМ: дис. ... канд. техн. наук. Томск, 1982. 144 с.
8. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 280 с. (Научные основы робототехники).
9. Тимофеев А.В. Управление роботами: учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 240 с.
10. Колюбин С.А. Динамика робототехнических систем: учеб. пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2017. 117 с.
11. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
12. Miyazaki F., Arimoto S. Stability and robustness of some feedback control schemes for robot manipulators // Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers. 1985. Vol. 21, iss. 1. P. 78–83. DOI: 10.9746/sicetr1965.21.78. URL: https://www.researchgate.net/publication/280173366_Stability_and_Robustness_of_Some_Feedback_Control_Schemes_for_Robot_Manipulators.
13. Телегин А.И. Синтез систем твердых тел с заданными свойствами. Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996. 174 с.
14. Зубов В.И. Аналитическая динамика систем тел: учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 344 с.
15. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 200 с.
16. Коловский М.З., Слоущ А.В. Основы динамики промышленных роботов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 240 с. (Научные основы робототехники). ISBN 5-02-013893-2.
17. Управление движением механических систем / Е.Я. Смирнов, В.Ю. Павликов, П.П. Щербаков, А.В. Юрков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 316 с.
18. Телегин А.И. Основы теоретической механики систем тел. С приложениями в робототехнике: учеб. пособие для вузов. СПб.: Лань, 2023. 252 с. ISBN 978-5-507-45089-3.
19. Бутенин Н.Ф., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 256 с. ISBN 5-02-014221-2.
20. Brutzman D., Daly L. X3D: Extensible 3D graphics for web authors. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2007. 472 p. ISBN 978-0-12-088500-8.
21. Телегин А.И. Уравнения математических моделей механических систем. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1999. 182 с.
22. Мурзин М. В., Куликов И.А., Жукова Н.А. Методы построения графовых нейронных сетей // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 10. С. 40–48. DOI: 10.32603/2071-8985-2024-17-10-40-48

References

1. Telegin A.I., Gusev E.V., Kodkin V.L., Shiriaev V.I. X3D prototyping of manipulation robot body models. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2024;24(4):16–30. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr240402

2. Telegin A.I., Volovich G.I., Gusev E.V., Pudovkina S.G. Interface of the X3D prototype of the manipulative robot grip. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2025;25(4):43–58. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr250403
3. Vorob'yev E.I., Egorov O.D., Popov S.A., Frolov K.V., Vorob'yev E.I. (Eds.). *Mekhanika promyshlennykh robotov: ucheb. posobiye dlya vtuzov. V 3 kn. Kn. 2: Raschet i proyektirovaniye mekhanizmov* [Mechanics of industrial robots: A textbook for universities. In 3 books. Book 2: Calculation and design of mechanisms]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1988. 367 p. (In Russ.) ISBN 5-06-001134-8.
4. Levina Z.M., Reshetov D.N. *Kontaktnaya zhestkost' mashin* [Contact stiffness of machines]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1971. 264 p. (In Russ.)
5. Vul'fon I.I., Erikhov M.L., Kolovskiy M.Z. et al.; Smirnov G.A. (Ed.). *Mekhanika mashin: ucheb. posobie dlya vtuzov*. [Mechanics of machinery: A textbook for universities]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1996. 511 p. (In Russ.) ISBN 5-06-002373-7.
6. Kozlov V.V., Makarychev V.P., Timofeev A.V., Yurevich E.I. *Dinamika upravleniya robotami* [Dynamics of robot control]. Moscow: Nauka Publ. Main editorial board of physics and mathematics literature, 1984. 336 p. (In Russ.)
7. Butyrin S.A. *Razrabotka algoritmov upravleniya manipulyatorom s kompensatsiyey vzaimovliyaniya dvizheniy i programmnoy obespecheniya chislennykh eksperimentov s modelyami robotov na EVM: dis. kand. tekhn. nauk* [Development of algorithms for manipulator control with compensation for the interaction of movements and software for numerical experiments with computer models of robots. Cand. sci. diss.]. Tomsk, 1982. 144 p. (In Russ.)
8. Velichenko V.V. *Matrichno-geometricheskie metody v mekhanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki* [Matrix-geometric methods in mechanics with applications to robotics problems]. Moscow: Nauka Publ. Main editorial board of physics and mathematics literature, 1988. 280 p. (In Russ.)
9. Timofeev A.V. *Upravlenie robotami: ucheb. posobie* [Robot control: A textbook]. Leningrad: Leningrad State University Publ., 1986. 240 p. (In Russ.)
10. Kolyubin S.A. *Dinamika robototekhnicheskikh sistem: ucheb. posobie* [Dynamics of robotic systems: a textbook]. St. Petersburg: ITMO University, 2017. 117 p. (In Russ.)
11. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961. 824 p. (In Russ.)
12. Miyazaki F., Arimoto S. Stability and robustness of some feedback control schemes for robot manipulators. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*. 1985;21(1):78–83. DOI: 10.9746/sicetr1965.21.78. Available at: https://www.researchgate.net/publication/280173366_Stability_and_Robustness_of_Some_Feedback_Control_Schemes_for_Robot_Manipulators.
13. Telegin A.I. *Sintez sistem tverdykh tel s zadannymi svoystvami* [Synthesis of systems of solids with specified properties]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State Technical University Publ., 1996. 174 p. (In Russ.)
14. Zubov V.I. *Analiticheskaya dinamika sistem tel: ucheb. posobie* [Analytical dynamics of body systems: A Textbook]. Leningrad: Leningrad State University Publ., 1983. 344 p. (In Russ.)
15. Mel'nikov G.I. *Dinamika nelineynykh mekhanicheskikh i elektromekhanicheskikh sistem* [Dynamics of nonlinear mechanical and electromechanical systems]. Leningrad: Mashinostroenie Publ., 1975. 200 p. (In Russ.)
16. Kolovskiy M.Z., Sloushch A.V. *Osnovy dinamiki promyshlennykh robotov* [Fundamentals of industrial robot dynamics]. Moscow: Nauka Publ. Main editorial board of physics and mathematics literature, 1988. 240 p. (In Russ.) ISBN 5-02-013893-2.
17. Smirnov E.Ya., Pavlikov V.Yu., Shcherbakov P.P., Yurkov A.V. *Upravlenie dvizheniem mekhanicheskikh sistem* [Motion control of mechanical systems]. Leningrad: Leningrad State University Publ., 1985. 316 p. (In Russ.)
18. Telegin A.I. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki sistem tel. S prilozheniyami v robototekhnike: uchebnoe posobie dlya vtuzov* [Fundamentals of theoretical mechanics of body systems. With applications in robotics: A textbook for universities]. St. Petersburg: Lan Publ., 2023. 252 p. (In Russ.) ISBN 978-5-507-45089-3.
19. Butenin N.F., Fufaev N.A. *Vvedenie v analiticheskuyu mekhaniku* [Introduction to Analytical Mechanics]. 2nd ed., revised and enlarged. Moscow: Nauka Publ. Main editorial board of physics and mathematics literature, 1991. 256 p. (In Russ.) ISBN 5-02-014221-2.

20. Brutzman D., Daly L. *X3D: Extensible 3D graphics for web authors*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2007. 472 p. ISBN 978-0-12-088500-8.

21. Telegin A.I. *Uravneniya matematicheskikh modeley mekhanicheskikh sistem* [Equations of mathematical models of mechanical systems]. Chelyabinsk: South Ural St. Univ. Publ.; 1999. 182 p. (In Russ.)

22. Murzin M. V., Kulikov I. A., Zhukova N. A. Methods for Constructing Graph Neural Networks. *LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science*. 2024;17(10):40–48. DOI: 10.32603/2071- 8985-2024-17-10-40-48

Информация об авторах

Телегин Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры автоматизации, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия; teleginai@susu.ru.

Волович Георгий Иосифович, д-р техн. наук, проф., главный специалист, ООО «Челэнерго-прибор», Челябинск, Россия; g_volovich@mail.ru.

Гусев Евгений Васильевич, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры цифровой экономики и информационных технологий, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; gusevev@susu.ru.

Ширяев Владимир Иванович, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой систем автоматического управления, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; shiriaevvi@susu.ru.

Пудовкина Светлана Геннадьевна, канд. техн. наук, доц., доцент кафедры прикладной математики и ракетодинамики, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, Миасс, Россия; pudovkinasg@susu.ru.

Information about the authors

Aleksandr I. Telegin, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof., Prof. of the Department of Automation, South Ural State University, Miass, Russia; teleginai@susu.ru.

Georgiy I. Volovich, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Specialist, LLC Chelenergopribor, Chelyabinsk, Russia; g_volovich@mail.ru.

Evgeny V. Gusev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Digital Economics and Information Technologies, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; gusevev@susu.ru.

Vladimir I. Shiryaev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Automatic Control Systems, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; shiriaevvi@susu.ru.

Svetlana G. Pudovkina, Cand. Sci. (Eng.), Ass. Prof., Ass. Prof. of the Department of Applied Mathematics and Rocket Dynamics, South Ural State University, Miass, Russia; pudovkinasg@susu.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 19.12.2025

The article was submitted 19.12.2025