

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ТИПА «МОЩНОСТИ»

С.А. Баркалов, sbarkalov@nm.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6183-3004>

П.Н. Курочка, kpn55@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4945-9552>

Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Цель исследования. Рассматривается задача формирования проектной команды для выполнения работ заданной трудоемкости в установленные сроки с минимальными затратами. Производительность каждого специалиста моделируется как случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению, что приводит к постановке задачи стохастического программирования с вероятностным ограничением. **Материалы и методы.** Основное внимание уделяется методам редукции стохастической задачи к детерминированному эквиваленту путем преобразования вероятностного ограничения с использованием свойств нормального закона распределения. Такая операция позволяет привести исходную задачу к нелинейной форме. Это обстоятельство исключает применение хорошо апробированных алгоритмов. Основная сложность решения заключается в нелинейности и целочисленности переменных. Исследуются методы линеаризации ограничения, включая разложение в ряд Тейлора и кусочно-линейную аппроксимацию, а также анализируются простые эвристические критерии отбора. В качестве основного метода решения предлагается провести процедуры линеаризации нелинейного ограничения, полученного в результате перехода от вероятностного ограничения в линейной форме к детерминированному варианту, но в нелинейной форме. Описаны подходы к линеаризации нелинейного ограничения, включая разложение в ряд Тейлора и кусочно-линейную аппроксимацию. **Результаты.** Предложены эвристические критерии отбора специалистов, учитывающие их производительность, стоимость и стабильность труда. Вводятся четыре критерия: критерий эффективности, использующий два характеристических параметра: производительность и стоимость; критерий стабильности, учитывающий среднее квадратическое отклонение и производительность; комплексный критерий, являющийся произведением двух первых, и комбинированный критерий, учитывающий все три фактора. Показаны достоинства и недостатки этих подходов к решению исходной задачи. **Заключение.** Показано, что учет стохастического характера отдельных исходных параметров задачи приводит к необходимости решения оптимизационных задач стохастического программирования, что представляет собой определенные сложности. При этом речь о получении аналитических решений уже не идет. На практическом примере показано, что учет стохастичности приводит к увеличению размера команды и затрат по сравнению с детерминированным случаем. Делается вывод о необходимости применения комбинированных критериев и итеративных алгоритмов для получения решений, близких к оптимальным.

Ключевые слова: ресурсы типа «мощности», детерминированная задача оптимизации, стохастическая задача оптимизации, производительность труда, линеаризация, ряд Тейлора, эвристические алгоритмы

Для цитирования: Баркалов С.А., Курочка П.Н. Стохастическая модель распределения ресурсов типа «мощности» // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2026. Т. 26, № 3. С. 89–102. DOI: 10.14529/ctcr260308

STOCHASTIC MODEL OF CAPACITY TYPE RESOURCE ALLOCATION

S.A. Barkalov, sbarkalov@nm.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6183-3004>
P.N. Kurochka, kpn55@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4945-9552>
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Abstract. Purpose of the study. The problem of forming a project team to complete tasks of a given complexity within a specified timeframe and with minimal costs is considered. The productivity of each specialist is modeled as a random variable obeying a normal distribution, which leads to the formulation of a stochastic programming problem with a probabilistic constraint. **Materials and Methods.** The main attention is paid to methods of reducing a stochastic problem to a deterministic equivalent by transforming a probabilistic constraint using the properties of the normal distribution law. This operation allows us to reduce the original problem to a nonlinear form. This circumstance excludes the use of well-tested algorithms. The main complexity of the solution lies in the nonlinearity and integer nature of the variables. Constraint linearization methods, including Taylor series expansion and piecewise linear approximation, are studied, and simple heuristic selection criteria are analyzed. The proposed main solution method is to linearize the nonlinear constraint obtained by transitioning from a probabilistic constraint in linear form to a deterministic version, but in nonlinear form. The paper describes approaches to nonlinear constraint linearization, including Taylor series expansion and piecewise linear approximation. **Results.** Heuristic criteria for selecting specialists are proposed, taking into account their productivity, cost and labor stability. Four criteria are introduced: an efficiency criterion using two characteristic parameters: productivity and cost; a stability criterion taking into account the standard deviation and productivity; a complex criterion, which is the product of the first two; and a combined criterion taking into account all three factors. The advantages and disadvantages of these approaches to solving the original problem are shown. **Conclusion.** It is shown that taking into account the stochastic nature of individual initial parameters of the problem leads to the need to solve optimization problems of stochastic programming, which presents certain difficulties. In this case, the focus is no longer on obtaining analytical solutions. A practical example demonstrates that accounting for stochasticity leads to increased team size and costs compared to a deterministic case. A conclusion is drawn regarding the need to use combined criteria and iterative algorithms to obtain solutions close to optimal.

Keywords: capacity-type resources, deterministic optimization problem, stochastic optimization problem, labor productivity, linearization, Taylor series, heuristic algorithms

For citation: Barkalov S.A., Kurochka P.N. Stochastic model of capacity type resource allocation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2026;26(3):89–102. (In Russ.) DOI: 10.14529/ctcr260308

Введение

В современных условиях управления проектами особую актуальность приобретают задачи формирования команд, способных выполнить заданный объем работ в договорные сроки при минимизации затрат. Традиционные детерминированные модели предполагают, что производительность каждого специалиста является фиксированной величиной [1, 2]. Однако в реальности производительность труда имеет вероятностную природу, обусловленную такими факторами, как невыходы на работу, колебания эффективности и другие случайные обстоятельства. Это приводит к необходимости использования методов стохастического программирования [3, 4].

Рассмотрим задачу распределения ресурсов типа «мощности», где каждый исполнитель характеризуется случайной производительностью, распределенной по нормальному закону, и стоимостью его труда. [5, 6] Цель состоит в выборе подмножества специалистов, обеспечивающего выполнение работ в заданный срок с заданной вероятностью при минимальных затратах. Формально задача сводится к минимизации линейной целевой функции при вероятностном ограничении, которое после преобразования становится нелинейным детерминированным ограничением, содержащим квадратный корень из суммы дисперсий [7, 8].

Материалы и методы

Рассматривается процесс распределения ресурсов типа «мощности» для выполнения работы определенного вида общей трудоемкостью Q_n за заданный срок T_n [1, 9, 10, 11]. Имеется некоторое количество специалистов, способных выполнить эту работу. При этом один специалист не в состоянии выполнить эту работу в заданные сроки, а все специалисты просто избыточны. То есть число назначенных на работу исполнителей m должно удовлетворять соотношению $1 < m < N$, где N – общее число работников, которых можно выделить для выполнения рассматриваемого объема работ. Каждый исполнитель характеризуется индивидуальной производительностью w_i и оплатой своего труда c_i . Необходимо сформировать временный трудовой коллектив, способный выполнить заданный объем работ в договорные сроки, при этом минимизировав затраты на оплату труда [12].

Для дальнейшего решения определим суммарную сменную производительность создаваемого производственного коллектива, исходя из условий задач

$$W = \frac{Q_n}{T_n}, \quad (1)$$

и введем двоичную переменную x_i , принимающую значение, равное 1 в том случае, если i специалист назначен на выполнение работы и 0 – в противном случае. В этом случае формальная постановка задачи будет иметь следующий вид:

целевая функция задачи –

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \min \quad (2)$$

при следующем ограничении

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W. \quad (3)$$

Задача (2)–(3) относится к классу задач двоичного программирования, алгоритмы решения которой известны [10, 13].

В данном случае достаточно хорошо себя зарекомендовали «жадные» алгоритмы, которые в данном случае предполагают определить для каждого специалиста величину его персональной эффективности, то есть

$$\vartheta_i = \frac{w_i}{c_i}, \quad (4)$$

и отбирать исполнителей в порядке убывания этой величины. Получаемое решение, как правило, было близко к оптимальному или же совпадало с ним.

Но это только в том случае, если ограничение (4) приводится в детерминированном варианте. А вот в том случае, когда индивидуальная производительность w_i представляет собой вероятностную величину, решение задачи уже будет затруднено.

И здесь, естественно, встает вопрос о характеристиках функции распределения такой случайной величины, как производительность труда работника. В данном случае ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Утверждение 1. Производительность труда специалиста является случайной величиной, распределенной по нормальному закону распределения.

Доказательство. Согласно представлениям о реальной производительности труда производственного персонала следует отметить, что ее величина определяется в основном за счет невыхода на работу по различным причинам, но чаще всего за счет болезни и отвлечения на исполнение гособязанностей. А это явление не имеет широкого распространения, что показывает статистическое изучение использования рабочего времени на основании табеля учета рабочего времени – Т-12 и Т-13. Отличаются формы тем, что Т-12 является универсальным вариантом, а Т-13 ведется, если в организации установлена автоматическая система контроля явок-неявок на работу (турникет). Поэтому с большой долей достоверности можно утверждать, что величина производительности труда укладывается в диапазон «трех сигм» и это дает веские основания считать, что изучаемая величина распределена по нормальному закону распределения.

Приведем типичную статистику. Всего в году имеется примерно 250 рабочих дней (количество меняется от года к году, но примерно все крутится около этой цифры). Если иметь в виду конкретного работника, то из этого количества дней необходимо вычесть отпуск 28 рабочих дней. В этом случае баланс рабочего времени для одного работника составит 222 рабочих дня. Если работник использовал все эти дни, то его производительность будет максимальной, а если же он пропустил, то, соответственно, его производительность уменьшится. Например, работник

в течение года отсутствовал на рабочем месте 22 дня. Это достаточно много, так как предполагается, что он за год не работал кроме отпуска еще один месяц, то есть 10 % рабочего времени. Соответственно, его производительность труда может составлять 90 % от его максимальной выработки. Учитывая, что средняя величина производительности в этом случае составляет примерно 1, то диапазон трех сигм будет составлять примерно $1 - 3 \times \sigma$. Откуда находим, что $\sigma = 0,33$.

В итоге задача (2)–(3) преобразуется к задаче с вероятностным ограничением вида

$$P(\sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W) \geq \alpha, \quad (5)$$

которое будет означать, что вероятность суммарной производительности назначенных на работу исполнителей будет не меньше директивной величины W , обеспечивающей с заданной вероятностью α выполнения работы в обусловленные договором сроки T_d . Понятно, что к этому ограничению добавляется ограничение на бинарность переменных x_i .

Таким образом, в вероятностной постановке задача сводится к нахождению минимума целевой функции вида (2) при стохастическом ограничении (5).

Такого рода задачи решаются путем редукции стохастического ограничения (5) к детерминированному варианту. Переход может быть осуществлен с учетом утверждения 1 о нормальном распределении производительности труда исполнителей.

Согласно свойствам закона нормального распределения, вероятность попадания исследуемой случайной величины в заданный интервал $P(\sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W) \geq \alpha$ может быть преобразована к

виду $\Phi\left(\frac{W - \sum_{i=1}^m w_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i}}\right) \leq 1 - \alpha$, где $\Phi(\dots)$ – функция Лапласа, задаваемая таблично, что эквивалентно следующему выражению:

$$\frac{W - \sum_{i=1}^m w_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i}} \leq z_{1-\alpha}, \quad (6)$$

где $z_{1-\alpha}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня 0,05 берется из таблиц функции Лапласа.

Согласно свойству симметрии функции распределения, справедливо соотношение $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$, откуда следует $z_{0,95} = 1,645$, а $z_{0,05} = -1,645$.

Подставим найденные значения в неравенство (6), получим

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i - W \geq 1,645 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i} \text{ или } \sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W + 1,645 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i}. \quad (7)$$

В итоге получили детерминированное ограничение, а сама задача свелась к задаче нелинейного программирования за счет слагаемого в выражении (5), содержащего корень квадратный.

В принципе, задача (2) и (7) решаемая, но только методами нелинейного программирования. Возможен другой подход, основанный на линеаризации нелинейного члена задачи. В данном случае линеаризации должен подвергнуться корень квадратный из выражения (7).

Обозначим подкоренное выражение через V :

$$V = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i. \quad (8)$$

Самый простой способ линеаризации приведенного выше выражения является разложение этого выражения в ряд Тейлора с удержанием в нем первых линейных членов. Для этого необходимо выбрать точку, в окрестности которой и будет осуществляться разложение функции в ряд Тейлора, которую обозначим как V_0 . Успех аппроксимации будет зависеть от того, насколько удачно будет выбрана эта точка.

Но для того чтобы воспользоваться этим способом, необходимо определить значения математического ожидания величины производительности специалиста и ее дисперсию.

Значение математического ожидания хорошо аппроксимируется в этом случае величиной средней производительности, а вот для определения дисперсии воспользуемся правилом «трех сигм», согласно которому практически весь спектр возможных значений, а точнее 99,73 %, укладывается в диапазон трех сигм от математического ожидания. И здесь следует заметить, что на производительность труда работников оказывает влияние множество факторов, но основными являются только два: процент неявок на работу по различным причинам, в основном болезни, и квалификация сотрудника.

Это дает возможность, определив экспертным путем по данным табельного учета организации размах вариации для производительности труда, вычислить среднеквадратическое отклонение (СКО) для определенной группы специалистов, квалификация которых примерно одинакова. Сравнение квалификации удобнее всего осуществлять по затратам на заработную плату для каждой квалификационной группы.

Определив таким образом основные характеристики изучаемой случайной величины – производительности труда, – можно приступить к линеаризации ограничений (5).

Среди наиболее часто используемых методов можно выделить следующие [14, 15]:

1. **Среднее или ожидаемое значение V .** Если имеется возможность получить оценки для величин x_i , то можно оценить ожидаемое значение V , используя среднее значение $V_0 = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}$.

Теперь возникает задача определения граничных значений для величины V . Для величины $V_{\max}$ это сделать нетрудно, достаточно взять максимально возможное количество специалистов. В этом случае обычно берут всех.

Труднее определить величину $V_{\min}$, так как в этом случае требуется отобрать некоторое количество специалистов так, чтобы срок выполнения работ не превысил директивный, то есть необходимо учитывать имеющееся ограничение. Используя найденную область значений $V \in [V_{\min}, V_{\max}]$, функцию V можно аппроксимировать линейной функцией на этом отрезке, разложив ее в точке V_0 по формуле $\sqrt{V} \approx \sqrt{V_0} + \frac{V - V_0}{2\sqrt{V_0}}$.

Подставляя в ограничение (5), получаем

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W + 1,645 \cdot \left(\sqrt{V_0} + \frac{V - V_0}{2\sqrt{V_0}} \right), \quad (9)$$

где V определяется выражением (8).

Таким образом, исходное нелинейное ограничение вида (7) трансформировалось в линейное ограничение относительно x_i вида (9). Полученную задачу (2), (9) можно решать стандартными методами линейной оптимизации [10, 16].

Следует отметить, что аппроксимация квадратного корня линейной функцией является самым простым способом аппроксимации и допустима только при небольшом разбросе значений исследуемой функции V в интервале исследования. Для широкого диапазона значений функции ограничений возможно использование и других алгоритмов. Например, минимизация ошибки аппроксимации на ожидаемом интервале.

Данный алгоритм используется тогда, когда известен интервал изменения исследуемой величины $[V_{\min}, V_{\max}]$. В этом случае можно выбрать V_0 так, чтобы минимизировать максимальную ошибку аппроксимации на этом интервале. Для функции V наилучшая линейная аппроксимация в смысле минимакса достигается, когда максимальные отклонения на концах равны по модулю. Для этого можно выбрать точку, в окрестности которой будем осуществлять разложение функции в ряд Тейлора в виде $V_0 = \left(\frac{\sqrt{V_{\max}} - \sqrt{V_{\min}}}{1/\sqrt{V_{\max}} - 1/\sqrt{V_{\min}}} \right)^2$.

В том случае, когда требуется решить задачу небольшой размерности, возможен подход, базирующийся на полном переборе вариантов, что дает точное решение задачи. Но для больших задач ($n > 100$) описанные методы аппроксимации позволяют свести задачу к линейному целочисленному программированию, решаемому, например, методом ветвей и границ.

2. **Итеративный подход**, который заключается в том, что полученное решение на базе определения возможного диапазона изменения изучаемой функции используют как начальное приближение V_0 и решают задачу с новым приближением, получая таким образом последующее приближение, которое сравнивают с предыдущим. В том случае, если требуемая для расчетов точность достигнута, вычисление прекращают, если же нет, то продолжают.

В целом надо отметить, что исследуемая функция задачи является достаточно сложной. Во-первых, она дискретна; во-вторых, плохо устойчива: малые изменения начального приближения V_0 приводят к значительным колебаниям в решении; в-третьих, имеет место неоднозначность решения, то есть могут существовать несколько решений с близкой стоимостью, но с разными значениями V . Как правило, в таких случаях приходится применять более сложные методы решения.

3. **Аппроксимация кусочно-линейной функцией**, которая используется в том случае, когда диапазон изменения исследуемой функции V достаточно значительный и применение одной ли-

нейной аппроксимации приводит к существенным ошибкам. В этом случае требуется весь диапазон исследования разбить на несколько участков, построив для каждого свою линейную функцию. То есть подход тесно связан с аппроксимацией линейными сплайнами. Это можно сделать, введя дополнительные переменные.

Алгоритм аппроксимации в этом случае будет следующий:

1-й шаг. Определяем диапазон V . $V_{\min}$ и $V_{\max}$ можно оценить, исходя из минимально возможного и максимально возможного числа специалистов. В качестве минимального значения V рекомендуется принять величину, при которой возможно выполнение ограничения (без учета дисперсии). Для этой цели решают оценочную задачу в линейной постановке без учета нелинейного члена $\sqrt{V}$, то есть ограничение будет детерминированным и иметь вид $M \geq w_n$. Получим некоторый набор, дающий $V_{\min}$. А $V_{\max}$ можно получить, взяв всех доступных специалистов.

2-й шаг. Найденный интервал разбиваем $[V_{\min}, V_{\max}]$ на K отрезков точками $v_0 = V_{\min}, v_1, v_2, \dots, v_K = V_{\max}$. Обычно разбиение равномерное или такое, чтобы $\sqrt{V}$ хорошо приближалась.

3-й шаг. На каждом отрезке $[v_{k-1}, v_k]$ функция $\sqrt{V}$ приближается линейной функцией: $\sqrt{V} \approx a_k V + b_k$, где $a_k = \frac{\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}}{v_k - v_{k-1}}$, $b_k = \sqrt{v_{k-1}} - a_k v_{k-1}$.

4-й шаг. Таким образом, имеем K отрезков. Для каждого отрезка k мы определяем коэффициенты a_k, b_k , как выше. Мы хотим представить V и $s = \sqrt{V}$ так, чтобы если V лежит в отрезке k , то $s = a_k V + b_k$. Для этого введем бинарные переменные y_k , указывающие, в каком отрезке находится V , и непрерывные переменные λ_{k-1}, λ_k для крайних точек отрезка, такие что $\sum_{j=0}^K \lambda_j = 1$, и переменные V и s представляем как $V = \sum_{j=0}^K \lambda_j v_j$, $s = \sum_{j=0}^K \lambda_j f(v_j)$.

В данном случае следует добавить условие, что не более двух соседних λ_j могут быть положительными. Это можно реализовать с помощью дополнительных бинарных переменных. Для каждого отрезка k (между v_{k-1} и v_k) вводим бинарную переменную y_k и требуем: $\lambda_0 \leq y_1$, $\lambda_j \leq y_j + y_{j+1}$ для $j = 1, \dots, K-1$, $\lambda_K \leq y_K$,

$$\sum_{j=0}^K y_j = 1, \lambda_j \geq 0,$$

тогда V и s выражаются через λ .

После введения переменных и ограничений для кусочно-линейной аппроксимации исходное ограничение становится линейным:

$$M = \sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W + z_a s.$$

Теперь задача: минимизировать затраты при линейных ограничениях (включая кусочно-линейную аппроксимацию) и целочисленности x_i . Это задача смешанно-целочисленного линейного программирования (MILP), которую можно решить стандартными методами.

И в данном случае следует иметь в виду, что аппроксимируемая функция $\sqrt{V}$ является вогнутой и, следовательно, аппроксимация будет давать более жесткое ограничение для исходной задачи, что не всегда будет являться приемлемым. Поскольку $\sqrt{V}$ вогнута, кусочно-линейная аппроксимация с интерполяцией между точками дает оценку снизу, так как линейная интерполяция между точками для вогнутой функции дает график, который лежит ниже кривой (хорда ниже графика). Поэтому значение s будет меньше или равно истинному $\sqrt{V}$, что дает заниженное значение $\sqrt{V}$, если V не совпадает с точкой разбиения.

Для преодоления этого затруднения требуется модифицировать ограничение, добавив поправку на максимальную ошибку аппроксимации ε . В этом случае ограничение примет вид $M \geq W + z_a (s + \varepsilon)$, где ε – максимальная ошибка аппроксимации.

Оценить максимальную ошибку ε можно как максимальную разность между $\sqrt{V}$ и линейной интерполяцией на каждом отрезке. Для вогнутой функции максимальная ошибка на отрезке $[a, b]$ достигается в середине. Ошибка находится из следующего выражения:

$$\delta = \max_{V \in [a, b]} [\sqrt{V} - (a_k V + b_k)].$$

Можно взять максимальную δ по всем отрезкам.

Вполне понятно, что чем на большее число отрезков разбить исследуемый диапазон, тем меньше будет ошибка ε .

Таким образом, полная модель с кусочно-линейной аппроксимацией и поправкой на ошибку дает консервативное приближение, гарантирующее выполнение исходного вероятностного ограничения.

Таким образом, кусочно-линейная аппроксимация позволяет свести исходную нелинейную задачу стохастического программирования к задаче смешанно-целочисленного линейного программирования.

Этот метод применим и к задачам большой размерности.

Таким образом, следует сказать, что учет стохастической природы исследуемой задачи вносит достаточно серьезные трудности в процесс ее решения. Как правило, в таких случаях пытаются подобрать эвристический алгоритм решения задачи. В данном случае задача характеризуется двумя критериями оценки выбранного варианта распределения ресурсов – это минимальный размер затрат на формирование команды проекта и выполнение договорных сроков проведения работ. В связи с этим возможно использование двух подходов: по убыванию эффективности, то есть уменьшению отношения (4) – $\Xi_i = w_i/c_i$ [15, 17], или по возрастанию отношения среднеквадратического отклонения к производительности, то есть $D_i = \sigma_i/w_i$. При этом возможно использование и этих двух эвристических правил: вначале выстраивают последовательность специалистов по убыванию эффективности, а затем по возрастанию соотношения дисперсии к производительности.

Понятно, что такой подход достаточно трудоемкий и неоднозначный, поэтому предлагается ввести комплексный критерий, представляющий произведение вышеприведенных критериев $K = \Xi_i \cdot D_i = w_i/c_i \cdot \sigma_i/w_i = \sigma_i/c_i$.

Полученный критерий имеет и достаточно прозрачный физический смысл – это удельная стоимость отклонения производительности труда от ее среднего значения на единицу.

Результаты исследования

Рассмотрим пример использования предлагаемых алгоритмов.

Пример. Предприятию необходимо направить бригаду специалистов для выполнения субподрядных работ на объекте, трудоемкость которых составляет 2500 чел.-смен. Договор предусматривает выполнение данного объема работ за 180 смен, то есть именно в этот период организация должна передать генподрядчику фронт работ для последующей реализации выполняемого проекта. Предприятие располагает 18 специалистами требуемой квалификации, данные о которых приведены в табл. 1 (заданы затраты на привлечение каждого из специалистов: это зарплата – c_i и производительность – w_i).

Исходные данные для примера

Таблица 1

The initial data for the example

Table 1

№ п/п	c_i	w_i	Детерминированное решение	Стохастическое решение	Линеаризация
1	12	2,3	1	1	1
2	12	2,1	1	0	0
3	12	2	0	0	0
4	10	1,9	1	1	1
5	10	1,8	1	1	1
6	10	1,7	0	1	1
7	10	1,6	0	0	0
8	8	1,4	1	1	1
9	8	1,3	0	0	0
10	8	1,2	0	0	0
11	8	1,1	0	0	0
12	8	1,45	1	1	1
13	5	1,1	1	1	1
14	5	1	0	1	1
15	5	0,9	1	1	0
16	5	0,95	1	1	1
17	5	0,85	0	0	1
18	5	0,8	0	0	0
	Сумма	25,45	9/75	10/78	10/78

Необходимо сформировать бригаду, которая могла бы выполнить все работы в заданный срок, при этом затраты на привлечение специалистов должны быть минимальны. Производительность каждого специалиста – случайная величина, распределенная по нормальному закону распределения.

В целях определения суммарной сменной производительности отобранных работников воспользуемся формулой, позволяющей определить эту величину при условии соблюдения договорных сроков строительства. Для условий рассматриваемой задачи, когда общая трудоемкость выполняемых работ равна $Q_n = 2500$ чел.-смен, а договорной срок выполнения работ составляет $T_n = 180$ смен, получаем среднюю величину сменной производительности W

$$W = \frac{Q_n}{T_n} = \frac{2500}{180} \approx 13,9.$$

В том случае, если считать, что производительность каждого работника является детерминированной величиной, мы приходим к стандартной задаче двоичного программирования (2)–(3), точное решение которой приведено в табл. 1.

Если же отказаться от этого предположения, то задача несколько усложняется и принимает вид (2) и (5), превращаясь в задачу уже стохастического программирования.

Одним из способов решения таких задач является редукция выражения, содержащего случайную величину, к детерминированной постановке. Используя свойства нормального распределения, осуществляем это преобразование и приходим к детерминированной задаче с целевой функцией вида

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \min \quad (10)$$

и ограничением в форме

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i \geq W + 1,645 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i}. \quad (11)$$

Таким образом, задача стохастического программирования (2) и (5) трансформировалась в детерминированную нелинейную задачу (10)–(11), решение которой, учитывая непростые свойства исследуемой функции, требует привлечения достаточно сложных алгоритмических методов типа эволюционного поиска.

Точное решение стохастической задачи приведено также в табл. 1. Здесь же представлен и результат решения поставленной задачи путем линеаризации ограничения в форме (11). Анализ полученных решений позволяет сделать вывод о том, что учет стохастичности параметров, как правило, ведет к увеличению ресурсов типа «мощности» в данном случае, здесь имеются в виду привлекаемые к работе специалисты, и, как следствие, в некоторых случаях может привести к росту стоимости выполняемых работ. При этом взять решение для детерминированного варианта нельзя, так как будет нарушаться введенное стохастическое ограничение вида (11). В данном случае вероятностное ограничение будет выполняться практически как равенство, превосходя левую часть на 0,03.

В этой же табл. 1 приведено и решение, полученное по симплекс-методу, для случая, когда нелинейное ограничение вида (11) аппроксимировалось линеаризованным выражением (9). Точность решения в данном случае будет зависеть от выбора точки, в окрестности которой будем раскладывать нелинейный член в ряд Тейлора. В данном случае это можно делать в виде цикла возможных значений, которые может принимать исследуемая величина V_0 . А так как диапазон возможного изменения этой величины небольшой, то и вариантов перебора потребуется не так уж и много. В данном случае за счет удачного выбора точки, в окрестности которой происходило разложение нелинейного члена в ряд Тейлора, решение совпало с точным решением по числу отобранных специалистов и затрат на выполнение работ.

Но в любом случае алгоритмы решения задач со стохастическими параметрами требуют значительной подготовительной работы и весьма трудоемки. Хотелось бы получить алгоритмы простые по процедуре применения, дающие решение, хоть и не оптимальное, но близкое к нему.

В данном случае задача может характеризоваться тремя критериями оценки выбранного варианта распределения ресурсов – это минимальный размер затрат на формирование команды проекта, выполнение договорных сроков проведения работ и риск нарушения договорных сроков, приходящийся на единицу затрат. В связи с этим возможно использование трех подходов: по убыванию эффективности, то есть уменьшению отношения w_i/c_i , по возрастанию отношения

среднеквадратического отклонения к производительности, то есть величины σ_i/w_i и уменьшения риска на единицу затрат σ_i/c_i .

Таким образом, возникает проблема построения комплексного критерия оценки вариантов в оптимизационных задачах. Рассмотрим предложенные критерии и их применимость.

Критерий, характеризующий эффективность конкретного i -го варианта, – w_i/c_i , то есть производительность, приходящаяся на единицу затрат. Данный критерий широко используется, но в нашем случае имеется существенная проблема – не учитывается риск (среднеквадратическое отклонение). Специалист с высокой удельной производительностью w_i/c_i может иметь большую величину среднеквадратического отклонения (СКО) σ_i , что увеличивает вероятность срыва сроков. Второй критерий характеризует стабильность работы специалиста: σ_i/w_i , но не учитывает стоимость. Следовательно, возможно отобрать очень стабильных, но дорогих специалистов. Критерий σ_i/c_i , характеризующий риск на единицу затрат, к сожалению, не учитывает производительность. Можно выбрать дешевых специалистов с малым значением (СКО) σ , но их производительность w может быть недостаточной для выполнения договорных обязательств.

Кроме того, возможность успешного выполнения работ по проекту зависит не только от характеристик конкретного специалиста, но и от параметров других членов команды.

Исходная задача имеет линейную целевую функцию (2) и ограничения с учетом вероятностной природы (5), которые преобразуются к детерминированному варианту (7), превращая задачу в нелинейную. Таким образом, исходная задача имеет линейную целевую функцию (2) и нелинейное ограничение в форме (7). В этом случае оптимальное решение задачи будет находиться на

границе выполнимости соотношения: $\sum_{i=1}^m w_i x_i = W + z_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i} + \varepsilon$, ($\varepsilon \geq 0$).

Для решения поставленной задачи предлагаем использовать комбинированный критерий, позволяющий учесть все три фактора, перечисленные выше:

$$K_i = \frac{w_i - \frac{z_\alpha \sigma_i}{\sqrt{n}}}{c_i}, \quad (12)$$

где n – число специалистов, отобранных для реализации проекта.

Естественно, возникает вопрос о возможности предварительного определения параметра n по заданным начальным условиям задачи. Для этого случая найдем среднюю производительность работника w_{cp} , а затем разделим суммарную сменную производительность команды проекта W на эту величину, получаем $n = \frac{W \cdot N}{\sum_{i=1}^N w_i}$.

Для рассматриваемой задачи $\alpha = 0,95$, $z_\alpha = 1,645$ ожидаемое значение с учетом округления составит $n \approx 10$ (точное значение $n = 9,82318$).

Решим пример с использованием введенных критериев. Результаты применения всех четырех критериев представлены в табл. 2–5. Таким образом, простые эвристики типа w/c или σ/w не гарантируют оптимальности в стохастических задачах с вероятностными ограничениями из-за нелинейности ограничения (корень из суммы дисперсий), взаимосвязи параметров в команде и дискретности переменных.

Результат применения критерия эффективности

Таблица 2

Table 2

The result of applying the efficiency criterion

№ п/п	c_i	w_i	Критерий	Место	$\Xi_i = w_i/c_i$
1	12	2,3	0,1917	3	1
2	12	2,1	0,175	9	1
3	12	2	0,1667	13	0
4	10	1,9	0,19	4	1
5	10	1,8	0,18	7	1
6	10	1,7	0,17	11	0
7	10	1,6	0,16	15	0
8	8	1,4	0,175	10	1
9	8	1,3	0,1625	14	0

Окончание табл. 2
Table 2 (end)

№ п/п	c_i	w_i	Критерий	Место	$\Theta_i = w_i/c_i$
10	8	1,2	0,15	17	0
11	8	1,1	0,1375	18	0
12	8	1,45	0,1813	6	1
13	5	1,1	0,22	1	1
14	5	1	0,2	2	1
15	5	0,9	0,18	7	1
16	5	0,95	0,19	4	1
17	5	0,85	0,17	11	0
18	5	0,8	0,16	15	0
	Сумма	25,45			10/80

Предлагается использовать практический алгоритм отбора на базе критерия вида (12). При этом предполагается следующая схема действий:

1-й шаг. Предварительный отбор (эвристика). Для этого рассчитывается примерное число специалистов, необходимых для реализации имеющегося фронта работ. Для этой цели можно воспользоваться результатами, полученными при решении детерминированной задачи, либо же выбирать специалистов по порядку, пока не выполнится упрощённое ограничение $\sum w_i \geq W$. Можно провести примерный расчет. Для этого необходимо найти среднюю производительность специалиста по всей группе w_{cp} , а затем разделить сменную производительность W на w_{cp} , то есть $n \approx W/w_{cp}$. Для рассматриваемого примера искомый параметр будет равен $n \approx 10$.

Результат применения критерия по отношению среднеквадратического отклонения к производительности

Таблица 3

The result of applying the criterion with respect to the root mean square performance deviations

Table 3

№ п/п	c_i	w_i	σ_i	Критерий	Место	$D_i = \sigma_i/w_i$
1	12	2,3	0,1247	0,0542	1	1
2	12	2,1	0,1247	0,0594	3	1
3	12	2	0,1247	0,0624	5	1
4	10	1,9	0,1118	0,0588	2	1
5	10	1,8	0,1118	0,0621	4	1
6	10	1,7	0,1118	0,0658	6	1
7	10	1,6	0,1118	0,0699	7	1
8	8	1,4	0,1281	0,0915	10	0
9	8	1,3	0,1281	0,0985	11	0
10	8	1,2	0,1281	0,1067	14	0
11	8	1,1	0,1281	0,1164	17	0
12	8	1,45	0,1281	0,0883	8	1
13	5	1,1	0,0986	0,0896	9	0
14	5	1	0,0986	0,0986	12	0
15	5	0,9	0,0986	0,1096	15	0
16	5	0,95	0,0986	0,1038	13	0
17	5	0,85	0,0986	0,116	16	0
18	5	0,8	0,0986	0,1233	18	0
	Сумма	25,45				8/84

2-й шаг. Необходимо вычислить для каждого специалиста величину критерия K_i с учетом найденного значения n и расположить специалистов по убыванию этого критерия.

Результат применения критерия отношения среднеквадратического отклонения к стоимости

Таблица 4

Table 4

The result of applying the ratio criterion the standard deviation to the cost

№ п/п	c_i	w_i	σ_i	Критерий	Место	$K_i = \sigma_i/c_i$
1	12	2,3	0,1247	0,0104	1	1
2	12	2,1	0,1247	0,0104	2	1
3	12	2	0,1247	0,0104	3	1
4	10	1,9	0,1118	0,0112	4	1
5	10	1,8	0,1118	0,0112	5	1
6	10	1,7	0,1118	0,0112	6	1
7	10	1,6	0,1118	0,0112	7	1
8	8	1,4	0,1281	0,016	8	1
9	8	1,3	0,1281	0,016	9	0
10	8	1,2	0,1281	0,016	10	0
11	8	1,1	0,1281	0,016	11	0
12	8	1,45	0,1281	0,016	12	0
13	5	1,1	0,0986	0,0197	13	0
14	5	1	0,0986	0,0197	14	0
15	5	0,9	0,0986	0,0197	15	0
16	5	0,95	0,0986	0,0197	16	0
17	5	0,85	0,0986	0,0197	17	0
18	5	0,8	0,0986	0,0197	18	0
	Сумма	25,45				8/84

3-й шаг. Локальное улучшение. Необходимо проверить полученное эвристическое решение на предмет дальнейшего улучшения.

Результат применения критерия удельной стоимости отклонения
производительности труда от ее среднего значения на единицу

Таблица 5

Table 5

The result of applying the unit cost criterion is the deviation
of labor productivity from its average value per unit

№ п/п	c_i	w_i	σ_i	Критерий	Место	$K_i = \frac{w_i - \frac{z_0 \sigma_i}{\sqrt{n}}}{c_i}$
1	12	2,3	0,1247	0,9946	1	1
2	12	2,1	0,1247	0,9946	2	1
3	12	2	0,1247	0,9946	3	1
4	10	1,9	0,1118	0,9942	4	1
5	10	1,8	0,1118	0,9942	5	1
6	10	1,7	0,1118	0,9942	6	1
7	10	1,6	0,1118	0,9942	7	1
8	8	1,4	0,1281	0,9917	8	0
9	8	1,3	0,1281	0,9917	9	0
10	8	1,2	0,1281	0,9917	10	0
11	8	1,1	0,1281	0,9917	11	0
12	8	1,45	0,1281	0,9917	12	0
13	5	1,1	0,0986	0,9897	13	0
14	5	1	0,0986	0,9897	14	1
15	5	0,9	0,0986	0,9897	15	0
16	5	0,95	0,0986	0,9897	16	0
17	5	0,85	0,0986	0,9897	17	0
18	5	0,8	0,0986	0,9897	18	0
	Сумма	25,45				8/79

Обсуждение и заключение

В работе рассмотрена задача формирования проектной команды в условиях стохастической производительности специалистов. Показано, что учет случайного характера производительности приводит к необходимости решения задачи стохастического программирования с вероятностным ограничением. Преобразование вероятностного ограничения к детерминированному эквиваленту на основе свойств нормального распределения позволяет перейти к задаче нелинейного целочисленного программирования.

Для решения полученной нелинейной задачи предложены методы линеаризации, включая разложение в ряд Тейлора и кусочно-линейную аппроксимацию. Эти методы позволяют свести задачу к линейной форме, пригодной для решения стандартными алгоритмами, однако требуют выбора точки линеаризации и учета ошибок аппроксимации.

Анализ эвристических критериев отбора (таких как отношение производительности к стоимости, отношения СКО к производительности и комплексного критерия) показал, что простые эвристики не гарантируют оптимальности из-за нелинейности ограничений и взаимного влияния параметров команды. Наилучшие результаты достигаются при использовании комбинированного критерия.

Практический пример подтвердил, что учет стохастичности увеличивает размер команды и затраты. Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку более эффективных эвристик и алгоритмов для задач большой размерности.

Список литературы

1. Баркалов С.А. Ресурсное планирование проектного управления: моногр. / С.А. Баркалов, П.Н. Курочка, Л.Д. Маилян, Е.А. Серебрякова. М.: Кредо, 2024. 530 с.
2. Huang W., Li H., Shen Q. Dynamic resource allocation for multi-project construction under uncertainty: A robust optimization approach // *Journal of Construction Engineering and Management*. 2022. Vol. 148 (4). P. 04022003.
3. Математическая модель выбора поставщика металлообрабатывающего оборудования в условиях необходимости достижения технологического суверенитета / О.В. Логиновский, А.А. Максимов, М.В. Щемлев, А.М. Богер // *Системы управления и информационные технологии*. 2023. № 2 (92). С. 86–92.
4. Sari M., Arditi D. Machine learning-based prediction of labor productivity in construction using site-specific factors // *Construction Management and Economics*. 2021. Vol. 39 (8). P. 755–772.
5. Новиков Д.А., Иващенко А.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. М.: КомКнига, 2006. 332 с.
6. Zhang L., Hu Z. Resource leveling in construction projects using hybrid genetic algorithm and discrete event simulation // *Automation in Construction*. 2023. Vol. 145. P. 104678.
7. Формирование поколений новой техники как задача о покрытии множества / С.А. Баркалов, В.Н. Бурков, П.Н. Курочка, Е.А. Серебрякова // *Проблемы управления*. 2023. № 6. С. 22–32. DOI: 10.25728/ru.2023.6.2
8. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. Third Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021.
9. Balouka N., Cohen I. A robust optimization approach for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem // *European Journal of Operational Research*. 2021. Vol. 291, iss. 2. P. 457–470. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.09.052
10. Pinedo M.L. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer International Publishing, 2016.
11. Cheng M.Y., Tran D.H. Fuzzy multi-objective particle swarm optimization for resource allocation in large-scale construction projects // *Applied Soft Computing*. 2021. Vol. 102. P. 107076.
12. Баркалов С.А. Оптимизационные модели – инструмент системного моделирования: моногр. / С.А. Баркалов, П.Н. Курочка, Л.Д. Маилян, Е.А. Серебрякова. М.: Кредо, 2023. 522 с.
13. Birge J.R., Louveaux F. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Science & Business Media, 2011.
14. Zou P.X.W., Zhang G., Wang J. Understanding the critical factors influencing the design and construction integration process in China // *International Journal of Project Management*. 2018. Vol. 36 (3). P. 468–482.

15. Асатулова Ю.М., Хватова Т.Ю. Повышение инновационной активности предприятий в условиях дефицита финансов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2019. Т. 12, № 1. С. 132–145. DOI: 10.18721/JE.12111

16. Nikakhtar A., Wong K.K., Zavichi K.G. Particle swarm optimization for resource-constrained project scheduling in construction // *Engineering, Construction and Architectural Management*. 2019. Vol. 26 (7). P. 1388–1408.

17. Медведев С.Н. Жадные и адаптивный алгоритмы решения задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием объектов // *Автоматика и телемеханика*. 2023. № 3. С. 139–168. DOI: 10.31857/S0005231023030078

References

1. Barkalov S.A., Kurochka P.N., Mailyan L.D., Serebryakova E.A. *Resursnoe planirovanie proektnogo upravleniya: monografiya* [Resource planning of project management: monograph]. Moscow: Kredo; 2024. 530 p. (In Russ.)

2. Huang W., Li H., Shen Q. Dynamic resource allocation for multi-project construction under uncertainty: A robust optimization approach. *Journal of Construction Engineering and Management*. 2022;148(4):04022003.

3. Loginovskiy O.V., Maksimov A.A., Shchemlev M.V., Boger A.M. Mathematical model of choosing a supplier of metal-working equipment under the conditions of the necessity to achieve technological sovereignty. *Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii*. 2023;2(92):86–92. (In Russ.)

4. Sari M., Arditi D. Machine learning-based prediction of labor productivity in construction using site-specific factors. *Construction Management and Economics*. 2021;39(8):755–772.

5. Novikov D.A., Ivashchenko A.A. *Modeli i metody organizatsionnogo upravleniya innovatsionnym razvitiem firmy* [Models and methods of organizational management of the innovative development of the firm]. Moscow: KomKniga; 2006. 332 p. (In Russ.)

6. Zhang L., Hu Z. Resource leveling in construction projects using hybrid genetic algorithm and discrete event simulation. *Automation in Construction*. 2023;145:104678.

7. Barkalov S.A., Burkov V.N., Kurochka P.N., Serebryakova E.A. Forming the generations of new technological products as a set covering problem. *Control Sciences*. 2023;(6):18–26. DOI: 10.25728/cs.2023.6.2

8. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. Third Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021.

9. Balouka N., Cohen I. A robust optimization approach for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*. 2021;291(2):457–470. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.09.052

10. Pinedo M.L. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer International Publishing, 2016.

11. Cheng M.Y., Tran D.H. Fuzzy multi-objective particle swarm optimization for resource allocation in large-scale construction projects. *Applied Soft Computing*. 2021;102:107076.

12. Barkalov S.A., Kurochka P.N., Mailyan L.D., Serebryakova E.A. *Optimizatsionnye modeli – instrument sistemnogo modelirovaniya: monografiya* [Optimization models – a tool for system modeling: monograph]. Moscow: Kredo; 2023. 522 p. (In Russ.)

13. Birge J.R., Louveaux F. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Science & Business Media, 2011.

14. Zou P.X.W., Zhang G., Wang J. Understanding the critical factors influencing the design and construction integration process in China. *International Journal of Project Management*. 2018;36(3):468–482.

15. Asaturova Yu.M., Khvatova T.Y. Improving innovative activity of enterprises in conditions of financial deficit. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics*. 2019;12(1):132–145. (In Russ.) DOI: 10.18721/JE.12111

16. Nikakhtar A., Wong K.K., Zavichi K.G. Particle swarm optimization for resource-constrained project scheduling in construction. *Engineering, Construction and Architectural Management*. 2019;26(7):1388–1408.

17. Medvedev S.N. Greedy and Adaptive Algorithms for Multi-Depot Vehicle Routing with Object Alternation. *Automation and Remote Control*. 2023;84(3):305–325. DOI: 10.1134/S0005117923030086

Информация об авторах

Баркалов Сергей Алексеевич, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой управления, декан факультета экономики, менеджмента и информационных технологий, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; sbarkalov@nm.ru.

Курочка Павел Николаевич, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры управления, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; kpn55@rambler.ru.

Information about the authors

Sergey A. Barkalov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Management, Dean of the Faculty of Economics, Management and Information Technologies, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia; sbarkalov@nm.ru.

Pavel N. Kurochka, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Management, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia; kpn55@rambler.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 12.01.2026

The article was submitted 12.01.2026