УДК 517.9

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ «ШУМОВ»

А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков

Ранее была предложена новая концепция «белого шума», под которым понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса. Данный подход распространяется и на другие «шумы», которые в совокупности составляют пространство «шумов». В этих пространствах посредством математической модели измерительного устройства, представленной уравнениями леонтьевского типа, производятся точные динамические измерения «шумов». В качестве примера измерен «шум», имеющий вид импульса, амплитуда которого является гауссовой случайной величиной. Приведены точные результаты измерения.

Ключевые слова: винеровский процесс, производная Нельсона – Гликлиха, «белый шум», динамические измерения, пространство «шумов».

Введение

Принято считать, что история изучения белого шума (БШ) восходит к теории броуновского движения А. Эйнштейна и М. Смолуховского. Из этой теории следует, что смещение частицы в броуновском движении пропорционально $\sqrt{t}$, где t – время. Поэтому скорость частицы пропорциональна $(2\sqrt{t})^{-1}$ и, стало быть, не определена в момент времени $t = 0$. Следующий шаг в этом направлении был сделан Н. Винером, который предположил, что смещение частицы определяется случайным процессом, впоследствии получившим его имя. Итак, *винеровским* называется случайный процесс $\omega(t)$, обладающий следующими свойствами:

(W1) $\omega(0) = 0$ почти наверное (п.н.), и выборочные траектории $\omega(t)$ п.н. непрерывны;

(W2) математическое ожидание $E(\omega(t)) = 0$, и автокорреляционная функция $E\left(\left(\omega(t) - \omega(s)\right)^2\right) = |t - s|$;

(W3) выборочные траектории $\omega(t)$ п.н. недифференцируемы при всех $t \in [0, +\infty)$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Обычно под *белым шумом* (БШ) понимают обобщенную производную винеровского процесса (так как «обычной» производной в силу (W3) не существует). Именно в таком смысле БШ выступает, например, в линейных стохастических дифференциальных уравнениях вида

$$dx = (Sx + y)dt + A\delta\omega. \qquad (1)$$

Здесь в правой части символом $\delta\omega$ обозначен обобщенный дифференциал от винеровского процесса $\omega(t)$, т. е. БШ. Первым уравнения вида (1) начал изучать К. Ито, затем к исследованиям подключились Р.Л. Стратонович и А.В. Скороход. Их подходы различаются, главным образом, в трактовке интеграла $\int_0^\tau A\delta\omega(t)$, который возникает в правой части (1) после интегрирования. Подход Ито – Стратоновича – Скорохода возник и долгое время развивался в конечномерных пространствах (см. например [1, 2]). Однако в последнее время появились удачные попытки распространения данного подхода на бесконечномерную ситуацию [3, 4]. Кроме того, необходимо отметить новое направление, возникшее в школе И.В. Мельниковой [5, 6]. Здесь уравнение (1) рассматривается в виде

$$\dot{x} = Sx + y + \dot{\omega}, \qquad (2)$$

где все производные рассматриваются в пространстве Шварца. Таким образом, обобщенная производная винеровского процесса в правой части (2) – аддитивный БШ.

Наш подход к измерению динамически искаженных сигналов в качестве математической модели измерительного устройства (ИУ) использует *уравнения леонтьевского типа* [7]

$$L\dot{x} = Mx + y, \qquad (3)$$

где L и M – квадратные матрицы, причем $\det L = 0$. Если воспользоваться известной теорией Кронекера – Вейерштрасса (см. например [8], гл. 12), то в случае регулярности пучка $\mu L - M$ систему (1) можно привести к эквивалентной системе

$$\tilde{L}\dot{\tilde{x}} = \tilde{M}\tilde{x} + \tilde{y}, \qquad (4)$$

где матрицы $\tilde{L} = diag\{N_{\nu_1}, N_{\nu_2}, \ldots, N_{\nu_k}, \mathbb{I}_l\}$, $\tilde{M} = diag\{\mathbb{I}_m, S\}$, N_{ν_j} – жордановы клетки порядка ν_j, $j = \overline{1,k}$, с нулями на главных диагоналях; $\mathbb{I}_l$ и $\mathbb{I}_m$ – единичные матрицы, $l = n - m$, $m = \sum_{j=1}^{k} \nu_j$; S – квадратная матрица порядка l. В (4) m компонент вектор-функции $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ соответствует выходному сигналу, а остальные компоненты характеризуют состояние ИУ; вектор-функция $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ моделирует входной сигнал. То же самое необходимо сказать про их прообразы из (3).

Теперь, если в (3) в правой части окажется аддитивный БШ, то он, очевидно, окажется и в правой части (4) (возможно, с некоторым матричным множителем слева). Система (4) разбивается на две независимые части, первая из которых решается интегрированием (как например, (1) или (2)), а вторая – многократным дифференцированием правой части. Подход Ито – Стратоновича – Скорохода нам кажется здесь малоперспективным потому, что уж если первая производная винеровского процесса вызвала столько дискуссий, то сколько дискуссий вызовет вторая, третья и т. д. производные?! Трудности использования подхода Мельниковой – Филинкова – Альшанского заключаются в том, что все рассмотрения проводятся в *локально-выпуклых пространствах*, а нам в *теории оптимальных измерений* [9] приходится опираться на теорию оптимального управления *уравнениями соболевского типа* (см. например [10], гл. 7), которая развита в *гильбертовых пространствах.*

Выход авторами видится в использовании вместо обобщенной производной винеровского процесса производной в среднем. Основы теории таких производных заложил Нельсон [11], а саму теорию до ее нынешнего состояния развил Ю.Е. Гликлих [2]. Одним из важнейших объектов этой теории является симметрическая производная в среднем случайного процесса называемая еще текущей скоростью этого процесса. В дальнейшем, краткости ради, именно эту производную будем называть *производной Нельсона – Гликлиха,* причем обозначение этой производной возьмем из [9]. Например, производную Нельсона – Гликлиха винеровского процесса $\omega(t)$ мы будем обозначать символом $D_S\omega(t) = \overset{\circ}{\omega}(t)$.

Перечислим преимущества такой замены. Во-первых, производная Нельсона – Гликлиха в случае детерминированного (т. е. неслучайного) гладкого процесса совпадает с «обычной» производной точно так же, как обобщенная производная совпадает с «обычной» производной гладкой функции. Во-вторых, производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса $\overset{\circ}{\omega}(t)$ посчитана и имеет следующий вид: $\overset{\circ}{\omega}(t) = (2t)^{-1}\omega(t)$. Именно этот случайный процесс мы называем «белым шумом» («БШ»), обращая внимание на кавычки. Как и обобщенная производная винеровского процесса, наш «БШ» в силу (W2) имеет нулевое математическое ожидание. Наконец, в-третьих, если винеровский процесс $\omega(t)$ моделирует смещение частицы в броуновском движении, то согласно теории Эйнштейна – Смолуховского его выборочные траектории п.н. эквивалентны $\sqrt{t}$. Отсюда $\overset{\circ}{\omega}(t)$ п.н. эквивалентно $(2\sqrt{t})^{-1}$, что просто-таки совпадает с «обычной» производной броуновского движения.

И хотя исследования белого «БШ» еще только начинаются [9, 12] и далеки от завершения, в данной статье мы делаем следующий шаг – вводим в обиход *пространства «шумов»*, которые состоят из случайных процессов, имеющих производные Нельсона – Гликлиха определенного порядка. Данное нововведение позволит рассматривать все «шумы» (включая «БШ») с единой точки зрения. Определение пространств «шумов» мы приводим в первой части статьи, а также устанавливаем их непустоту. Во второй части статьи мы рассматриваем математическую модель ИУ, причем как детерминистскую, так и стохастическую. В третьей части мы разместим пример ИУ, имеющий реальный прототип [13]. Здесь же обсуждается понятие динамического измерения. В заключение для полноты картины отметим перенос подхода Ито – Стратоновича – Скорохода на уравнения соболевского типа [14, 15].

1. Пространства шумов

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, P)$ – полное вероятностное пространство, $\mathbb{R}^n$ – конечномерное векторное пространство, наделенное борелевской σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ назовем *случайной величиной,* множество случайных величин обозначим символом $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. В этом множестве выделим пространство $L_2 \equiv L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) = \left\{\xi \in \mathcal{V}: \int\limits_{\Omega} \|\xi(\omega)\|^2 dP(\omega) < +\infty\right\}$, где через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Пространство L_2 заведомо непусто, так как содержит гауссовы случайные величины. Пусть далее $\mathcal{A}_0$ – некоторая σ-алгебра на Ω, причем $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$; обозначим через $\Omega_0 \equiv (\Omega, \mathcal{A}_0, P)$ соответствующее полное вероятностное пространство. Подпространство $L_2^0 \equiv L_2^0(\Omega_0; \mathbb{R}^n)$ замкнуто в L_2, обозначим через $\Pi: L_2 \to L_2^0$ ортопроектор.

Определение 1. Пусть $\xi \in L_2$. Случайная величина $\Pi\xi \in L_2^0$ называется *условным математическим ожиданием* ξ *относительно* $\mathcal{A}_0$ и обозначается $E(\xi|\mathcal{A}_0)$.

Из определения 1 непосредственно вытекает, что $E(\xi|\mathcal{A}) = \xi$ и $E(\xi|\mathcal{A}_0) = E(\xi)$, если $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Пусть $\mathcal{I}_\varepsilon^\tau \subset \mathbb{R}$ – некоторый промежуток, $-\infty \le \varepsilon < \tau \le +\infty$. Рассмотрим следующие отображения: $f: \mathcal{I}_\varepsilon^\tau \to \mathcal{V}$, которое каждому $t \in \mathcal{I}_\varepsilon^\tau$ ставит в соответствие $\xi \in \mathcal{V}$ и $g: \mathcal{V} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие $\xi(\omega) \in \mathbb{R}^n$. *Случайным процессом* мы называем отображение $\eta: \mathcal{I}_\varepsilon^\tau \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega)) = g(f(t), \omega)$. Таким образом, при каждом фиксированном $t \in \mathcal{I}_\varepsilon^\tau$ случайный процесс $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т.е. $\eta(t, \cdot) \in \mathcal{V}$, а при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ случайный процесс $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется (*выборочной*) *траекторией*. Множество случайных процессов мы обозначим символом $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{I}_\varepsilon^\tau \times \Omega; \mathbb{R}^n)$.

С каждой случайной величиной $\xi \in \mathcal{V}$ мы связываем σ-алгебру $\mathcal{A}^\xi \subset \mathcal{A}$, т.е. минимальную σ-подалгебру $\mathcal{A}$, относительно которой ξ измерима. $\mathcal{A}^\xi$ называется *σ-алгеброй, порожденной* ξ. Эквивалентное определение $\mathcal{A}^\xi$ – это минимальная σ-алгебра, содержащая прообразы всех борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi: \Omega \to \mathbb{R}^n$. С каждым случайным процессом $\xi \in \mathcal{P}$ мы связываем три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$:

– *прошлое* $\mathcal{B}_t^\eta$, порожденное случайными величинами $\eta(s, \cdot)$ при всех $\varepsilon \le s < t$;

– *будущее* $\mathcal{F}_t^\eta$, порожденное случайными величинами $\eta(s, \cdot)$ при всех $t < s \le \tau$;

– *настоящее* $\mathcal{N}_t^\eta$, порожденное случайной величиной $\eta(t, \cdot)$.

Все σ-алгебры считаем полными, т.е. содержащими множества вероятности нуль.

Напомним, что случайный процесс $\eta \in \mathcal{V}$ называется *случайным процессом с п.н. непрерывными траекториями,* если для почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$ траектории $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ непрерывны на $\mathcal{I}_\varepsilon^\tau$. Во множестве $\mathcal{V}$ выделим пространство CL_2 случайных процессов, чьи траектории п.н. непрерывны на $[\varepsilon, \tau]$, а случайные величины $\eta(t, \cdot) \in L_2$ при всех $t \in [\varepsilon, \tau]$. Заметим, что если $\varepsilon, \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$, то пространство CL_2 содержит винеровский процесс. Переобозначим еще краткости ради $E_t^\eta = E\left(\eta \middle| \mathcal{N}_t^\eta\right)$.

Определение 2. Пусть $\eta \in CL_2$, *производной в среднем справа* $D\eta(t, \cdot)$ *(слева* $D_*\eta(t, \cdot)$*) случайного процессаη в точке* $t \in (\varepsilon, \tau)$ называется случайная величина

$$D\eta(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \to 0+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t + \Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\Delta t}\right)$$

$$\left(D_*\eta(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \to 0-} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t - \Delta t, \cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}^n$. Случайный процесс η называется *дифференцируемым в среднем справа (слева) на* (ε, τ), если в каждой точке $t \in (\varepsilon, \tau)$ существует производная в среднем справа (слева).

Итак, пусть случайный процесс $\eta \in CL_2$ дифференцируем в среднем справа (слева) на (ε, τ). Его производная в среднем справа (слева) тоже будет случайным процессом, который мы обозначим символом $D\eta$ $(D_*\eta)$. Если случайный процесс $\eta \in CL_2$ дифференцируем в среднем как справа, так и слева на (ε, τ), то можно определить *симметрическую (антисимметрическую) производную в среднем* $D_S\eta = \frac{1}{2}(D + D_*)\eta\left(D_A\eta = \frac{1}{2}(D_* - D)\eta\right)$. В дальнейшем, краткости ради,симметрическую производную в среднем D_S случайного процесса будем называть *производной Нельсона – Гликлиха* и обозначать $\overset{\circ}{\eta}$, т.е. $D_S\eta \equiv \overset{\circ}{\eta}$. Через $\overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}$ обозначим k-тую производную Нельсона – Гликлиха случайного процесса η, $k = 2,3,\ldots$. Отметим, что если траектории случайного процесса η п.н. непрерывно дифференцируемы в «обычном смысле» на (ε, τ), то их производная Нельсона – Гликлиха совпадает с «обычной» производной. Так, например, обстоит дело со случайным процессом $\eta = \alpha \sin(\beta t)$, где α – гауссова случайная величина, $\beta \in \mathbb{R}_+$ – некоторая фиксированная константа, а $t \in \mathbb{R}$ имеет физический смысл времени. Введем в рассмотрение пространства $C^k L_2$, $k \in \mathbb{N}$, случайных процессов из CL_2, чьи траектории п.н. непрерывно дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на (ε, τ) до порядка k включительно.

Теорема 1 (Ю.Е. Гликлих). Пусть ω – винеровский процесс, тогда $\overset{\circ}{\omega}{}^{(k)}(t) = (-1)^{k+1}(2t)^{-k}\omega(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}$.

Здесь $\overset{\circ}{\omega}{}^{(1)}(t) = \overset{\circ}{\omega}$. Из теоремы 1 немедленно вытекает, что «БШ» $\overset{\circ}{\omega} \in C^1 L_2$, если $\varepsilon, \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$. Именно поэтому мы предлагаем впредь пространства $C^k L_2$, $k \in \mathbb{N}$, именовать *пространствами «шумов»*. Заметим еще, что «черный шум» (т. е. «абсолютная» тишина) – случайный процесс, чьи траектории п.н. совпадают с точкой нуль, – тоже лежит в $C^k L_2$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и любом $[\varepsilon, \tau]$.

2. Математическая модель ИУ

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n. Согласно [8, гл. 12] пучок $\mu L - M$ будем называть *регулярным,* если $\det(\alpha L - M) \neq 0$ при некотором $\alpha \in \mathbb{C}$. Если пучок $\mu L - M$ регулярен, то L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M будет в точке ∞ иметь либо устранимую особую точку, либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$. Считая устранимую особую точку полюсом порядка нуль, назовем регулярный пучок $\mu L - M$ p-регулярным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Итак пусть пучок $\mu L - M$ p-регулярен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим уравнения леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y, \tag{5}$$

где $y = y(t)$ некоторая вектор-функция, которая в дальнейшем будет определена. Вектор-функцию $x = x(t)$ назовем *решением системы (5),* если она удовлетворяет этой системе. Решение $x = x(t)$ системы (5) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0 \tag{6}$$

для системы (5) (или просто – *решением задачи (5), (6)*), если оно удовлетворяет (5), (6). Заметим, что задача (6) для системы (5) в случае $\det L = 0$ предпочтительнее, нежели задача Коши $x(0) = x_0$ [13]. (В случае $\det L \neq 0$ обе эти задачи совпадают). Подробности см. в [16].

Если пучок $\mu L - M$ p-регулярен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)d\mu, \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)d\mu, \tag{7}$$

где $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – *правая*, а $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – *левая L-резольвенты* матрицы M. Замкнутый контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую все корни многочлена $\det(\mu L - M) = 0$.

Лемма 1. *Пусть пучок* $\mu L - M$ *p-регулярен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *тогда* $\dim\ker P = \dim\ker Q$, $LP = QL$, $MP = QM$.

Ввиду p-регулярности пучка $\mu L - M$ можно, не теряя общности, считать $\det M \neq 0$. (Действительно, сделав в (5) замену $z(t) = x(t)^{\alpha t}$, где α не является корнем многочлена $\det(\mu L - M)=0$, придем к системе вида (5), причем в правой части будет матрица $M' = M - \alpha L$. Очевидно, $\det M' \neq 0$.)

Построим матрицу $(\mathbb{I}_n - P)M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q)L(\mathbb{I}_n - P) \equiv H$.

Лемма 2. *Пусть пучок* $\mu L - M$ *p-регулярен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, *тогда матрица H нильпотентна степени не выше* p.

Лемма 3. *Пусть пучок* $\mu L - M$ *p-регулярен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, *тогда существует квадратная матрица* Λ *порядка n, такая, что* $\Lambda QL = LP\Lambda = diag\{\mathbb{O}_m, \mathbb{I}_l\}$ *с точностью до перестановки строчек и столбцов, где* $m = \dim\ker P$, $l = n - m$.

Замечание 1. Как следует из лемм 1–3, в случае 0-регулярности пучка $\mu L - M$ $\ker P = \ker L$.

Наконец,

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{8}$$

где контур γ такой же как в (7). Как нетрудно видеть, семейство $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ образует группу, причем ее единица $e^{tS}|_{t=0} = P$.

Теорема 2. *Пусть пучок* $\mu L - M$ *p-регулярен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, $y \in C^\infty([0,\tau);\mathbb{R}^n)$. *Тогда для любого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует единственное решение* $x \in C^\infty([0,\tau);\mathbb{R}^n)$, *которое к тому же имеет вид*

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q)y^{(k)}(t) + U^t x_0 + \int_0^t U^{t-s}\Lambda Q y(s)ds.$$

Теперь рассмотрим стохастическую модель ИУ, в качестве которой выступит стохастическая система уравнений леонтьевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + \omega, \tag{9}$$

где матрицы L и M такие же как выше. Случайный процесс $\eta \in C^1 L_2$ мы назовем *решением* (9), если на (ε,τ) он удовлетворяет (9) (в смысле Нельсона – Гликлиха). Решение $\eta = \eta(t)$ системы (9) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(\eta(\varepsilon) - \xi) = 0, \tag{10}$$

если он вдобавок удовлетворяет (10) при некоторой случайной величине $\xi \in L_2$.

Теорема 3. *Пусть пучок* $\mu L - M$ *p-регулярен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$. *Тогда для любого* $\omega \in C^{p+1}L_2$ *и любой независимой от* ω $\xi \in L_2$ *существует единственное решение задачи (9), (10), которое к тому же имеет вид*

$$\eta(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q)\overset{\circ}{\omega}{}^{(k)}(t) + U^{t-\varepsilon}\xi + \int_\varepsilon^t U^{t-s}\Lambda Q\omega(s)ds.$$

Здесь матрицы Q, U^t, Λ имеют тот же смысл, что и в теореме 2. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 и поэтому опускается. Рассмотрим еще один полезный в дальнейшем результат.

Следствие 1. *Пусть пучок* $\mu L - M$ *0-регулярен,* $\det M \neq 0$. *Тогда для любого* $\omega \in C^1 L_2$ *и любой независимой от* ω $\xi \in L_2$ *существует единственное решение задачи*

$$L(\eta(\varepsilon) - \xi) = 0 \tag{11}$$

для системы (9), которое к тому же имеет вид

$$\eta(t) = -M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q)\omega(t) + U^{t-\varepsilon}\xi + \int_\varepsilon^t U^{t-s}\Lambda Q\omega(s)ds.$$

3. Пример ИУ

В качестве примера возьмем уже неоднократно опробованную [7, 13] математическую модель ИУ, где $n = 3$, матрицы $L = diag\{1,1,0\}$,

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & m_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu L - M = \begin{pmatrix} \mu - m_1 & 0 & 0 \\ -m_2 & \mu - m_3 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы считаем, что $m_1 m_3 \neq 0$, тем самым условие $\det M \neq 0$ выполняется само собой. Кроме того, простоты ради, считаем $m_1 \neq m_3$. Из этих условий находим L-спектр $\sigma^L(M) = \{m_1, m_3\}$ матрицы M и заключаем, что пучок $\mu L - M$ 0-регулярен. Находим L-резольвенту матрицы M

$$(\mu L - M)^{-1} = \Delta_\mu^{-1}\begin{pmatrix} \mu - m_3 & 0 & 0 \\ m_2 & \mu - m_1 & 0 \\ -c_1(\mu - m_3) + c_2 m_2 & c_2(\mu - m_3) & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta_\mu = \det(\mu L - M) = (\mu - m_1)(\mu - m_3)$. Отсюда сразу вытекает, что

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 & 0 \\ -m_2 m_1^{-1} m_3^{-1} & m_3^{-1} & 0 \\ -c_1 m_1^{-1} - c_2 m_2 m_1^{-1} m_3^{-1} & c_2 m_1^{-1} & -1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (7), где контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую точки m_1 и m_3, находим проекторы

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $LP = QL$, то можно положить $\Lambda = L$ (или $\Lambda = Q$, если угодно!) Затем по формуле (8) построим

$$U^t = \begin{pmatrix} e^{m_1 t} & 0 & 0 \\ \frac{m_2}{m_1 - m_3}(e^{m_1 t} - e^{m_3 t}) & e^{m_3 t} & 0 \\ \frac{c_2 m_2}{m_1 - m_3}(e^{m_1 t} - e^{m_3 t}) + c_2 e^{m_1 t} & c_2 e^{m_1 t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Как нетрудно проверить, семейство $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ является группой, причем проектор P – единица этой группы, т.е. $P = U^0$.

Наконец, в качестве правой части в (9) возьмем «шум» $\omega(t) = col(\alpha \sin(\beta t), 0{,}0)$, где α – случайная величина, распределенная по нормальному закону, моделирует амплитуду входного импульса, а $\beta \in \mathbb{R}_+$ – его частоту. Исходя из рассуждений (3), (4) и вида матриц L и M, выходной сигнал, т. е. *динамическое измерение* входного сигнала ω, будет иметь вид

$$x_3(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad (12)$$

где

$$x_1(t) = e^{m_1(t-\varepsilon)}\xi_1 + \alpha \int_\varepsilon^t e^{m_1(t-s)} \sin(\beta s) ds, \quad (13)$$

и

$$x_2(t) = e^{m_3(t-\varepsilon)}\xi_2 + \frac{m_2}{m_1 - m_3}\left(e^{m_1(t-\varepsilon)} - e^{m_3(t-\varepsilon)}\right)\xi_1 + \\ + \frac{\alpha m_2}{m_1 - m_3}\int_\varepsilon^t \left(e^{m_1(t-s)} - e^{m_3(t-s)}\right) sin(\beta s) ds \quad (14)$$

моделирует состояние ИУ. Понятно, что в (12) в силу инженерного смысла должно быть $|c_1| + |c_2| \neq 0$ (иначе выходного сигнала мы не получим!) Формулы (12)–(14) получены из формулы решения задачи (9), (11) в следствии 1 и в совокупности дают точное решение этой задачи с теми матрицами L и M, что описаны выше, а также случайным процессом ω и некоей случайной величиной $\xi \in L_2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, причем ξ_1 и ξ_2 независимы от α. Случайная величина ξ_3 нас не интересует, поскольку обнуляется в силу условия (11). Интегрируя (13), (14) и подставляя в (12), окончательно получим

$$x_3(t) = \left(\left(c_1 + \frac{c_2 m_2}{m_1 - m_3}\right)e^{m_1(t-\varepsilon)} - \frac{c_2 m_2}{m_1 - m_3}e^{m_3(t-\varepsilon)}\right)\xi_1 + c_2 e^{m_3(t-\varepsilon)}\xi_2 + \\ + \frac{\alpha}{m_1^2 + \beta^2}\left(c_1 + \frac{c_2 m_2}{m_1 - m_3}\right)(m_1 \sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t))\left(e^{m_1(t-\varepsilon)} - 1\right) - \\ - \frac{\alpha}{m_3^2 + \beta^2}\left(\frac{c_2 m_2}{m_1 - m_3}\right)(m_3 \sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t))\left(e^{m_3(t-\varepsilon)} - 1\right). \quad (15)$$

Полученный результат оформим в виде следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $m_1 \neq m_3$, $m_1 m_3 \neq 0$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$, *тогда в модели ИУ (9), (11) точное динамическое измерение на* $[\varepsilon, \tau]$ *«шума»* $\omega(t) = col(\alpha\, sin(\beta t), 0{,}0)$ *при случайных начальных данных* ξ_1 *и* ξ_2, *независимых от* α, *будет иметь вид (15).*

Литература

1. *Arato, M. Linear Stohastic Systems with Constant Coefficients. A Statistica1 Approach / M. Arato. – Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1982.*

2. *Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.Y.: Springer, 2011.*

3. *Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992.*

4. *Kovacs, M. Introduction to stochastic partial differential equations / M. Kovacs, S. Larsson // Processing of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences", National Universities Commission. Abuja. Nigeria. October 8–12. 2007. Publications of the ICMCS. – 2008. – V. 4. – P. 159–232.*

5. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // Journal of Mathematical Sciences. – 2003.– V. 116, no 5. – P. 3620–3656.

6. Melnikova, I.V. Generalized solutions to abstract stochastic problems / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. Integ. Transf. and Special Funct. – 2009. – Vol. 20, no. 3–4. – P. 199–206.

7. Shestakov, A.L. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 8. – № 17 (234). – С. 70–75.

8. Gantmacher, F.R. The Theory of Matrices / F.R. Gantmacher. – AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society. 2000.

9. Shestakov, A.L. On Optimal Measurement of the «White Noise» / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27. – С. 99–108.

10. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Tokio: VSP, 2003.

11. Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.

12. Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27. – С. 24–34.

13. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

14. Замышляева, А.А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40. – С. 73–82.

15. Загребина, С.А. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2012. – Т. 19. Вып. 2. – С. 252–254.

16. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия «Математика». – 2010.– Т. 3, № 1. – С. 104–125.

Шестаков Александр Леонидович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), admin@susu.ac.ru

Свиридюк Георгий Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), sviridyuk@74.ru

Худяков Юрий Владимирович, аспирант кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), hudyakov74@gmail.com

Bulletin of the South Ural State University
Series “Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics”
2013, vol. 13, no. 2, pp. 4–11

DINAMIC MEASUREMENT IN SPACES OF “NOISE”

A.L. Shestakov, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, admin@susu.ac.ru*
G.A. Sviridyuk, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sviridyuk@74.ru*
Yu.V. Hudyakov, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, hudyakov74@gmail.com*

The new concept of the «white noise» was proposed by the authors, it is understood by the Nelson – Gliklikh's derivative of the Wiener process. This approach extends to other «noise», which together make up the space of «noise». Precise dynamic measurement «noise» produced in these spaces through a mathematical model of the measuring device provided by the equations of Leontief type. As an example, the measured «noise» having the form a pulse, the amplitude of which is the Gauss random variable. The results of measurements are precise.

Keywords: the Wiener process, the Nelson – Gliklikh's derivative, «white noise», dynamic measurement, space of «noise».

References

1. Arato M. *Linear Stohastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach.* Berlin;; Heidelberg; N.Y., Springer-Verlag, 1982.

2. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y., Springer, 2011.

3. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

4. Kovacs M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. *Processing of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission. Abuja. Nigeria. October 8–12. 2007. Publications of the ICMCS.* 2008, vol. 4, pp. 159–232.

5. Melnikova I.V, Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2003, vol. 116, no 5, pp. 3620–3656.

6. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Generalized Solutions to Abstract Stochastic Problems. *J. Integ. Transf. and Special Funct*. 2009, vol. 20, no. 3–4, pp. 199–206.

7. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*. 2011, no. 17 (234), pp. 70–75.

8. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices*. AMS Chelsea Publishing, Reprinted by American Mathematical Society. 2000.

9. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On Optimal Measurement of the «White Noise». *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*. 2012, no. 27, pp. 99–108.

10. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston; Tokio, VSP, 2003.

11. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton, Princeton University Press, 1967.

12. Gliklih Yu.E. The Study of Equations of Leontief type with White Noise Methods Derived an Average of Random Processes [Izuchenie uravnenij leont'evskogo tipa s belym shumom metodami proizvodnyh v srednem sluchajnyh processov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*. 2012, no. 27, pp. 24–34.

13. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal measurement problem [Chislennoe reshenie zadachi optimal'nogo izmerenija]. *Automation and Remote Control*. 2012, no. 1, pp. 107–115.

14. Zamyshlyaeva A.A. Stochastic Partial Linear Equations of Sobolev type of High Order with Additive White Noise [Stohasticheskie nepolnye linejnye uravnenija sobolevskogo tipa vysokogo porjadka s additivnym belym shumom]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*. 2012, no. 40, pp. 73–82.

15. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. Equation of Barenblatt-Zheltova-Kochina with White Noise [Uravnenie Barenblatta-Zheltova-Kochinoj s belym shumom]. *Obozrenie priklad. i prom. matematiki*. 2012, vol. 19, issue 2, pp. 252–254.

16. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter-Sidorov problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations [Zadacha Shouoltera-Sidorova kak fenomen uravnenij sobolevskogo tipa]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya Matematika*. 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125.

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.