

## 3D-МОДЕЛЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СОФОКУСНЫХ И ПСЕВДОСОФОКУСНЫХ КВАДРИК

А.Л. Хейфец

Рассмотрено решение задачи о взаимном пересечении квадрик, совмещенных в точках фокуса или в точках фокуса их сечений. Это квадрики, образованные вращением: эллипсоид, гиперboloид, параболоид. Исследованы все сочетания таких квадрик. Показано, что пересечение происходит по одной или двум коникам. Исследованы особенности пространственного положения линий пересечения таких квадрик.

Показано, что при совмещении рассмотренных квадрик и необходимом сочетании параметров взаимного положения могут возникать внешние общие касательные квадрики: эллиптический конус или параболический цилиндр. Кроме этого может возникать общая внутренняя касательная сфера.

Исследования выполнены методами 3d компьютерного геометрического моделирования в пакете AutoCAD. Приведены примеры и алгоритмы построения касательных квадрик. Изучена взаимосвязь исследуемой задачи с известной теоремой Монжа.

*Ключевые слова:* квадрики, компьютерное моделирование, геометрическое моделирование, начертательная геометрия, Г. Монж, 3d-технологии, AutoCAD.

### Введение

Задаче пересечения эллипсоидов вращения с общим фокусом уделил внимание еще Г. Монж [1, с. 128]. Там же [1, с. 280] приведено аналитическое решение, поясняющее, что пересечение происходит по эллипсу. Проективные аспекты этой задачи даны в работе [2].

Интерес к задаче вновь возник в связи с развитием современных компьютерных 3d-методов теоретического анализа в задачах геометрического моделирования. Стало возможным создавать модели сложных объектов и исследовать их без проекционных построений, характерных для начертательной геометрии.

В работе [3] с применением 3d-методов показано, что при пересечении софокусных эллипсоидов возникают внешние касательные квадрики – конусы, названные конусами Монжа. Введен термин «псевдософокусные» эллипсоиды, как совмещенные по точкам фокусов сечений, полученных единой плоскостью, параллельной плоскости больших осей. Показано, что и в этом случае в пересечении образуются два эллипса и могут быть найдены один или два касательных конуса Монжа.

Несмотря на значительный объем публикаций по частным случаям пересечения квадрик, в том числе в учебной литературе [4], образование конуса как общей внешней касательной квадрики ранее не известно и не исследовано.

### 1. Цель работы

Исследовать пересечение всех квадрик, имеющих точку фокуса, при их софокусном и псевдософокусном совмещении и сформулировать алгоритм построения конуса, а в общем случае, квадрики Монжа.

Точку фокуса имеют квадрики вращения: вытянутый эллипсоид (Э), параболоид (П) и двуполостный гиперboloид (Г). В дополнение к варианту Э+Э [3] в настоящей работе рассмотрены варианты Э+П, Э+Г, П+П, П+Г, Г+Г, каждый из них как софокусный и псевдософокусный.

### 2. Методика исследования

Исследования выполняли на 3d-моделях в пакете AutoCAD 2010...12, как наиболее адаптированном к задачам теоретического анализа. 3d-модели квадрик строили как solids-объекты вращением коник вокруг их осей. Эллипс получали как объект AutoCAD'a. Гиперболу и параболу – как сечения кругового конуса.

Конические поверхности, образующиеся при пересечении исследуемых квадрик и построении их плоских сечений, представляли собой, как правило, «плоские» сплайны. При некоторых сочетаниях параметров модели в сечениях возникали «неплоские» сплайны с депланацией, не превышающей  $10^{-4}$ . Неплоские сплайны предварительно конвертировали в плоские «выходом в пространство» [5]. Построение точек фокуса и директрис сплайн-коник, построение касательных, определение типа коники и оценку их точности выполняли по методике [3, 6]. Общие касательные к коникам строили методом итераций.

### 3. Софокусное пересечение. Конус Монжа

Свойства софокусного пересечения рассмотрим на характерном примере пересечения эллипсоида и гиперболоида (рис. 1). Для очерковых коник: эллипса  $e$  и гиперболы  $h$  (рис. 1, а) определяем точки фокуса  $F_e, F_h$  и директрисы  $d_e, d_h$ . Строим квадрики вращения. Совмещаем их в точках фокуса и получаем линию пересечения – сплайн  $e^*$  (рис. 1, б, ж).

Исследование сплайна, образующегося в пересечении, показывает, что это коника, в данном примере – эллипс. Погрешность построения сплайн-кривой, вносимая AutoCAD'ом, не превышает от  $10^{-3}$ . В данном примере она определялась по отклонению сплайна от объекта *Ellipse*.

Особенность софокусного пересечения, отмеченная для эллипсоидов в работах [2, 3], подтверждается и для других квадрик. Она состоит в том, что плоскость линии пересечения проходит через точку  $K$  пересечения директрис очерковых коник и прямую  $k$  пересечения директориальных плоскостей квадрик, причем,  $K \subset k$ . В данном примере (рис. 1, б, ж) плоскость эллипса  $e^*$  проходит через точку  $K$  пересечения директрис  $d_e$  и  $d_h$ .

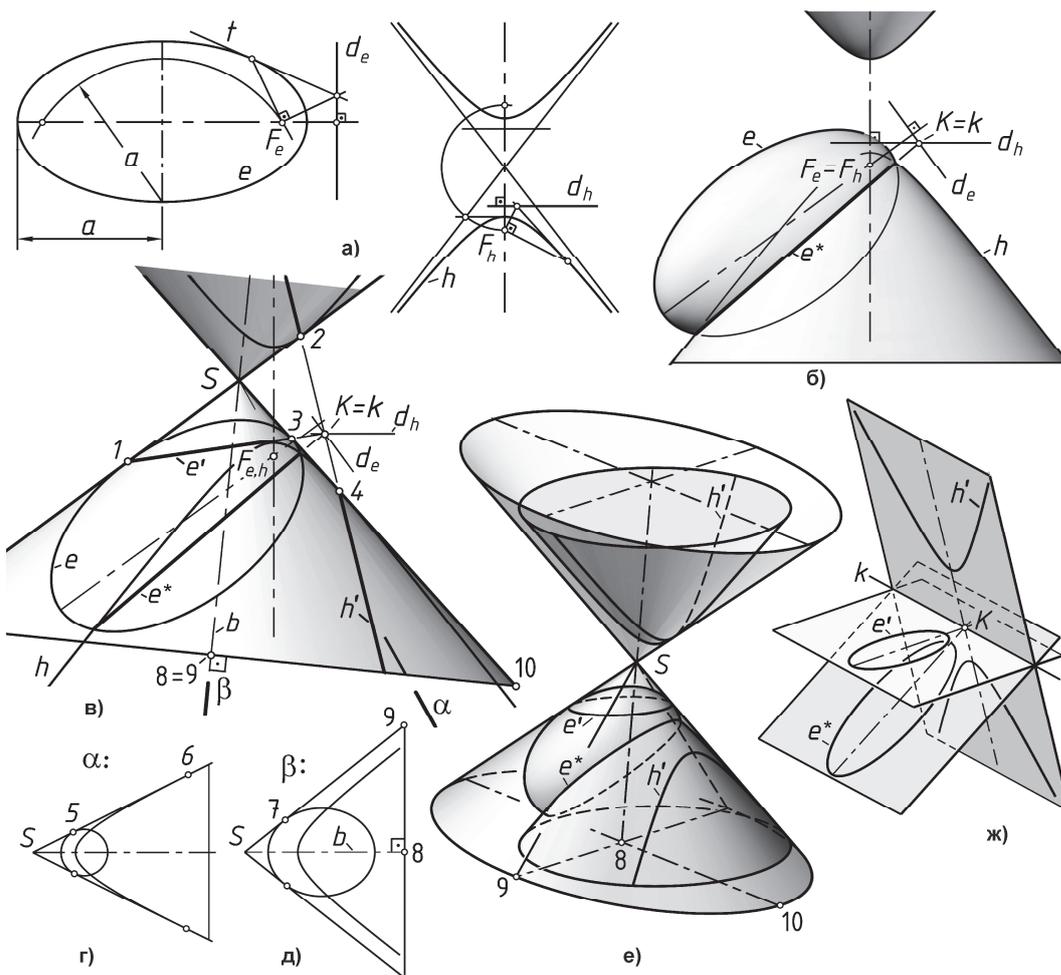


Рис. 1. Пересечение софокусных эллипсоида и гиперболоида:  
 а – метрики очерковых коник, б – пересечение квадрик; в–е – построение конуса Монжа;  
 ж – пересечение плоскостей коник

Для построения конуса Монжа находим общие касательные (1–2) и (3–4) к очерковым коникам  $e, h$ . Принимаем касательные за образующие конуса, имеющего вершину в точке их пересечения  $S$ . Для существования конуса, касательного к двум квадрикам, необходимо наличие минимум еще одной образующей как общей касательной к квадрикам [4]. Вводя плоскость  $\alpha$ , проверяем существование такой касательной. Ее находим в одном из сечений квадрик некоторой плоскостью  $\alpha$  (рис. 1,  $\epsilon$ ). В сечении образовались эллипс и гипербола (рис. 1,  $\epsilon$ ). Общая касательная к ним из вершины  $S$  проходит через точки 5, 6.

Строим биссектрису  $b$  угла при вершине  $S$  и задаем биссекторную плоскость  $\beta$  (рис. 1,  $\epsilon, \delta$ ). В сечении квадрик этой плоскостью находим касательную ( $S$ -7). На биссектрисе  $b$  задаем точку 8, находим точку 9. По точкам 8, 9, 10 как центру и конечным точкам осей эллипса основания и вершине  $S$  строим эллиптический конус (рис. 1,  $\epsilon$ ).

Линиями касания найденного конуса и квадрик являются эллипс  $e'$  и гипербола  $h'$ , полученные как сечения квадрик плоскостями, проходящими через точки касания 1,3 и 2,4 и перпендикулярными плоскости ( $S, 8, 10$ ). В каждом сечении образуются две сплайн-коники – от конуса и одной из квадрик. Расхождение этих кривых характеризует погрешность выполненных построений. В рассмотренном примере она не превышает  $10^{-3}$ .

Плоскости линий касания  $e', h'$ , как и плоскость линии пересечения  $e^*$ , проходят через прямую  $k$  (рис. 1,  $\delta, \text{ж}$ ).

#### 4. Псевдософокусное пересечение

Рассмотрим пересечение тех же квадрик (рис. 2), заданных очерковыми кониками  $e, h$ , как характерный пример псевдософокусного пересечения. Рассекаем квадрики единой плоскостью, параллельной плоскости пересечения осей квадрик и отстоящей от нее на величину  $\delta$ . В сечении получаем коники  $e^\circ, h^\circ$ . Находим их точки фокуса  $F_{e^\circ}, F_{h^\circ}$  и директрисы  $d_{e^\circ}, d_{h^\circ}$ .

Квадрики совмещаем в точках фокуса сечений  $F_{e^\circ}$  и  $F_{h^\circ}$  (рис. 3,  $a$ ). В пересечении образуются эллипсы  $e^*$  и  $e^{**}$ . Их плоскости (рис. 3,  $b$ ), так же как для софокусных квадрик, пересекаются по прямой  $k$  ( $K', K''$ ), по которой пересекаются директориальные плоскости коник сечения, образованные вращением  $d_{e^\circ}, d_{h^\circ}$  вокруг осей коник.

Для построения конусов Монжа находим общие касательные к очерковым коникам (рис. 3,  $\epsilon, \delta$ ). Определяем возможность создания конусов Монжа для каждого парного сочетания касательных. Конус возможен, если для пары касательных, рассматриваемых как очерк конуса, существует хотя бы еще одна общая, третья касательная к квадрикам, построенная из точки пересечения этой пары.

В рассматриваемом примере существуют четыре общие очерковые касательные: (1–2), (3–4), (5–6) и (7–8), из которых можно составить шесть парных сочетаний. Третья касательная найдена только в двух из них. Это сочетание (1–2) и (5–6), приводящее к построению конуса с вершиной  $S_1$ , и сочетание (3–4)(7–8), дающее конус с вершиной  $S_2$ .

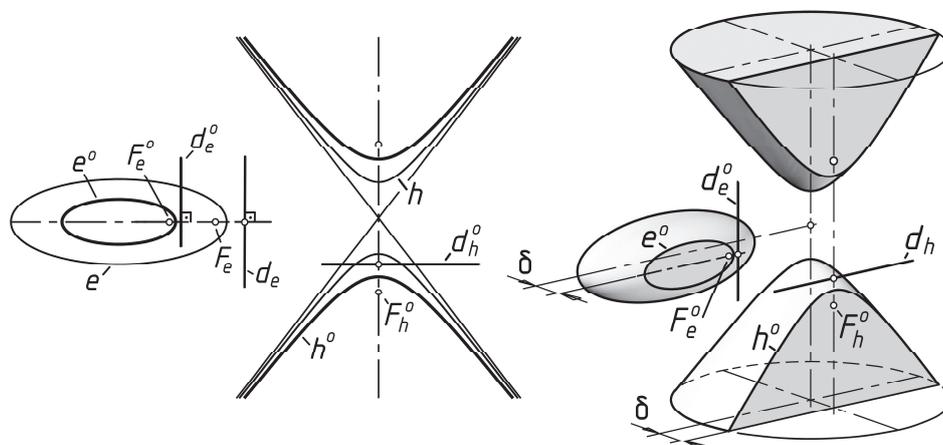


Рис. 2. Псевдософокусные сечения квадрик

Дальнейшее построение конусов Монжа и линий их касания выполняется так же, как в рассмотренном выше примере (см. рис. 1).

Находим линии касания конусов Монжа с исходными квадриками. Например, конус с вершиной  $S_1$  (рис. 3, д) касается квадрик по эллипсу  $e'$  и гиперболе  $h'$ . Поскольку исходные квадрики являются общими касательными для конусов Монжа, то конусы между собой пересекаются по двум коникам: эллипсу  $e_c$  и гиперболе  $h_c$  (рис. 3, е, ж).

В полученной модели (рис. 3) выявлены следующие коники:  $e^*$ ,  $e^{**}$  – пересечение квадрик;  $e'$ ,  $h'$  – касание конуса  $S_1$  с исходными квадриками;  $e''$ ,  $h''$  – касание конуса  $S_2$  (на рис. 3 не показано);  $e_c, h_c$  – взаимное пересечение конусов;  $c, c'$  – окружности как линии касания сферы (рис. 4, а). Все они проходят через точки  $K', K''$  (рис. 3, б), а их плоскости пересекаются по прямой  $k$  ( $K', K''$ ).

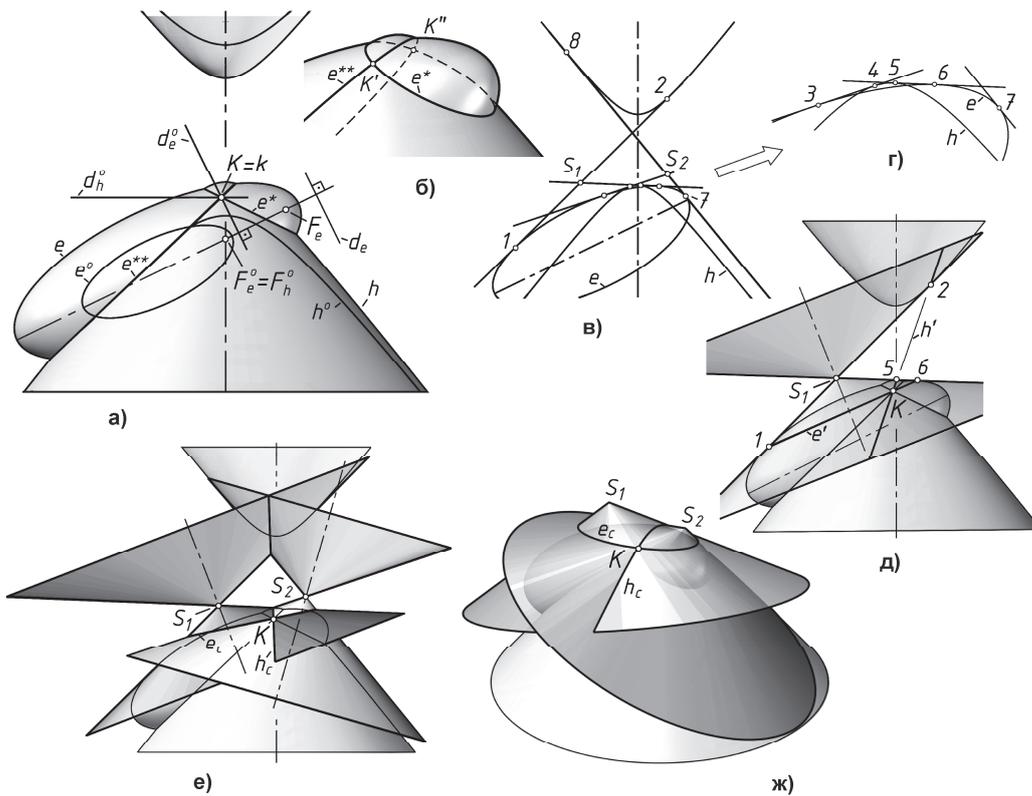


Рис. 3. Пересечение псевдософокусных эллипсоида и гиперboloида: а, б – пересечение квадрик; в, г – касательные; д – конус Монжа; е, ж – пересечение конусов Монжа

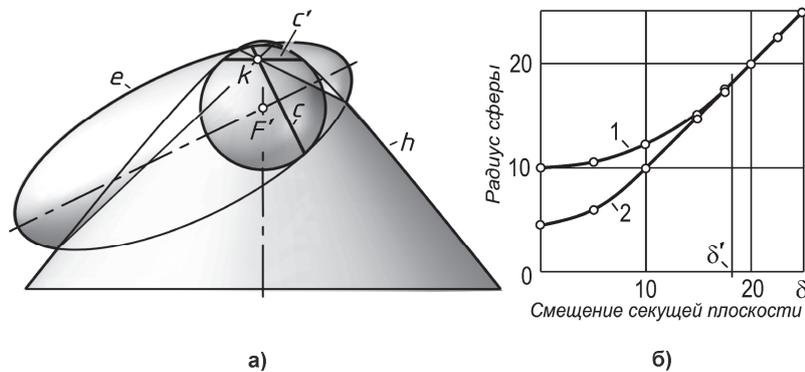


Рис. 4. Касательная сфера к псевдософокусным квадрикам

### 5. Внутренняя касательная сфера

Помимо внешних касательных квадрик в псевдософокусном пересечении может возникать общая внутренняя касательная сфера, как показано на примере эллипсоида и гиперboloида (рис. 4, а). Центр сферы  $F'$  находится на пересечении осей очерковых квадрик. Возникновение общей сферы и ее радиус зависит от смещения секущей плоскости  $\delta$  (см. рис. 2, б, рис. 4, б). При софокусном пересечении ( $\delta = 0$ ) и в интервале  $0 \leq \delta < \delta'$  радиусы касательных сфер для каждой из квадрик различны и общая касательная сфера отсутствует. Сфера возникает, если  $\delta \geq \delta'$ . Зависимости (рис. 4, б), полученные экспериментально для эллипсоида (кривая 1) и гиперboloида (кривая 2), являются характерными для всех сочетаний квадрик и их параметров.

### 6. Цилиндр Монжа

Во всех вариантах со- и псевдософокусного пересечения, кроме взаимного пересечения параболоидов, внешними квадриками являются конусы Монжа. При пересечении параболоидов образуется параболический цилиндр. Он может быть единственной внешней касательной квадрикой, либо одной из квадрик (рис. 5).

В примере (рис. 5, а) образовались два эллипса  $e^*$ ,  $e^{**}$ , плоскости которых проходят через прямую  $k$  ( $K', K''$ ) пересечения директориальных плоскостей параболоидов (рис. 5, б, в).

Найдены три касательные прямые к очерковым параболам, определяемые точками касания 1...6. Две из них,  $t_1$  (1–2),  $t_2$  (5–6), привели к построению конуса Монжа с вершиной в точке  $S$  (рис. 5, г). Алгоритм построения конуса прежний. Линиями касания конуса с параболоидами явились эллипсы  $e', e''$ .

Касательная  $t_3$  приводит к образованию цилиндра Монжа. Для его построения (рис. 5, д) строим проекцию параболоидов по направлению касательной  $t_3$  (3–4) на плоскость  $\gamma \perp t_3$ . Очерком проекции является парабола  $p_\gamma$ . Цилиндр создается перемещением (*Loft*) параболы  $p_\gamma$  вдоль прямой  $t_3$ . Линиями касания цилиндра с параболоидами являются параболы  $p', p''$ .

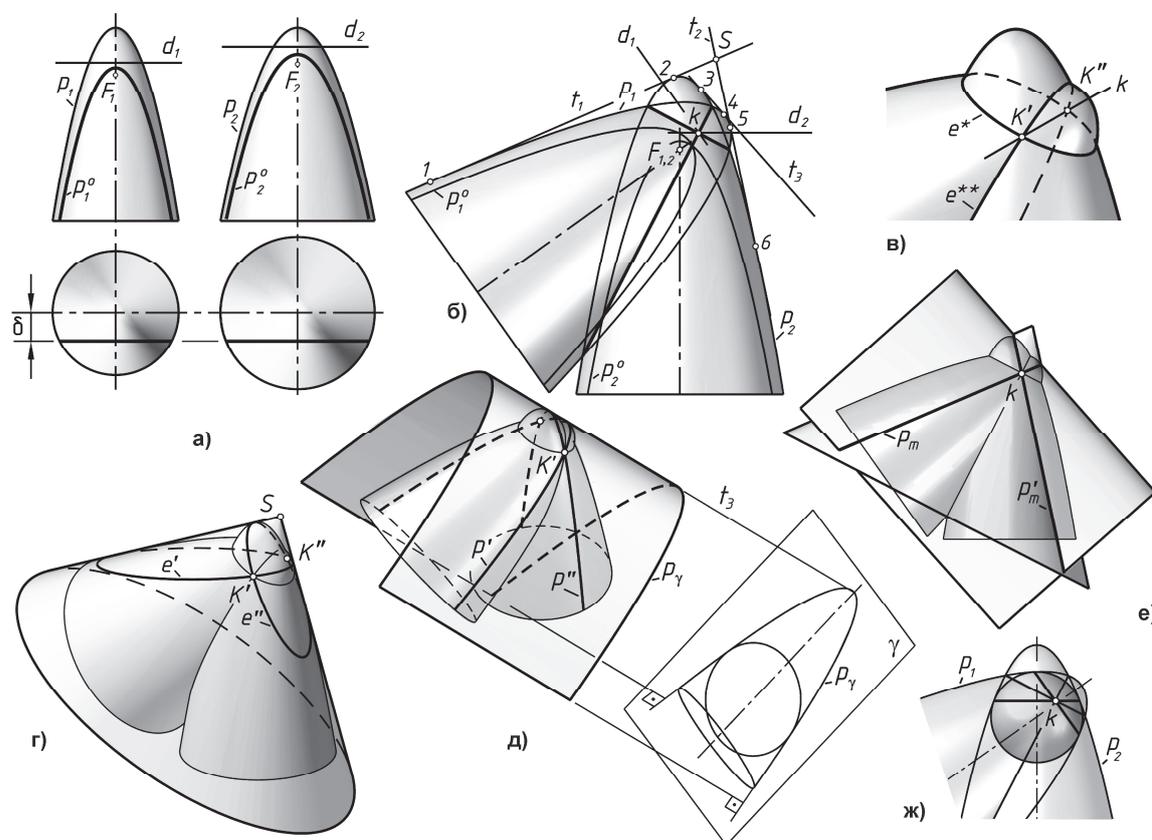


Рис. 5. Псевдософокусные параболоиды:  
 а – исходные объекты; б, в – пересечение; г – конус Монжа; д – цилиндр Монжа;  
 е – пересечение квадрик Монжа; ж – внутренняя сфера

Конус и цилиндр Монжа между собой пересекаются по параболам  $p_m, p_m'$  (рис. 5, *е*), поскольку исходные параболоиды являются по отношению к ним общими касательными квадриками.

Помимо внешних касательных квадрик в пересечении параболоидов возникла и внутренняя сфера (рис. 5, *ж*).

### 7. О связи с теоремой Монжа

Рассматривая алгоритм построения квадрик Монжа в обратной последовательности, можно убедиться, что *если две квадрики вращения, имеющие точки фокуса, касаются третьей квадрики, то первые две квадрики являются со- или псевдософокусными*. Это означает, что существует плоскость  $\Delta$ , сечениями рассматриваемых квадрик которой являются коники с совпадающими точками фокуса.

Рассмотрим пример нахождения плоскости  $\Delta$  (см. рис. 3, *а*, рис. 6). Выбираем очерковую конику одной из квадрик, например, конику  $e$ . Ищем конику  $e^\circ$  псевдософокусного сечения этой квадрики. Учитываем, что перпендикуляр, опущенный из точки  $K$  на ось коники  $e$ , является проекцией  $d'$  директрисы  $d_{e^\circ}$  коники  $e^\circ$ , а точка пересечения осей квадрик  $F'$  является проекцией точки фокуса  $F^\circ$ . Масштабируем конику  $e$  так, чтобы совместить ее фокус  $F$  и директрису  $d$  соответственно с точкой  $F'$  и отрезком  $d'$  – получаем  $e'$  как проекцию коники  $e^\circ$ . Из произвольной точки  $1' \in e'$  восстановим перпендикуляр к ее плоскости до пересечения с квадрикой. Плоскость, проходящая через точку 1 пересечения параллельно плоскости осей квадрик, является искомой  $\Delta$ . Для нее можно определить смещение  $\delta$ , найти  $e^\circ$  и фокус  $F^\circ$ .

В то же время со- или псевдософокусное пересечение не обязательно приводит к образованию касательных квадрик, как внешних, так и внутренних. Для внешних квадрик необходимо наличие общих касательных прямых к очерковым коникам. В зависимости от угла между осями квадрик общие касательные, следовательно, и внешние касательные квадрики, могут отсутствовать. Независимо от этого, внутренние сферы при этом могут образовываться или отсутствовать. Например, софокусные гиперболоиды (рис. 7) пересеклись по эллипсу  $e$  и гиперболе  $h$  при отсутствии касательных квадрик.

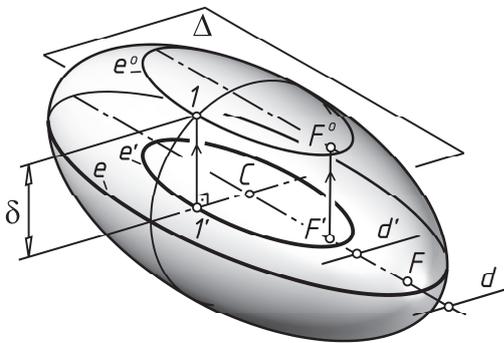


Рис. 6. Построение плоскости сечения

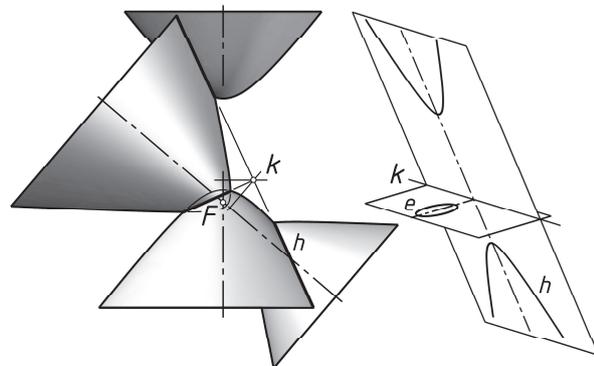


Рис. 7. Пересечение софокусных гиперболоидов без касательных квадрик

В связи с этим, со- и псевдософокусное пересечение является лишь необходимым (но не достаточным) условием образования касательных квадрик.

Дальнейшее исследование со- и псевдософокусного пересечения квадрик, установление качественных и количественных взаимосвязей параметров модели возможно на основе программной реализации полученных алгоритмов, например, на языке AutoLisp.

### Выводы

1. Со- и псевдософокусное пересечение квадрик происходит по одной или двум коникам, плоскости которых пересекаются по прямой  $k$  пересечения директоральных плоскостей софокусных сечений квадрик.

2. В со- или псевдософокусном пересечении квадрик могут образовываться одна или две внешние касательные квадрики и внутренняя касательная сфера, линии касания которых с квадриками и линии взаимного пересечения также проходят через прямую  $k$ .

#### Литература

1. Монж, Г. Начертательная геометрия / Г. Монж. – М.: Изд-во академии наук СССР, 1947. – 291 с.
2. Бударин, О.С. К вопросу об однофокусных кривых второго порядка / О.С. Бударин // Геометрические модели и алгоритмы: межвуз. сб. тр.; под ред. К.И. Валькова. – Л.: ЛИСИ, 1988. – С. 106–115.
3. Хейфец, А.Л. 3D-модель пересечения софокусных эллипсоидов / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации: межвуз. науч.-метод. сб. – Саратов: СГТУ, 2012. – С. 20–26.
4. Начертательная геометрия / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др. – М.: Высшая школа, 1963. – 420 с.
5. Хейфец, А.Л. 3D-модели линейчатых поверхностей с тремя прямолинейными направляющими / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2008. – Вып. 7. – № 25(125). – С. 51–56.
6. Хейфец, А.Л. 3D-моделирование линий пересечения поверхностей (AutoCAD) / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский, И.В. Буторина // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации: межвуз. науч.-метод. сб. – Саратов: СГТУ, 2004. – С. 127–133.

Хейфец Александр Львович, канд. техн. наук, профессор кафедры графики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), heifets@yandex.ru

**Bulletin of the South Ural State University**  
**Series “Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics”**  
**2013, vol. 13, no. 2, pp. 88–95**

## 3D-MODEL OF QUADRIC INTERSECTION WITH COMMON FOCUS POINTS

**A.L. Kheifets**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, heifets@yandex.ru

The solution of the problem of quadric intersection combined with focus points or focus points of their sections is considered in the article. Ellipsoid, hyperboloid and paraboloid are quadrics formed by the rotation. All combinations of such quadrics are studied. It is shown that there is intersection by one or two conics. Peculiar features of spatial position of the quadric intersection lines are analyzed.

It is shown that there are common periphery plane quadric such as elliptic cone or parabolic cylinder at adjustment of considered quadrics and necessary combination of parameters of a relative position. Moreover, common inner tangent sphere appears.

The analysis is performed by 3d computer geometric simulation methods with AutoCAD. The examples and algorithms for tangent quadric construction are given. The connection between the problem in question and well-known Monge theorem is studied.

*Keywords: quadric, computer simulation, geometric simulation, descriptive geometry, G. Monge, 3d-technologies, AutoCAD.*

**References**

1. Monzh G. *Nachertatel'naja geometrija* [Descriptive geometry]. Izd-vo akademii nauk SSSR, 1947, 291 p.
2. Budarin O.S. Second order curves with a common focal point [K voprosu ob odnofokusnyh krivyh vtorogo porjadka]. *Geometricheskie modeli i algoritmy: mezhvuzovskij sb. Trudov* [Geometric models and algorithms: an inter-University collection of works]. L. LISI, 1988, pp. 106–115.
3. Kheyfets A.L., Loginovsky A.N. 3D-model of the intersection of Ellipsoids with a common focal point [3D-model' peresechenija sofokusnyh jellipsoidov]. *Sovershenstvovanie podgotovki uchashhihsja i studentov v oblasti grafiki, konstruirovaniya i standartizacii: Mezhvuzovskij nauchno-metodicheskij sbornik. [Improving the training of pupils and students in the field of graphics, design and standardization: the interuniversity scientific-methodical collection]*. Saratov, SGTU, 2012, pp. 20–26.
4. Chetveruhin N.F., Levickij V.S., Prjanishnikova Z.I. *Nachertatel'naja geometrija* [Descriptive geometry]. Moscow, Vysshaja shkola, 1963. 420 p.
5. Kheyfets A.L., Loginovsky A.N. 3D-models of ruled surfaces with three rectilinear guides [3D-modeli linejchatyh poverhnostej s tremja prjamoli-nejnymi napravljajushhimi]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija "Stroitel'stvo i arhitektura"* [Herald of the South-Ural state University. A series of "Construction and architecture"]. Cheljabinsk, SUSU, 2008, vol. 7. № 25(125), pp. 51–56.
6. Kheyfets A.L., Loginovsky A.N., Butorina I.V. 3D-modeling lines crossing surfaces [3D-modelirovanie linij peresechenija poverhnostej (AutoCAD)] *Sovershenstvovanie podgotovki uchashhihsja i studentov v oblasti grafiki, konstruirovaniya i standartizacii. Mezhvuzovskij nauchno-metodicheskij sbornik. [Improving the training of pupils and students in the field of graphics, design and standardization: the interuniversity scientific-methodical collection]*. Saratov, SGTU, 2004, pp. 127–133.

*Поступила в редакцию 1 марта 2013 г.*