

ПРИМЕНЕНИЕ ВЗВЕШЕННОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕАКУСТИЧЕСКИХ РАСХОДОМЕРОВ

А.П. Лапин, А.М. Дружков

Широко известный метод наименьших квадратов имеет ряд ограничений для применения в регрессионных задачах при построении моделей измерительных преобразователей. Необходимо тщательное исследование предпосылок его применения. Часто трудновыполнимым ограничением является однородность дисперсий измеряемой величины на всем диапазоне измерения. В статье использован взвешенный метод наименьших квадратов при поиске модели функции преобразования вихреакустического расходомера. Проведено сравнение полученных результатов с методом наименьших квадратов. Отмечено, что взвешенный метод наименьших квадратов дает возможность обеспечить заданный класс точности в широком диапазоне измерений исследуемых вихреакустических расходомеров.

Ключевые слова: вихреакустические расходомеры, функция преобразования, взвешенный метод наименьших квадратов.

Введение

В задачах поиска математических моделей функций преобразования (ФП) измерительных преобразователей (сенсоров) физических величин традиционно используют квадратичский критерий близости, который реализуется через метод наименьших квадратов (МНК) [1]. При использовании данного метода необходимо соблюдать некоторые предпосылки его применения, одной из которых является однородность дисперсий измеряемой величины на всем диапазоне наблюдений [2]. Однако на практике при решении исследовательских задач часто наблюдается несоблюдение этого условия. В таких случаях задачу построения модели ФП можно решить путем применения взвешенного метода наименьших квадратов (ВМНК) [3].

1. Постановка задачи

Корректное применение МНК возможно при соблюдении ряда требований к априорным данным. Выполнение некоторых из них не представляет проблем для исследователя, но предпосылка в виде однородности дисперсий измеряемой величины (гомоскедастичность) [3] на практике может не выполняться. Примером служит задача поиска модели функции преобразования вихреакустических расходомеров с широким диапазоном измерения.

Рассмотрим особенности применения ВМНК и сравним результаты построения функции преобразования расходомеров двумя различными методами: ВМНК и МНК.

2. Особенности применения взвешенного метода наименьших квадратов

Если дисперсия выходного параметра зависит от величины входного фактора (гетероскедастичность) [3], то переход к гомоскедастичности можно осуществить преобразованием экспериментальных данных, в чем и заключается отличительная особенность ВМНК.

Продемонстрируем понятие гетероскедастичности, противопоставив его классическому случаю, когда дисперсия выходного параметра является величиной однородной. В случае гетероскедастичности данных распределение дисперсии выходного параметра зависит от величины входного фактора X (рис. 1).

Процедура ВМНК включает в себя операцию преобразование априорных данных. Рассмотрим приведение измеряемых данных к гомоскедастичному виду на примере линейной модели ФП вида (1)

$$y_i = b_0 + b_1 \cdot x_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

где b_0, b_1 – параметры модели; y_i – значения измеряемой величины; x_i – значения входного фактора; ε_i – случайная ошибка; i – номер наблюдения $i=1 \dots n$; n – количество наблюдений в исследовании.

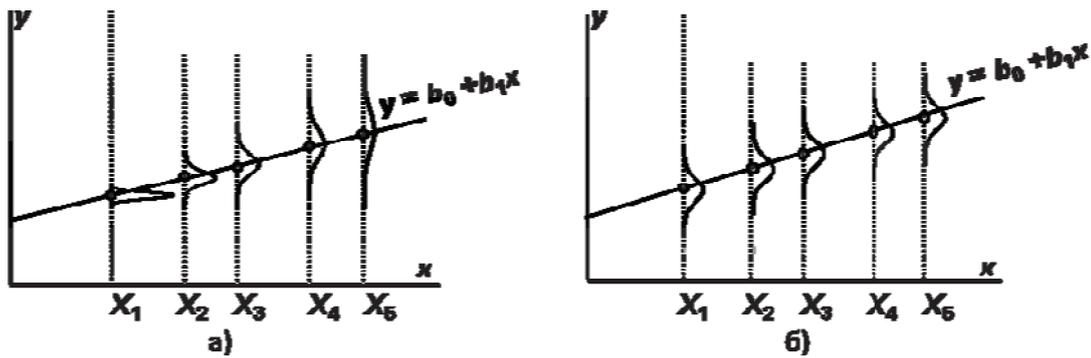


Рис. 1. Пример распределения дисперсии выходного параметра:
 а) случай гетероскедастичности данных; б) случай гомоскедастичности данных

Пусть σ_i — стандартное отклонение случайной ошибки ε_i в i -м наблюдении. В случае, если известно σ_i , можно устранить гетероскедастичность, разделив каждое наблюдение на соответствующее ему значение σ_i . Тогда дисперсия представляется в виде (2)

$$D\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) = \frac{1}{\sigma_i^2} \sigma^2(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1. \quad (2)$$

Таким образом, в результате этой процедуры каждое измерение будет иметь случайную ошибку с единичной дисперсией.

Применение вышеописанного метода в значительной степени ограничено тем, что на практике фактические значения σ_i чаще всего неизвестны. Данная трудность преодолевается с помощью выдвигания гипотезы о том, что существует некоторая величина (K), пропорциональная σ_i в каждом наблюдении. Если имеет место тенденция линейного возрастания случайной ошибки ε с ростом значений x , то можно выдвинуть предположение о наличии приближенной зависимости вида (3)

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = K \cdot x_i^2. \quad (3)$$

Чтобы уменьшить неоднородность дисперсий, разделим обе части уравнения (1) на x_i , что приведет к уравнению вида (4)

$$y_i^* = b_0^* + b_1 \cdot x_i^* + \varepsilon_i^*, \quad (4)$$

где $y_i^* = y_i / x_i$; $b_0^* = b_0 / x_i$; $x_i^* = 1 / x_i$; $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i / x_i$.

Для преобразованной модели (4) дисперсия помехи представлена выражением (5).

$$D(\varepsilon_i^*) = 1/x_i^2 D(\varepsilon_i) = K. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу минимизации суммы квадратов отклонений для преобразованной модели (4). Применим метод наименьших квадратов [4]

$$\sum_{i=1}^n (y_i^* - b_0^* - b_1 x_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{x_i} - b_0^* - b_1 \cdot \frac{1}{x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \cdot (y_i - b_0^* \cdot x_i - b_1)^2 = \min. \quad (6)$$

Обозначим $w_i = 1/x_i^2$, тогда уравнение (6) можно представить в виде уравнения (7)

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot (y_i - b_0 \cdot x_i - b_1)^2 = \min. \quad (7)$$

Задача минимизации суммы квадратов отклонений для преобразованной модели (4) равносильна задаче минимизации взвешенной суммы квадратов отклонений в исходной модели (1). Минимизация взвешенной суммы квадратов называется взвешенным методом наименьших квадратов. Величина w_i интерпретируется как вес, приписываемый квадрату отклонения в i -м наблюдении. Этот вес будет тем меньше, чем больше значение x_i^2 , которое в силу наших допущений пропорционально дисперсии случайной ошибки в i -м наблюдении.

3. Сравнение результатов применения различных методов

В работе [5] авторами были исследованы однофакторные модели функций преобразования вихреакустических расходомеров, причем в качестве наилучшей выбрана линейная математическая модель (8)

$$Q_{\text{модели}} = b_0 + b_1 \cdot f, \quad (8)$$

где f – частота образования вихрей, Гц; $Q_{\text{модели}}$ – значение расхода, рассчитанного согласно модели, м³/ч.

В результате анализа измерительных данных было отмечено, что на больших расходах абсолютные значения погрешности существенно больше, чем на малых. Это дает основание предположить гетероскедастичность априорных данных [4].

Различие в алгоритмах поиска моделей ВМНК и МНК заключается в наличии или отсутствии операции взвешивания априорных данных. Для сравнения качества работы двух алгоритмов применим их к одному и тому же набору данных. Результаты испытаний 10 расходомеров сведем в таблицу. Данные получены при испытании вихреакустических расходомеров в широком диапазоне измерений (от $Q_{\text{max}}/100$ до Q_{max} , где Q_{max} – верхний предел измерения расхода). Серийные испытания расходомеров проводятся на пяти режимах расхода, лежащих в диапазоне измерения. Начинают эксперимент при больших значениях расхода измеряемой жидкости (режим 1), заканчивают на малых расходах (режим 5). В результате испытаний получают значения эталонных расходов ($Q_{\text{эт}}$) и соответствующие им частоты образования вихрей у испытываемых расходомеров.

В качестве показателя сравнения двух методов расчета модели функции преобразования использована относительная погрешность, рассчитанная согласно выражению (9)

$$\delta = \frac{|Q_{\text{эт}} - Q_{\text{модели}}|}{Q_{\text{эт}}} \cdot 100 \%. \quad (9)$$

Сравнение двух методов расчета коэффициентов модели

| Серийный номер | Метод расчета модели | Режимы расхода | | | | |
|----------------|----------------------|--|-------|-------|--------|-------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | Относительные погрешности измерения расхода, % | | | | |
| 300...01 | МНК | 0,037 | 0,483 | 0,375 | 1,189 | 1,339 |
| | ВМНК | 0,168 | 0,442 | 0,020 | 0,503 | 0,246 |
| 300...02 | МНК | 0,030 | 0,404 | 0,105 | 1,151 | 1,363 |
| | ВМНК | 0,224 | 0,309 | 0,183 | 0,445 | 0,174 |
| 300...03 | МНК | 0,031 | 0,427 | 0,171 | 1,197 | 1,277 |
| | ВМНК | 0,201 | 0,352 | 0,123 | 0,500 | 0,221 |
| 300...04 | МНК | 0,067 | 0,956 | 0,376 | 1,901 | 4,608 |
| | ВМНК | 0,641 | 0,651 | 0,193 | 0,234 | 0,022 |
| 300...05 | МНК | 0,029 | 0,386 | 0,374 | 0,676 | 1,566 |
| | ВМНК | 0,200 | 0,300 | 0,086 | 0,049 | 0,034 |
| 300...06 | МНК | 0,031 | 0,419 | 0,016 | 0,872 | 2,985 |
| | ВМНК | 0,433 | 0,171 | 0,258 | -0,151 | 0,152 |
| 300...07 | МНК | 0,015 | 0,233 | 0,351 | 0,388 | 0,293 |
| | ВМНК | 0,012 | 0,279 | 0,244 | 0,184 | 0,137 |
| 300...08 | МНК | 0,027 | 0,392 | 0,089 | 1,183 | 1,157 |
| | ВМНК | 0,149 | 0,353 | 0,145 | 0,599 | 0,245 |
| 300...09 | МНК | 0,017 | 0,262 | 0,361 | 0,397 | 0,449 |
| | ВМНК | 0,027 | 0,283 | 0,237 | 0,139 | 0,119 |
| 300...10 | МНК | 0,002 | 0,031 | 0,089 | 0,333 | 0,670 |
| | ВМНК | 0,140 | 0,145 | 0,082 | 0,455 | 0,251 |

Можно отметить, что модели, рассчитанные согласно ВМНК, обладают меньшими показателями погрешности по сравнению с МНК, особенно наглядно это прослеживается на малых расходах.

Разработанный алгоритм нахождения коэффициентов модели функции преобразования позволяет обеспечить заданный класс точности расходомера в широком диапазоне измерения. Стандартный МНК при использовании той же математической модели не всегда обеспечивает максимально допустимые погрешности на малых расходах.

Заключение

При решении задач, связанных с построением математических моделей функции преобразования измерительных преобразователей (сенсоров), отклонение от предпосылок использования МНК приводит к неоднозначному толкованию полученных параметров модели. Точнее определить параметры модели, построенной на основании гетероскедастичных данных, позволяет ВМНК.

Авторами проведено сравнение результатов применения МНК и ВМНК и показано преимущество последнего для задачи поиска параметров модели функции преобразования расходомеров с широким диапазоном измерения.

Ранее авторами [5] был сделан вывод о необходимости исследования двухфакторной модели функции преобразования вихреакустических расходомеров. С учетом представленных исследований следует отметить, что поиск параметров модели необходимо осуществлять с применением ВМНК.

Литература

1. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ: в 2 ч. Ч. 2: Кн. 2 / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 351 с.
2. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории наблюдений / Ю.В. Линник. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1958. – 334 с.
3. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: Компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Половников. – М.: Вузовский учебник, 2007. – 365 с.
4. Алехин, Е.И. Основы эконометрики: конспект лекций / Е.И. Алехин. – Орел, 2007. – 109 с.
5. Лапин, А.П. Выбор модели функции преобразования вихреакустических расходомеров / А.П. Лапин, А.М. Дружков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2012. – Вып. 17 (294). – С. 161–164.

Лапин Андрей Павлович, канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), a_lapin@mail.ru

Дружков Александр Михайлович, аспирант кафедры «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), sandruzh@gmail.com

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"
2013, vol. 13, no. 2, pp. 109–113

USAGE OF WEIGHTED LEAST SQUARES METHOD CONVERSION FUNCTIONS FOR VORTEX SONIC FLOWMETERS RESEARCH

A.P. Lapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
a_lapin@mail.ru

A.M. Druzhkov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
sandruzh@gmail.com

The least squares method has a number of requirements for usage in regression tasks in model-building for measuring meters. Careful research of its usage prerequisites is required. The homogeneity of the measured values on the whole measurement range is difficult limitation to make often variances.

The weighted least squares method is suggested to use for conversion function model building of the vortex sonic flowmeter and to compare results with least squares method. It is noted that the weighted least squares method is able to provide accuracy in a wide range of vortex sonic flowmeters measurements.

Keywords: vortex sonic flowmeters, conversion function, weighted least squares method.

References

1. Draper N. *Prikladnoy regressionnyy analiz: V 2 ch. Ch. 2: Kniga 2* [Applied regression analysis]. Moscow, Finansy i statistika, 1986. 351 p.
2. Linnik Yu.V. *Metod naimen'shikh kvadratov i osnovy teorii nablyudeniy* [Least squares method and basic theory of observation]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury, 1958. 334 p.
3. Orlova I.V. *Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli: Komp'yuternoe modelirovanie. Uchebnoe posobie* [Economical and mathematical methods and models: Computer simulation. Tutorial]. Moscow, Vuzovskiy uchebnyk, 2007. 365 p.
4. Alekhin E.I. *Osnovy ekonometriki. Konspekt lektsiy* [Fundamentals of econometrics. Summary of lectures]. Orel, 2007. 109 p.
5. Lapin A.P., Druzhkov A.M. Selection of Model for Conversion Function of Vortex Sonic Flowmeters [Vybor modeli funktsii preobrazovaniya vikhreakusticheskikh raskhodomerov]. *Vestnik YuUr-GU. Seriya «Komp'yuternye tekhnologii upravlenie, radioelektronika»*, 2012, vol. 17, no. 294, pp. 161–164.

Поступила в редакцию 14 марта 2013 г.