УДК 519.624.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

С.Н. Какушкин, С.И. Кадченко

Рассматривается математическая модель вычисления значений собственных функций оператора Орра – Зоммерфельда. Используя метод регуляризованных следов, получены простые формулы, позволяющие находить значения первых собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Разработанные алгоритмы позволяют, вычислять значения собственной функции возмущенного оператора независимо от того, известны предыдущие значения собственной функции или нет. Получены оценки остатков сумм функциональных рядов «взвешенных» поправок теории возмущений дискретных операторов, и доказана их сходимость. Для вычислительной реализации метода, найдены эффективные алгоритмы нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений, используя которые можно приближать суммы функциональных рядов Рэлея – Шредингера нужным количеством членов. Проведенные численные эксперименты вычисления значений собственных функций задачи гидродинамической теории устойчивости показывают, что метод хорошо согласуется с другими известными методами (А.Н. Крылова и А.М. Данилевского). Метод регуляризованных следов показал свою надежность и высокую эффективность.

Ключевые слова: задача Орра – Зоммерфельда, собственные числа, собственные функции, теория возмущений, метод регуляризованных следов.

Введение

В последнее время приобретают большое значение вопросы математического моделирования нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов [1–3]. В работе В.А. Садовничего и В.В. Дубровского [4] впервые были высказаны идеи нового метода регуляризованных следов (РС) вычисления собственных чисел возмущенных дискретных операторов. Метод РС активно развивался в работах С.И. Кадченко (например, [5]), где были получены вычислительно эффективные формулы нахождения собственных чисел дискретных полуограниченных снизу операторов. В дальнейшем в работах [6, 7] был разработан новый метод РС для вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

Сложности, связанные с течением вязкой жидкости в линейной теории устойчивости, возникают в связи с математической проблемой вычисления собственных чисел и значений собственных функций несамосопряженных операторов. Спектральная задача Орра – Зоммерфельда является трудной задачей вычислительной математики, поэтому новый метод регуляризованных следов вычисления значений первых собственных функций возмущенных самосопряженных операторов применим к этой задаче.

1. Математическая модель плоскопараллельного течении вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями, которые могут быть неподвижными, а могут двигаться с постоянными скоростями, параллельно друг другу. Линеаризованное уравнение малых возмущений имеет вид:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)^2\varphi = i\alpha R\left[\left(U-c\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)-\frac{d^2U}{dy^2}\right]\varphi$$

или

$$\left(T_o^2 + U_o - \beta T_o\right)\varphi = 0, \tag{1}$$

где $T_o = -\dfrac{d^2}{dy^2} + \alpha^2$; $U_o = i\alpha R\left(UT_o + \dfrac{d^2U}{dy^2}\right)$; $\beta = i\alpha Rc$ – комплексный спектральный параметр; $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны возмущения [8]. Скорость основного течения вязкой жидкости в безразмерной форме запишем в виде [9]: $U(y) = 4\dfrac{U_c}{U_*}y(y-1) + \dfrac{U_s}{U_*}y,\ 0 \le y \le 1.$ Здесь U_s – скорость движения верхней плоскости относительно нижней, U_c – скорость в середине расстояния между плоскостями $(y=1)$, в случае, когда плоскости неподвижны; $U_* = \dfrac{1}{2}U_s + U_c$, – характерная скорость основного течения, R – число Рейнольдса [8].

При $y=0$ и $y=1$ выполняются условия прилипания вязкой жидкости на твердой поверхности [10]: $\dfrac{\partial\tilde{\psi}(x,y,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial\tilde{\psi}(x,y,t)}{\partial y} = 0,$ из которых для функции $\varphi(y)$ получаем граничные условия:

$$\left.\varphi(y)\right|_{y=0,1} = \left.\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|_{y=0,1} = 0. \tag{2}$$

Введем оператор $G_o = T_o^2 + U_o - \beta T_o$, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$. К области определения D_{G_o} оператора G_o отнесем все функции φ класса $C^4(0,1)\bigcap C^1[0,1],\quad \dfrac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1]$, удовлетворяющие граничным условиям (2):

$$D_{G_o} = \left\{\varphi \mid \varphi \in C^4(0,1)\bigcap C^1[0,1],\quad \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1], \left.\varphi(y)\right|_{y=0,1} = \left.\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|_{y=0,1} = 0\right\}.$$

Таким образом, при исследовании на устойчивость плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными бесконечными плоскостями, приходим к спектральной задаче Орра – Зоммерфельда (1), (2) о нахождении значений собственных функций $\varphi(y)$.

2. Метод регуляризованных следов

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор *T* и ограниченный оператор *P*, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве *H* с областью определения в *D*. Предположим, что известны собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора *T*, занумерованные в порядке возрастания их действительных величин, и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, отвечающие этим собственным числам. Пусть собственные функции $v_n(x)$ образуют базис в *H*. Обозначим через n_0 количество всех собственных чисел λ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{\left|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}\right|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора *T+P,* пронумерованные в порядке возрастания их действительных частей, а $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие им собственные функции. Если для всех $n \ge n_0$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{\left|\lambda_{n+1} - \lambda_n\right|} < 1$, тогда n_0 собственных функций оператора *T+P* будут являться решениями системы уравнений [4]:

$$\sum_{j=1}^{n_0}\mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y)=\sum_{j=1}^{n_0}\lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y)+\sum_{k=1}^{t}\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)+\varepsilon_t^{(p)}(n_0,x,y)\,. \tag{3}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)=\dfrac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p[K_T(x,z_k,\lambda)\circ P_{z_k}]^k\circ K_T(z_k,y,\lambda)d\lambda;$ – k-е поправки теории возмущений к «взвешенной» спектральной функции оператора T+P целого порядка p; $K_T(x,y,\lambda)$ – ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T; $(K\circ P\circ Q)(x,y,\lambda)=\int\limits_D K(x,z,\lambda)P_zQ(z,y,\lambda)dz$. Через $\varepsilon_t^{(p)}(n_0,x,y)=\sum\limits_{m=t+1}^{\infty}\alpha_m^{(p)}(n_0,x,y),\ \forall t\in N$ обозначены остатки сумм функциональных рядов Рэлея – Шредингера.

Правые части системы уравнений (3) явно выражаются через характеристики невозмущенного оператора T и возмущающего оператора P, а «взвешенные» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)$ вычисляются с помощью теории вычетов. Система уравнений (3) лежит в основе численного метода РС, позволяющего находить собственные функции возмущенных самосопряженных операторов. В следующей теореме получены формулы, удобные для нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)$. Доказательство теорем, приведенных в данном пункте, можно найти, к примеру, в работах [6, 7].

Теорема 1. Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H и для всех $n\ge n_0$ выполняются неравенства $q_n<1$, тогда «взвешенные» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)$ для любых натуральных k, p, и n_0 находятся по формулам:

$$\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)=-\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{\infty}v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y)r_k^{(p)}(n,j_1,\dots,j_{k+1})\prod_{m=1}^{k}V_{j_mj_{m+1}}\,, \tag{4}$$

где $$r_k^{(p)}(n,j_1,\dots,j_{k+1})=\begin{cases}0, & \forall j_m\ne n, m=\overline{1,k+1};\\[4pt] \dfrac{1}{k!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\dfrac{d^k}{d\lambda^k}\lambda^p, & l=k+1;\\[4pt] \dfrac{1}{(l-1)!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\dfrac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}}\left[\dfrac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k-l+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}\right], & 0<l\le k;\end{cases}$$

$V_{i,j}=(Pv_i,v_j)$ – скалярное произведение; l – число совпадений $j_m=n$, $m=\overline{1,k+1}$.

В случае, если норма возмущающего оператора невелика, суммы функциональных рядов Рэлея – Шредингера достаточно приближать первыми «взвешенными» поправками теории возмущений. Оценим остатки сумм функциональных рядов Рэлея – Шредингера.

Теорема 2. Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n\ge n_0$ выполняются неравенства $q_n<1$, то для остатков сумм функциональных рядов Рэлея – Шредингера $\varepsilon_t^{(p)}(n_0,x,y)$ оператора T+P справедливы оценки:

$$\left|\varepsilon_t^{(p)}(n_0,x,y)\right|\le C_0^4\rho_{n_0}^{p+1}S_{n_0}\|P\|\frac{q_{n_0}^t}{1-q_{n_0}}\,.$$

Здесь $S_{n_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \left(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq n_0}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \right)^2$, $C_0 = \sup\limits_{x \in D} |v_i(x)|$, $\forall i = \overline{1, \infty}$.

Для нахождения собственных чисел μ_n удобно применять простые формулы, полученные методом регуляризованных следов (РС) в работе С.И. Кадченко [5]. Следующая теорема позволяет найти значения произведений собственной функции $u_n(x)$ возмущенного оператора $T+P$ на ее сопряженную $\overline{u}_n(y)$ без непосредственного решения системы нелинейных уравнений (3), что значительно упрощает вычислительный процесс.

Теорема 3. Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, с областью определения в D, и для любого $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то значение произведения собственной функции $u_n(x)$ на ее сопряженную $\overline{u}_n(y)$ можно найти по формулам:

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n} \left(\lambda_n v_n(x) \overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{t} \left[\alpha_k^{(1)}(n,x,y) - \alpha_k^{(1)}(n-1,x,y) \right] \right) + \tilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y), \tag{5}$$

где для $\tilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)$ справедливы оценки:

$$\left| \tilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y) \right| \leq \frac{2\|P\|}{\mu_n} C_0^4 \rho_n^2 S_n \frac{q^t}{1-q}, \quad \forall t \in N, \quad n = \overline{1, n_0}.$$

Здесь $S_n = \sup\limits_{\lambda_i} \left(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_i|} \right)^2$, $C_0 = \sup\limits_{x \in D} |v_i(x)|$ $\forall i = \overline{1, \infty}$, $q = \max\limits_{n \geq 1} q_n$.

В работе [7] приведен алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенного оператора $T+P$ из произведений вида $u_n(x)\overline{u}_n(y)$.

Применять разработанный метод РС для нахождения значений первых собственных функций спектральной задачи (1), (2) нельзя, так как оператор $U_o = i\alpha R \left(UT_o + \frac{d^2U}{dy^2} \right)$, входящий в (1), не является ограниченным на $L_2[0,1]$. В работе [11] построена вспомогательная задача, в которой множества собственных чисел и собственных функций совпадают с множествами собственных чисел и собственных функций спектральной задачи (1), (2), и к которой применим метод РС. Опишем эту задачу. Для этого рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$T_{o_1}\varphi = f(y), \quad 0 < y < 1, \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

где $T_{o_1}\varphi = \left(-\frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2 \right) \varphi$ – дифференциальный оператор с областью определения

$$D_{T_{o_1}} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in C^4(0,1) \bigcap C^1[0,1], \quad \frac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1], \varphi(y)\big|_{y=0,1} = 0 \right\}.$$

Сделаем замену $\varphi = T_{o_1}^{-1} f$, тогда $G_o\varphi = \left(T_o^2 + U_o - \beta T_o \right) T_{o_1}^{-1} f$. Справедливо равенство: $G_o\varphi = \left(T_o^2 + U_o - \beta T_o \right) T_{o_1}^{-1} f = \left(T_o + U_o T_{o_1}^{-1} - \beta \right) f$.

Следовательно, уравнение (1) можно записать в виде $\left(T_o + P_o \right) f = \beta f$, где $f = T_{o_1}\varphi$, $U_o = i\alpha R \left(UT_o + \frac{d^2U}{dy^2} \right)$, $\beta = i\alpha Rc$. Граничные условия $\varphi(y)\big|_{y=0,1} = 0$ остаются неизменными, а граничные условия $\left.\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|_{y=0,1}=0$ примут вид $\left.\frac{dT_{o_1}^{-1}f(y)}{dy}\right|_{y=0,1}=0$.

Очевидно, что множества собственных чисел спектральной задачи

$$\left(T_o+P_o\right)f=\beta f,\quad f\in D_{T_o}, \tag{6}$$

где $D_{T_o}=\left\{f\mid f\in C^2(0,1),\quad \frac{d^2f}{dy^2}\in L_2[0,1],\left.\frac{dT_{o_1}^{-1}f(y)}{dy}\right|_{y=0,1}=0\right\}$, и задачи (1), (2) совпадают, а их собственные функции связаны соотношениями $\varphi=T_{o_1}^{-1}f$ и $f=T_{o_1}\varphi$. При этом оператор $T_{o_1}^{-1}$ имеет вид:

$$T_{o_1}^{-1}f=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\operatorname{sh}(\alpha)}\int_0^1\operatorname{sh}\left[\alpha(1-\xi)\right]f(\xi)d\xi-\int_0^y\operatorname{sh}\left[\alpha(y-\xi)\right]f(\xi)d\xi\right\}. \tag{7}$$

3. Вычислительный эксперимент

Был проведен численный эксперимент по нахождению значений собственных функций f спектральной задачи (6) методом РС и методом А.Н. Крылова. При этом в методе РС суммы функциональных рядов Рэлея–Шредингера приближались четырьмя «взвешенными» поправками по формулам (4), а значения произведений $f_n(x)\overline{f_n}(y),\quad n=\overline{1,n_0}$ были найдены по формулам (5). Проинтерполировав полученные значения и воздействовав слева на полученные функции оператором $T_{o_1}^{-1}$ по формулам (7), найдены значения собственных функций $\varphi(y)$ исходной задачи (1), (2). Результаты вычисления пятнадцатой собственной функции $\varphi_{15}(y)$ приведены в таблице. При этом через $\hat{\varphi}_{15}(y)$ обозначены значения, полученные новым методом РС, а через $\tilde{\varphi}_{15}(y)$ – значения, полученные методом А.Н. Крылова.

Значения пятнадцатой собственной функции задачи (1), (2), вычисленные при $U_s=0$, $U_c=1$, $R=5$ и $\alpha=1$

j	y_j	$\hat{\varphi}_{15}(y_j)$	$\tilde{\varphi}_{15}(y_j)$	$\lvert\hat{\varphi}_{15}(y_j)-\tilde{\varphi}_{15}(y_j)\rvert$	$\frac{\lvert\hat{\varphi}_{15}(y_j)-\tilde{\varphi}_{15}(y_j)\rvert}{\lvert\tilde{\varphi}_{15}(y_j)\rvert}\%$
1	0,095	$311{,}511-0{,}343i$	$309{,}383+0{,}589i$	2,323	0,751
2	0,142	$-549{,}396+0{,}321i$	$-549{,}936+0{,}127i$	0,574	0,104
3	0,190	$564{,}863+0{,}281i$	$565{,}384-0{,}781i$	1,183	0,209
4	0,238	$-275{,}652-0{,}534i$	$-275{,}756+2{,}037i$	2,573	0,933
5	0,285	$-96{,}783+0{,}491i$	$-96{,}488-2{,}091i$	2,599	2,693
6	0,333	$314{,}817-0{,}339i$	$315{,}916+0{,}623i$	1,461	0,462
7	0,381	$-288{,}613+0{,}432i$	$-288{,}645+0{,}373i$	0,331	0,114
8	0,428	$114{,}837-0{,}013i$	$114{,}238-0{,}993i$	1,149	1,006
9	0,476	$22{,}748-0{,}007i$	$22{,}923+0{,}693i$	0,721	3,147
10	0,524	$-24{,}500+0{,}791i$	$-24{,}371+0{,}018i$	0,129	0,530
11	0,571	$-75{,}419-0{,}001i$	$-75{,}427-0{,}168i$	0,167	0,222
12	0,619	$141{,}439-0{,}137i$	$141{,}935-0{,}664i$	0,723	0,509
13	0,667	$-58{,}678+0{,}259i$	$-58{,}499+1{,}600i$	1,352	2,310

Заключение

В статье на основе метода регуляризованных следов построена математическая модель вычисления значений собственных функций спектральной задачи Орра–Зоммерфельда. Проведенный численный эксперимент показал, что значения собственных функций, найденные методом РС, хорошо согласуются со значениями, найденными известным методом (А.Н. Крылова). При этом метод РС показал свою надежность и вычислительную эффективность.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 2169.

2. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1990. – № 12. – С. 65.

3. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.

4. Садовничий, В.А. Замечание об одном новом методе вычислений собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – М.: МГУ, 1994. – Вып. 17. – С. 244–248.

5. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 8, № 17 (234). – С. 46–51.

6. Кадченко, С.И. Численные методы нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 13, № 27 (286). – С. 45–57.

7. Кадченко, С.И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6 (97). – С. 13–21.

8. Линь, Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости / Ц.Ц. Линь. – М.: ИЛ, 1958. – 195 с.

9. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 840 с.

10. Розе, Н. Г. Теоретическая гидромеханика / Н.Г. Розе, И.А. Кибель, Н.Е. Кочин. – М.: ТТЛ, 1937. – 584 с.

11. Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов: дис. … д-ра физ.-мат. наук / С.И. Кадченко. – М., 2003.

Какушкин Сергей Николаевич, аспирант кафедры прикладной математики и вычислительной техники, Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск); kakushkin-sergei @mail.ru.

Кадченко Сергей Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники, Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск); kadchenko@masu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"
2013, vol. 13, no. 3, pp. 30–36

MATHEMATICAL MODELING THE VALUES OF EIGENFUNCTIONS FINDING FOR ORR-SOMMERFELD'S PROBLEM OF HYDRODYNAMICAL STABILITY THEORY VIA THE METHOD OF REGULARIZED TRACES

***S.N. Kakushkin**, Magnitogorsk State University, Magnitogorsk, Russian Federation, kakushkin-sergei@mail.ru,*
***S.I. Kadchenko**, Magnitogorsk State University, Magnitogorsk, Russian Federation, kadchenko@masu.ru*

In this paper the mathematical model of computing the values of the eigenfunctions of the Orr-Sommerfeld's operator. Using the method of regularized traces, we obtain simple formulas to find the values of the first eigenfunctions of the perturbed self-adjoint operators. The algorithms make it possible to calculate the values of the eigenfunction of the perturbed operators matter known to the previous values of their eigenfunctions or not. We obtain estimates of residual sums of functional series “weighted” perturbation theory corrections discrete operators, and prove their convergence. For the numerical implementation of the method found effective algorithms for finding “weighted” perturbation theory corrections, which can be approximated using the sum of series of functions of Rayleigh-Schrodinger right amount of members. The numerical experiments computing the values of eigenfunctions of hydrodynamic stability theory show that the method is consistent with other known methods (A.N. Krylov and A.M. Danilevsky). The method of regularized traces showed its reliability and high efficiency.

Keywords: Orr-Sommerfeld’s problem, eigenvalues, eigenfunctions, perturbation theory, the method of regularized traces.

References

1. Sviridyuk G.A. The Cauchy Problem for a Singular Linear Equations of Sobolev Type [Zadacha Koshi dlya lineynogo singulyarnogo uravneniya tipa Soboleva]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential equation]*, 1987, vol. 23, no. 12, pp. 2169.

2. Sviridyuk G.A. Solubility of the Thermal Convection of Viscoelastic Incompressible Fluid [Razreshimost' zadachi termokonvektsii vyazkouprugoy neszhimaemoy zhidkosti]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika [Proceedings of the higher education institutions. Mathematics]*, 1990, no. 12, p. 65.

3. Sviridyuk G.A., Brychev S.V.The Numerical Solution of Leontief Type Equation Systems [Chislennoe reshenie sistem uravneniy leont'evskogo tipa]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika [Proceedings of the higher education institutions. Mathematics]*, 2003, no. 8, pp. 46–52.

4. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V. Note on a New Method of Computing Eigenvalues and Eigenfunctions of the Discrete Operators [Zamechanie ob odnom novom metode vychisleniy sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy diskretnykh operatorov]. *Trudy seminara I.G. Petrovskogo* [Proceedings of the Seminar I.G. Petrovsky], 1994, no. 17, pp. 244–248.

5. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. A Numerical Method for Finding the Eigenvalues of the Discrete Semi-bounded From Below Operators [Chislennyy metod nakhozhdeniya sobstvennykh znacheniy diskretnykh poluogranichennykh snizu operatorov] *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modeling, Programming & Computer Software*», 2011, vol. 8, no 17 (234), pp. 46–51. (in Rissian)

6. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. Numerical Methods for Finding the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Perturbed Self-adjoint Operators [Chislennye metody nakhozhdeniya sobstvennykh chisel i sobstvennykh funktsiy vozmushchennykh samosopryazhennykh operatorov]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modeling, Programming & Computer Software*», 2012, vol. 13, no. 27 (286), pp. 45–57. (in Russian)

7. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculation of the Natural Functions Values of Discrete Semi-bounded from below by the Regularized Traces Operators [Vychislenie znacheniy sobstvennykh funktsiy diskretnykh poluogranichennykh snizu operatorov metodom regulyarizovannykh sledov]. *Vestnik SamGU – Estestvennonauchnaya seriya* [SSU Herald-Natural Science series], 2012, no. 6 (97), pp. 13–21.

8. Lin' Ts.Ts. *Teoriya gidrodinamicheskoy ustoychivosti* [The Theory of Hydrodynamic Stability]. Moscow, 1958. 195 p.

9. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics]. Moscow, 1973. 840 p.

10. Roze N.G. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical Fluid Mechanics]. Moscow, 1937. 584 p.

11. Kadchenko S. I. Novyy metod vychisleniya sobstvennykh chisel vozmushchennykh samosopryazhennykh operatorov [A New Method for Calculating Eigenvalues of the Perturbed Self-adjoint Operators]. Moscow, 2003.

Поступила в редакцию 9 июня 2013 г.