УДК 517.977

О ПОДХОДЕ К ОЦЕНИВАНИЮ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАК К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев

Рассматривается построение гарантированных оценок вектора состояния динамической системы в условиях неопределенности. Минимаксный фильтр применяется, когда статистическая информация о возмущениях и помехах отсутствует и известны множества их возможных значений. Рассмотрены методы выполнения операций над множествами, возникающих при реализации минимаксного фильтра, в случае, когда множества описаны системами линейных неравенств. Описан алгоритм точного построения множества прогнозов методом свёртки системы линейных неравенств Фурье – Черникова. Рассмотрен метод пересечения множеств, который заключается в выявлении в системе избыточных неравенств на основе теоремы Минковского – Фаркаша. Приведён численный пример, демонстрирующий работу алгоритма.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, минимаксный фильтр, система линейных неравенств.

Введение

Рассмотрим задачу оценивания состояния динамической системы, когда статистическая информация о возмущениях и помехах, действующих на систему, отсутствует, но известны множества их возможных значений [1–3, 7]. Эти множества являются многогранниками и заданы системами линейных неравенств (СЛН). Работа продолжает исследования [4, 5].

1. Минимаксный фильтр

Процессы в системе управления описываются уравнениями:

$$x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k, \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1}$$

где $x_k \in R^n$, $w_k, y_k \in R^m$, v_k – векторы состояния системы, возмущения, измерения, ошибок измерений на k-м шаге соответственно; A, Γ, G, H – известные матрицы. Известно, что начальное состояние x_0 и неопределенные воздействия w_k и v_k на k-м шаге могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых многогранных множеств:

$$x_0 \in X_0 : A_{x_0} x_0 \le b_{x_0}, \quad w_k \in W : A_w w_k \le b_w, \quad v_k \in V : A_v v_k \le b_v, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,. \tag{2}$$

Задача гарантированного оценивания состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств $\overline{X}_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, внутри которого находится истинное значение вектора состояния x_k [1, 4]:

$$X_{k+1/k} = A\overline{X}_k + \Gamma W, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

$$X[y_{k+1}] = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Gx + v = y_{k+1}, v \in V \right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4}$$

$$\overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Рассмотрим алгоритм нахождения системы линейных неравенств, описывающей информационное множество $\overline{X}_k$ для $k = 1$.

1. Найдем систему линейных неравенств, описывающих множество прогнозов $X_{1/0}$.

$A\overline{X}_0 : A_1 x \le b_1$, где $A_1 = A_{x_0}\left(A\right)^{-1}$, $b_1 = b_{x_0}$;

$\Gamma W : A_2 w \le b_2$, где $A_2 = A_w\left(\Gamma\right)^{-1}$, $b_2 = b_w$;

$x_1 \in X_{1/0} = A\overline{X}_0 + \Gamma W$.

Получаем систему линейных неравенств:

$$\begin{pmatrix} A & \Gamma & -E \\ -A & -\Gamma & E \\ A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ w \\ x_1 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Проведем свертку системы, обнуляя коэффициенты при x_0 и w. Получим систему $A_{x_{1/0}} x_1 \le b_{x_{1/0}}$.

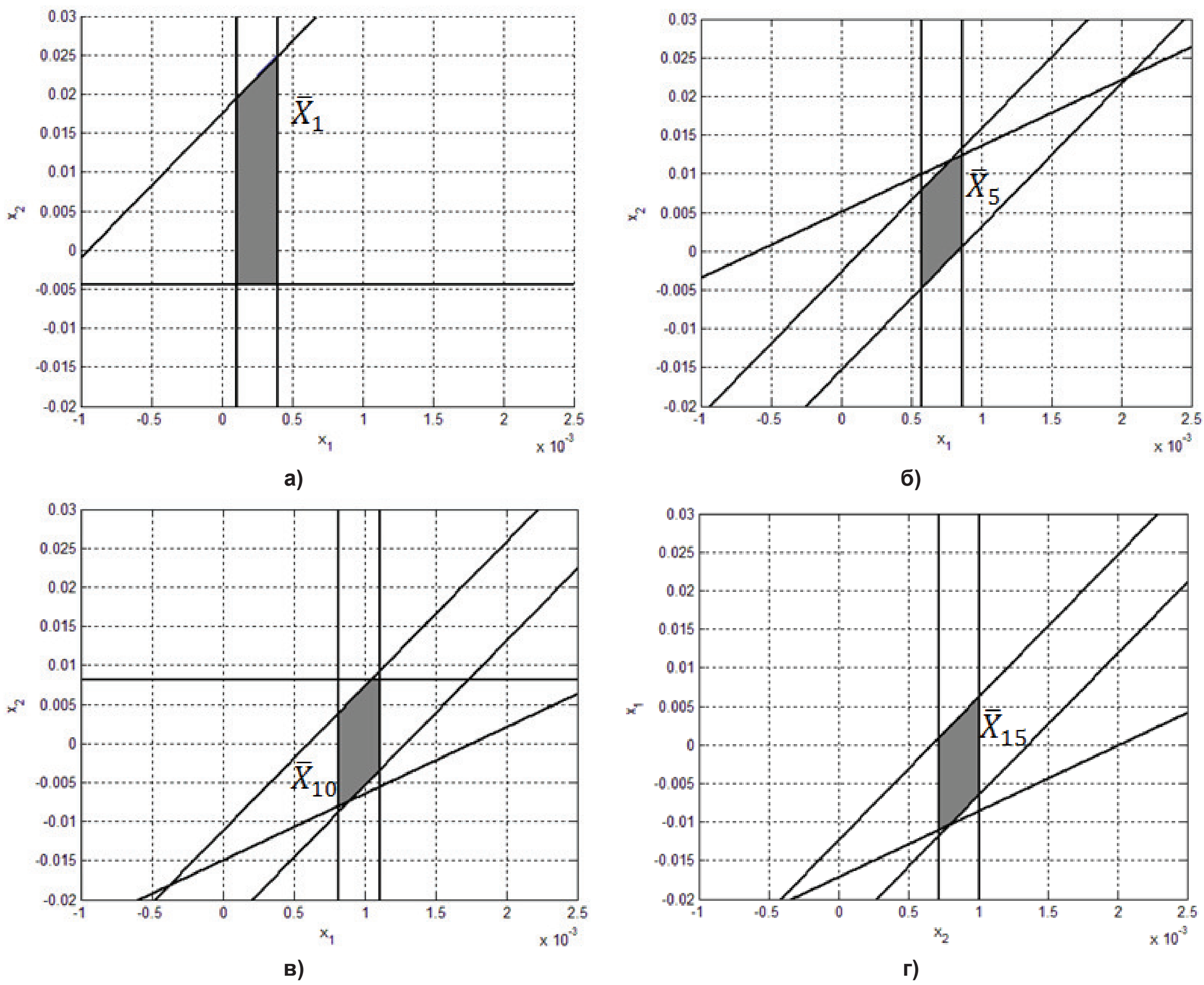
2. Найдем СЛН, описывающую множество, совместимое с измерением, $X[y_1]$:

$X[y_1]: A_{X[y_1]} x_1 \le b_{X[y_1]}$, где $A_{X[y_1]} = A_v$, $b_{X[y_1]} = A_v y_1 + b_v$.

3. Найдем СЛН, описывающую информационное множество $\overline{X}_1$. Для этого объединим системы $A_{x_{1/0}} x_1 \le b_{x_{1/0}}$ и $A_{X[y_1]} x_1 \le b_{X[y_1]}$ и исключим из полученной системы избыточные неравенства, используя теорему Минковского – Фаркаша [5]. Для каждого неравенства $cx \le d$ из этой системы решим задачу линейного программирования $-cx \to \min\limits_{Ax \le b}$. Если будет найдено решение $\tilde{x}$, при котором $cx \le d$, то данное неравенство является избыточным.

При построении минимаксного фильтра в качестве оценки x_k^* вектора состояния x_k системы (1) рассматривается чебышевский центр информационного множества $\overline{X}_k$ [4, 5].

2. Пример



Информационные множества $\overline{X}_k$: а – $k=1$; б – $k=5$; в – $k=10$; г – $k=15$

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}9976 & 0{,}04639 \\ -0{,}09278 & 0{,}8584 \end{pmatrix},\quad \Gamma=\begin{pmatrix} 0{,}1189\cdot 10^{-3} \\ 4{,}639\cdot 10^{-3} \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множества:

$$X_0:\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot x_0 \le \begin{pmatrix} 0{,}00075 \\ 0{,}03 \\ 0{,}00075 \\ 0{,}03 \end{pmatrix},\quad W:\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot w \le \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix},\quad V:\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot v \le \begin{pmatrix} 0{,}000145 \\ 0{,}0228 \\ 0{,}000145 \\ 0{,}0228 \end{pmatrix}.$$

Начальное состояние системы $x_0 = 0$, а w_k и v_k меняются внутри множеств W и V. Полученные в результате работы фильтра информационные множества $\overline{X}_k$, $k = 1, 5, 10, 15$ приведены на рисунке.

Заключение

Задача построения множественных оценок состояния динамической системы в условиях неопределённости сведена к решению системы линейных неравенств. Рассмотрен алгоритм точного построения множества прогнозов методом свёртки системы линейных неравенств. Существенным недостатком применения свертки в алгоритме минимаксной фильтрации является то, что в промежуточных вычислениях появляется большое число избыточных неравенств, в связи с чем увеличивается вычислительная сложность алгоритма. Для уменьшения вычислительных ресурсов применяют алгоритмы аппроксимации множеств прогнозов сверху, например, методом сдвига граней [7] или параллелотопами.

Литература

1. Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 11. – С. 79–87.

2. Кунцевич, В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. – Киев: Наукова думка, 2006. – 264 с.

3. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – № 2. – С. 11–15.

4. Подивилова, Е.О. Сравнение оценок минимаксного фильтра и фильтра Калмана / Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14, № 40 (299). – С. 182–186.

5. Уханов, М.В. Алгоритмы построения информационных множеств при реализации минимаксного фильтра / М.В. Уханов, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Физика. Химия». – 2002. – Вып. 2, № 3. – С. 19–33.

6. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

7. A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm / Bo Zhou, Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai // Acta Automatica Sinica. – 2013. – Vol. 39, no. 2. – P. 146–154.

Подивилова Елена Олеговна, аспирант кафедры систем управления, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); podivilova_elena@mail.ru.

Ширяев Владимир Иванович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой систем управления, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); vis@prima.susu.ac.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics”
2013, vol. 13, no. 3, pp. 133–136

ON THE APPROACH OF DYNAMIC SYSTEM STATE ESTIMATION AS SOLVING LINEAR INEQUALITIES SYSTEM

E.O. Podivilova, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, podivilova_elena@mail.ru,*
V.I. Shiryaev, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, vis@prima.susu.ac.ru*

The article describes guaranteed estimation of dynamic system state vector under condition of uncertainty. Minimax filter is used when statistic information about disturbances and noises is absent but sets of their possible values are available. Methods of performing set operations while minimax filter realization are described when sets are given by linear inequalities systems. The algorithm of accurate construction of feasible sets with convolution of systems of linear inequalities Fourier-Chernikov is presented in the article. The article describes algorithm of performing intersection of sets which consists of revealing extra inequalities in the system basing on Minkowski-Farkash theorem. The numerical example showing described algorithms is presented.

Keywords: guaranteed estimation, minimax filter, linear inequalities systems.

References

1. Kats I.YA., Kurzhansky A.B. Minimax Multistep Filtration in Statistically Undefined Situations [Minimaksnaya mnogoshagovaya filtratsiya v statisticheski neopredelennyKh situatsiyaKh] *Avtomatica i telemekhanica [Automatic & Telemechanics]*, 1978, no. 11, pp. 79–87.

2. Kuntsenich V.M. Control under Condition of Uncertainty: Guaranteed Results in Control and Identification Problems [Upravleniye v usloviyakh neopredelennosti: garantirovannye rezultaty v zadachakh upravleniya i identificatsii], *Naukova Dumka*, 2006. 264 p.

3. Philimonov N.B. Identification of Discrete Dynamic Objects State and Environment by Polyhedral Programming Method [Identificatsiya sostoyaniya i vneshney sredy dinamicheskikh ob’ektov metodom poliedral’nogo programmirovaniya], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye [Mechatronics, Automation, Control]*, 2003, no. 2, pp. 11–15.

4. Podivilova E.O., Shiryaev V.I. Comparison of Minimax Filter and Kalman Filter Estimations [Sravnenie ocenok minimaksnogo fil'tra i fil'tra Kalmana], *Bulletin of the SouthUral State University.Series “Mathematical Modeling,Programming & Computer Software”*, 2012, vol. 14, no. 40 (299), pp. 182–186. (in Russian)

5. Ukhanov M.V., Shiryaev V.I. Algorythms of Construction Informational Sets while Minimax Filter Realization [Algoritmy postroeniya informatsionnykh mnozhestv pri realizatsii minimaksnogo fil'tra], *Bulletin of the SouthUral State University. Series “Mathematics. Physics.Chemistry”*, 2002, vol. 2, no. 3, pp. 19–33.

6. Chernikov S.N. Linear Inequalities [Lineynye neravenstva]. Moscow, Nauka, 1968. 488 p.

7. Bo Zhou, Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2013, vol. 39, no. 2, pp. 146–154.

Поступила в редакцию 26 мая 2013 г.