УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ НЕВЯЗКИ, ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П. Танана, А.И. Сидикова, Е.Ю. Вишняков

При математическом моделировании многих процессов и явлений, происходящих в природе и обществе, приходится сталкиваться с задачами, не удовлетворяющими условиям корректности Адамара. Основной трудностью решения таких задач является то, что их математическая модель и метод должны быть увязаны друг с другом. Такие задачи называют некорректно поставленными. Основы теории моделирования и решения таких задач были заложены в трудах академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и чл.-корр. РАН В.К. Иванова.

Для эффективного решения неустойчивых задач к настоящему времени созданы специальные регулярные методы, основанные на замене исходной некорректной задачи задачей или последовательностью задач , корректных в обычном смысле.

Настоящая статья посвящена оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном методе невязки. Данная задача является некорректной. При оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач приходится сталкиваться с трудностью, связанной с неопределенностью точного решения, поэтому необходима разработка новых эффективных методов решения таких задач, оценки их эффективности и разработки на их основе программ для численного решения соответствующих задач. В настоящей статье на основе обобщенного принципа невязки получена оценка погрешности для дискретизированного решения.

Ключевые слова: регуляризация, интегральное уравнение, оценка погрешности, некорректная задача.

Многие задачи математической физики, анализа и обработки результатов физических экспериментов сводятся к интегральному уравнению I рода. Данные уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач, теория которых в настоящее время интенсивно развивается. В работе [1] был предложен и обоснован метод обобщенной невязки для решения операторных уравнений первого рода с приближенно заданным оператором.

При решении некорректных задач важное место занимает оценка погрешности регуляризованного решения. Как правило, после такой оценки делали дискретизацию задачи, которая не учитывалась в оценке. В настоящей статье на основе обобщенного принципа невязки получена оценка погрешности для дискретизированного решения.

Кроме того, в данной статье на основе этого метода строится регуляризующий алгоритм приближенного решения интегральных уравнений первого рода, а также получена оценка точности этого алгоритма.

Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s)=\int_a^b K(s,t)u(s)ds=f(t),\ \ c\le t\le d, \tag{1}$$

где $K(s,t)\in C([a,b]\times[c,d])$, $u(s)\in L_2[c,d]$ и ядро $K(s,t)$ замкнуто.

Предложим, что при $f(t)=f_0(t)$ существует точное решение уравнения (1) $u_0(s)$, которое принадлежит множеству M_r, где

$$M_r=\left\{u(s):u(s),u'(s)\in L_2[a,b],\ u(0)=0,\ \int_a^b[u'(s)]^2ds\le r^2\right\}, \tag{2}$$

где $u'(s)-$ производная $u(s)$ по s . Заметим, что решение $u_0(s)$ единственно ввиду замкнутости ядра $K(s,t)$.

Кроме того, будем считать, что точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[c,d]$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2} \le \delta. \tag{3}$$

Требуется по f_δ, δ, M_r определить приближенное решение $u_\delta(s)$ уравнения (1) и оценить уклонение $\|u_\delta(t) - u_0(t)\|$ приближенного решения от точного $u_0(t)$.

Предположим, что для численного решения уравнения (1) оператор A неудобен и требует замены его конечномерным оператором A_n, для которого известна величина h_n, определяемая соотношением

$$\|A_n - A\| \le h_n.$$

Чтобы заменить оператор A конечномерным, потребуем, чтобы для любого $t \in [c,d]$

$$K(s,t) \in C^1[a,b], \tag{4}$$

а функция $N(t)$, определяемая формулой

$$N(t) = \max_{a \le s \le b} \left|K_s^{'}(s,t)\right|, \quad t \in [c,d], \tag{5}$$

принадлежала пространству $L_2[c,d]$.

Для определения оператора A_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и определим функцию $\overline{K}_i(t)$:

$$\overline{K}_i(t) = K(\bar{s}_l, t); \quad s_i \le s \le s_{i+1},$$

$$s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad s_{i+1} = a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}, \quad \bar{s}_l = \frac{s_i + s_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, ..., n-1, \tag{6}$$

$$K_n(s,t) = \overline{K}_i(t); \quad s_i \le s \le s_{i+1}, \quad t \in [c,d], \quad i = 0, 1, ..., n-1,$$

$$A_n u(s) = \int_a^b K_n(s,t) u(s) ds; \quad t \in [c,d]. \tag{7}$$

Из (1), (4)–(7) следует, что

$$\|A_n - A\| \le \|N(t)\| \frac{b-a}{n} = h_n. \tag{8}$$

Обобщенный метод невязки

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$Bv(s) = \int_a^s v(\xi) d\xi; \qquad v(s), \quad Bv(s) \in L_2[a,b]. \tag{9}$$

Обобщенный метод невязки, следуя [1], заключается в сведении поставленной задачи к вариационной

$$\inf \left\{ \int_a^b [u'(s)]^2 ds \;:\; u(s) \in W_2^1[a;b], \; u(a) = 0, \right.$$
$$\left. \left[\int_c^d [A_n u(s) - f_\delta(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\int_a^b [u'(s)]^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \|B\| h_n + \delta \right\}. \tag{10}$$

Приведенный метод отличается от классического обобщенного метода невязки множителем при h_n. Это позволяет свести задачу (10) к методу регуляризации А. Н. Тихонова [2]

$$\inf \left\{ \|A_n u(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \int_a^b [u'(s)]^2 ds \;:\; u(s) \in W_2^1[a;b], \; u(a) = 0 \right\}, \; \alpha > 0. \tag{11}$$

Из [2] следует существование и единственность решения $u_{\delta h_n}^{\alpha}(s)$ вариационной задачи (11). При этом значение параметра $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(A_n, f_\delta, h_n, \delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\| A_n u_{\delta h_n}^{\alpha}(s) - f_\delta(t) \right\|_{L_2} = \left\| \left[u_{\delta h_n}^{\alpha}(s) \right]' \right\|_{L_2} \|B\| h_n + \delta, \tag{12}$$

где $\left[u_{\delta h_n}^{\alpha}(s) \right]'$ – производная от функции $u_{\delta h_n}^{\alpha}(s)$ по s.

Из [2] следует, что при условии $\|f_\delta(t)\|_{L_2} > \delta + \|u_0'(s)\| h_n$ существует единственное решение уравнения (12).

Кроме того, при выполнении этого условия задача (10) эквивалентна задаче (11) с параметром α, удовлетворяющим обобщенному принципу невязки (12).

Сделав замену $u(s) = Bv(s)$ в формулах (11) и (12), сведем задачу (11) и (12) к эквивалентной

$$\inf\left\{ \|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 \ : \ v(s) \in L_2[a,b] \right\}. \tag{13}$$

Обозначим через $v_{\delta h_n}^{\alpha}(s)$ решение задачи (13), в котором значение параметра $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(A_n, f_\delta, h_n, \delta)$ определим уравнением относительно α

$$\left\| C_n v_{\delta h_n}^{\alpha}(s) - f_\delta(t) \right\|^2 = \left\| v_{\delta h_n}^{\alpha}(s) \right\| \|B\| h_n + \delta, \tag{14}$$

где $C_n = A_n B$.

Если решение $v_{\delta h_n}^{\alpha}(s)$ задачи (13), (14) обозначим через $v_{\delta h_n}(s)$, то решение задачи (11), (12) определится формулой

$$u_{\delta h_n}(s) = B v_{\delta h_n}(s).$$

Используя (6), (7) и (9) получим, что

$$C_n v(s) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) \overline{K}_i(t), \tag{15}$$

где $u_i = u(s_i)$, $s_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, $\overline{K}_i(t) = K(\overline{s_l}, t)$, $\overline{s_l} = \dfrac{s_{i+1} + s_i}{2}$, $u_0 = 0$.

Теперь рассмотрим вариационную задачу

$$\inf\left\{ \int_{s_i}^{s_{i+1}} [u'(s)]^2 ds \ : \ u(s) \in W_2^1[s_i, s_{i+1}],\ u(s_i) = u_i,\ u(s_{i+1}) = u_{i+1} \right\}. \tag{16}$$

Легко проверить, что решение $u(s)$ задачи (16) будет иметь вид

$$u(s) = u_i + \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i}(u_{i+1} - u_i); \quad s_i \le s \le s_{i+1}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$v(s) = u'(s) = \frac{n}{b-a}(u_{i+1} - u_i); \quad s_i \le s \le s_{i+1}. \tag{18}$$

Подставляя (15) и (18) в вариационную задачу (13), сведем ее к следующей

$$\inf\left\{ \int_c^d \left[\sum_{i=0}^{n-1} K_{i+1}(t)(u_{i+1} - u_i) - f_\delta(t) \right]^2 dt + \frac{\alpha n^2}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)^2 : u_i \in R_{n+1} \right\}. \tag{19}$$

Решение задачи (19) обозначим через $\overline{u}_i^{\alpha}$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда, используя условие (14), значение параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(A_n, f_\delta, h_n, \delta)$ выберем из уравнения

$$\left\{ \int_c^d \left[\sum_{i=0}^{n-1} K_{i+1}(t)(\overline{u}_{i+1}^{\alpha} - \overline{u}_i^{\alpha}) - f_\delta(t) \right]^2 dt \right\}^{1/2} = n \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\overline{u}_{i+1}^{\alpha} - \overline{u}_i^{\alpha} \right)^2 \right]^{1/2} \|B\| h_n + \delta. \tag{20}$$

Окончательное решение $v_{\delta h_n}(s)$ задачи (19), (20) будет иметь вид

$$v_{\delta h_n}(s) = \left\{ \frac{n}{b-a}\left(\bar{u}_{i+1}^{\alpha} - \bar{u}_{i}^{\alpha}\right) \; : \; s_i \le s \le s_{i+1}; \; i = 0, 1, ..., n-1 \right\}, \tag{21}$$

где $\left(\bar{u}_{i}^{\alpha}\right)$ – решение задачи (19), (20).

Оценка погрешности обобщенного метода невязки

Перейдем к оценке погрешности $\left\| u_{\delta h_n} - u_0 \right\|$ приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) от точного $u_0(s)$, где $u_{\delta h_n}(s) = Bv_{\delta h_n}(s)$, а $v_{\delta h_n}(s)$ определен формулой (21).

Для этого введем функцию $\omega_1(\tau, r)$ и $\omega(\tau, r)$, τ, $r > 0$ формулами

$$\omega_1(\tau, r) = \sup_{u, \bar{u}} \left\{ \left\| u(s) - \bar{u}(s) \right\| \; : \; u(s), \bar{u}(s) \in M_r, \; \left\| Au(s) - A\bar{u}(s) \right\| \le \tau \right\} \tag{22}$$

и

$$\omega(\tau, r) = \sup_{u} \left\{ \left\| u(s) \right\| : u(s) \in M_r, \; \left\| Au(s) \right\| \le \tau \right\}, \tag{23}$$

где множество M_r определено формулой (2).

Из (22) и (23) следует, что

$$\omega_1(\tau, r) = \omega(\tau, 2r). \tag{24}$$

Теорема 1.

Предположим, что $u_0 \in M_r$, оператор A_n определен формулой (7), число h_n – формулой (8), а приближенное решение уравнения (1) $u_{\delta h_n}(s) = Bv_{\delta h_n}(s)$, где $v_{\delta h_n}(s)$ определен формулой (21) и $\left\| f_\delta \right\| > r \left\| B \right\| h_n + \delta$. Тогда для приближенного решения $u_{\delta h_n}$ справедлива оценка

$$\left\| u_{\delta h_n}(s) - u_0(s) \right\| \le 2\omega(r \left\| B \right\| h_n + \delta, r) \; .$$

Доказательство. Так как $u_0(s) \in M_r$, то из (2) следует, что

$$\int_a^b \left[u_0'(s) \right]^2 ds \le r^2. \tag{25}$$

Из (3) и (8) следует, что

$$\left\| A_n u_0(s) - f_\delta \right\| \le \left\| u_0 \right\| h_n + \delta. \tag{26}$$

Таким образом, из (25), (26) следует, что

$$\left\| C_n v_0(s) - f_\delta \right\| \le \left\| B \right\| r \, h_n + \delta. \tag{27}$$

Из теоремы, доказанной в [2, с. 28], следует, что при условии $\left\| f_\delta \right\| > r \left\| B \right\| h_n + \delta$ задача (19), (20) эквивалентна следующей

$$\inf \left\{ \left\| v(s) \right\| : v(s) \in L_2[a,b], \; \left\| C_n v(s) - f_\delta \right\| \le \left\| B \right\| \left\| v(s) \right\| h_n + \delta \right\}. \tag{28}$$

Так как элемент $v_{\delta h_n}(s)$, определенный формулой (21), является решением задачи (28), то из (25), (27) и (28) будет следовать, что

$$\left\| v_{\delta h_n}(s) \right\| \le r, \tag{29}$$

а из (29), что $u_{\delta h_n}(s) = Bv_{\delta h_n}(s) \in M_r$.

Ввиду того, что

$$\left\| Au_{\delta h_n}(s) - f_\delta \right\| \le \left\| Au_{\delta h_n}(s) - A_n u_{\delta h_n}(s) \right\| + \left\| A_n u_{\delta h_n}(s) - f_\delta \right\| \le$$

$$\le \left\| A - A_n \right\| \left\| u_{\delta h_n}(s) \right\| + \left\| A_n u_{\delta h_n}(s) - f_\delta \right\|, \tag{30}$$

а из (8), (9), (29) следует, что

$$\left\| A_n - A \right\| \left\| u_{\delta h_n}(s) \right\| \le r \left\| B \right\| h_n, \tag{31}$$

на основании (28)–(31) получим, что

$$\left\| A_n u_{\delta h_n}(s) - f_\delta \right\| \le 2r\left\| B \right\| h_n + \delta. \quad (32)$$

Из (3) и (32) следует, что

$$\left\| Au_{\delta h_n}(s) - Au_0(s) \right\| \le 2r\left\| B \right\| h_n + 2\delta. \quad (33)$$

Из (22), (23), (29) и (33) следует, что

$$\left\| u_{\delta h_n}(s) - u_0(s) \right\| \le \omega_1(2r\left\| B \right\| + 2\delta, 2r). \quad (34)$$

Из (24) и (34) следует, что

$$\left\| u_{\delta h_n}(s) - u_0(s) \right\| \le \omega(2r\left\| B \right\| h_n + 2\delta, 2r).$$

Окончательно, используя известное свойство модуля непрерывности $\omega(\tau, r)$, приведенное в [2, с. 12], получим, что

$$\left\| u_{\delta h_n}(s) - u_0(s) \right\| \le 2\omega(r\left\| B \right\| h_n + \delta, r).$$

Тем самым теорема доказана.

Литература

1. Танана, В.П. Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором / В.П. Танана // Доклады Академии наук. – 1975. – Т. 224, № 5. – С. 1028–1029.

2. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981. – 156 с.

Танана Виталий Павлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); tvpa@susu.ac.ru.

Сидикова Анна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); 7413604@mail.ru.

Вишняков Евгений Юрьевич, аспирант кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); evgvish@yandex.ru.

Поступила в редакцию 26 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics”
2014, vol. 14, no. 4, pp. 59–64

ON ERROR ESTIMATES FOR REGULARIZING ALGORITHM BASED ON GENERALIZED RESIDUAL METHOD WHEN SOLVING INTEGRAL EQUATIONS

V.P.Tanana, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, tvpa@susu.ac.ru,*
A.I. Sidikova, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, 7413604@mail.ru,*
E.Yu. Vishnyakov, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, evgvish@yandex.ru*

It is necessary to solve problems that don't meet conditions of a Hadamard correctness in case of mathematical simulation of many processes and the phenomena occurring in the nature and society. The main difficulty in solving such problems is that mathematical model and method must be linked to one another. Such problems are called ill-posed problems. The bases for the solution of such tasks were laid down in the works of academicians A.N. Tikhonov, M.M. Lavrentiev, corresponding member V.K. Ivanov.

Special regular methods are created for an effective solution of unstable tasks, based on changeover of the initial incorrect task by the task or sequence of tasks, incorrect in normal sense.

This article is devoted to estimation error of regularizing algorithm based on generalized residual method. The task is incorrect. We have a difficulty associated with the uncertainly of the exact solution in case of the error evaluation of solution methods of ill-posed problem. Therefore it is necessary to develop new effective methods of solution of inverse problems of solid state physics, assess their effectiveness and develop the programs for numerical solution of these tasks. The error evaluation is received for the sampled decision on the basis of the generalized residual method.

Keywords: regularization, integral equation, evaluation of inaccuracy, ill-posed problem.

References

1. Tanana V.P. [About the Pprojection Iterative Algorithms for Operator Equations of the First Kind with a Perturbed Operator]. *Reports of Academy of Sciences*, 1975, vol. 224, iss. 5, pp. 1028–1029. (in Russ.)

2. Tanana V.P. *Metody resheniya operatornykh uravneniy* [Methods for Solving Operator Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 156 p.

Received 26 May 2014