УДК 533.6.011.51 + 533.6.011.72 + 532.529.5

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД*

Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева

Рассмотрена возможность применения методов вычислений, использующих уравнение полной энергии, для численного исследования распространения ударных волн в гетерогенных двухфазных средах. С этой целью был проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения, описывающих течения в аэровзвесях. Показано, что уравнение полной энергии смеси не является инвариантным относительно преобразования Галилея. Это значит, что численные методы, опирающиеся на решение уравнения сохранения полной энергии (например, «метод крупных частиц»), не могут быть применены в настоящее время при решении задач, связанных расчетами течений аэровзвесей. Результаты расчетов течений аэровзвесей, проведенные данными методами, не могут быть признаны достоверными.

Ключевые слова: численный метод, математическая модель, гетерогенная среда, законы сохранения, инвариантность.

Введение

В связи с развитием современной вычислительной техники резко возросла роль математического моделирования физических процессов, используемых в науке и технике. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений. Поэтому с особой остротой встает проблема адекватности математических моделей тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. В природе практически нет чистых веществ, поэтому активно развиваются математические модели многокомпонентных сред [1]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу.

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабление УВ.

В настоящее время на практике ослабление УВ в газе осуществляется путем применения различных экранирующих систем в виде сплошных, перфорированных и разрушающихся перемычек. Один из основных недостатков сплошных и перфорированных перемычек состоит в их весьма большой материалоемкости и соответственно большой величине объемного содержания α твердого конденсированного вещества ($\alpha \approx 1 \div 0{,}1$). Указанный недостаток в меньшей степени относится к перемычкам, разрушающимся при взаимодействии с УВ и образующим экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей.

В последних работах, посвященных исследованию закономерностей ослабления УВ слоями аэровзвесей, для снижения давлений и импульсов УВ предлагается и обсуждается использование «каркасных систем», представляющих собой систему мелкоячеистых решеток.

В настоящей статье на примере анализа математической модели аэровзвеси [2] на инвариантность относительно преобразования Галилея [3] оценим правомерность применения метода крупных частиц при решении данных задач.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 13–01–00072.

1. Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим математическую модель течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений [2], и оценим адекватность результатов, полученных в эксперименте и в расчетах, проведенных методом крупных частиц.

Система уравнений движения аэровзвеси [2] имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = J\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = -J\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} = 0\,; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -f + J v_2\,; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} + \frac{3}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = f - J v_2\,; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = \begin{cases} q, & T_2 < T_s \\ -J e_2, & T_2 \ge T_s \end{cases}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\left(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) p\right] = 0\,; \tag{7}$$

$$e_1 = c_p\left(T_1 - T_0\right) - \frac{p}{\overset{\circ}{\rho}_1}\,; \tag{8}$$

$$e_2 = c_2\left(T_2 - T_0\right) + Q^{\circ} - \frac{p}{\overset{\circ}{\rho}_2}\,; \tag{9}$$

$$p = \frac{\overset{\circ}{\rho}_1 R_1 T_1}{1 - \beta \overset{\circ}{\rho}_1}\,; \tag{10}$$

$$\rho_1 = \overset{\circ}{\rho}_1 \alpha_1\,; \tag{11}$$

$$\rho_2 = \overset{\circ}{\rho}_2 \alpha_2\,; \tag{12}$$

$$\overset{\circ}{\rho}_2 = \mathrm{const}\,; \tag{13}$$

$$q = n\pi d \lambda_1 \mathrm{Nu}\left(T_1 - T_2\right); \tag{14}$$

$$f = n\pi d^2 \overset{\circ}{\rho}_1 C_d \left(v_1 - v_2\right)\left|v_1 - v_2\right| / 8\,; \tag{15}$$

$$E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2}. \tag{16}$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; $\overset{\circ}{\rho}_i$, α_i $(i=1,2)$ – истинные плотности и объемные содержания фаз; $\rho_i, v_i, T_i, e_i, E_i$ – средние плотности, скорости, температуры, внутренние и полные энергии фаз; Q° – теплота химической реакции при $T_2 = T_0$, $p = p_0$; p – давление; n – число частиц в единице объема смеси; β – ковольюм; c_p и c_2 – теплоемкости фаз; λ_1 – теплопроводность газовой фазы; R_1 – газовая постоянная; C_d и Nu – коэффициент трения и число Нуссельта, определяемые числами Рейнольдса (Re) и Прандтля (Pr) относительного движения; d – диаметр частиц; u_s и φ – эмпирические константы, характеризующие скорость горения топлива. Уравнения (1)–(3) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (4)–(5) – уравнения импульса газа и частиц; (6)–(9) – уравнения энергии частиц и смеси в целом; (10)–(14) – уравнения состояния; (15) – уравнения, определяющие члены массового (J), теплового (q) и силового (f) взаимодействия между фазами.

2. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений движения аэровзвесей

Запишем исходную систему уравнений в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D. Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1н} = v_1 + D\,; \tag{17}$$

$$v_{2н} = v_2 + D\,. \tag{18}$$

Координата будет определяться из уравнения

$$x_н = x + Dt\,. \tag{19}$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_н}\,; \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_н}\right)D\,. \tag{21}$$

Таким образом, уравнение (1) с учетом (16)–(20) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_н}D + \frac{\partial \rho_1\left(v_{1н} - D\right)}{\partial x_н} = J\,,$$

или

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_н}D + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial x_н} - \frac{\partial \rho_1 D}{\partial x_н} = J\,.$$

Получаем

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial x_н} = J. \tag{22}$$

Аналогично, уравнения (2) и (3) с учетом (16)–(20) принимают вид:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2н}}{\partial x_н} = -J\,; \tag{23}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_{2н}}{\partial x_н} = 0. \tag{24}$$

Запишем уравнение (4) в новой системе координат:

$$\frac{\partial \rho_1 (v_{1н} - D)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 (v_{1н} - D)}{\partial x_н}D + \frac{\partial \rho_1 (v_{1н} - D)^2}{\partial x_н} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_н} = -f\,,$$

или

$$\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_1 D}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н} D}{\partial x_н} - \frac{\partial \rho_1 D^2}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}^2}{\partial x_н} - 2\frac{\partial \rho_1 v_{1н} D}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 D^2}{\partial x_н} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_н} = -f\,.$$

Используя (22), получаем

$$\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}^2}{\partial x_н} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_н} = -f + J v_{2н}. \tag{25}$$

Аналогично получается уравнение (5) с учетом (21):

$$\frac{\partial \rho_2 v_{2н}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2н}^2}{\partial x_н} + \frac{3}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_н} = f - J v_{2н}. \tag{26}$$

Рассмотрим уравнение (6):

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial x_н}D + \frac{\partial \rho_2 e_2\left(v_{2н} - D\right)}{\partial x_н} = \begin{cases} q, & T_2 < T_s \\ -J e_2, & T_2 \ge T_s \end{cases},$$

или

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial x_н}D + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2н}}{\partial x_н} - \frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_н} = \begin{cases} q, & T_2 < T_s \\ -J e_2, & T_2 \ge T_s \end{cases}.$$

Откуда получаем

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2н}}{\partial x_н} = \begin{cases} q, & T_2 < T_s \\ -Je_2, & T_2 \geq T_s \end{cases}. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение энергии (7), учитывая (16),

$$\frac{\partial\left(\rho_1\left(e_1 + \frac{(v_{1н} - D)^2}{2}\right) + \rho_2\left(e_2 + \frac{(v_{2н} - D)^2}{2}\right)\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho_1\left(e_1 + \frac{(v_{1н} - D)^2}{2}\right) + \rho_2\left(e_2 + \frac{(v_{2н} - D)^2}{2}\right)\right)}{\partial x_н} D +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1(v_{1н} - D)\left(e_1 + \frac{(v_{1н} - D)^2}{2}\right) + \rho_2(v_{2н} - D)\left(e_2 + \frac{(v_{2н} - D)^2}{2}\right) + \left(\alpha_1(v_{1н} - D) + \alpha_2(v_{2н} - D)\right)p\right] = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 (v_{1н} - D)^2}{2\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 (v_{2н} - D)^2}{2\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 D}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 D (v_{1н} - D)^2}{\partial x_н} +$$

$$+\frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_2 D (v_{2н} - D)^2}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_{1н}}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н} (v_{1н} - D)^2}{2\partial x_н} - \frac{\partial \rho_1 e_1 D}{\partial x_н} -$$

$$-\frac{\partial \rho_1 D (v_{1н} - D)^2}{2\partial x_н} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2н}}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_2 v_{2н} (v_{2н} - D)^2}{2\partial x_н} - \frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_н} -$$

$$-\frac{\partial \rho_2 D (v_{2н} - D)^2}{2\partial x_н} + \frac{\partial \alpha_1 p (v_{1н} - D)}{\partial x_н} + \frac{\partial \alpha_2 p (v_{2н} - D)}{\partial x_н} = 0.$$

После алгебраических преобразований получаем

$$\frac{\partial \rho_1\left(e_1 + \frac{v_{1н}^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2\left(e_2 + \frac{v_{2н}^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}\right) + \frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2н}}{\partial x_н}\right) -$$

$$-D\left(\frac{\partial \rho_1 v_{1н}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}^2}{\partial x_н} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_н}\right) - D\left(\frac{\partial \rho_2 v_{2н}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2н}^2}{\partial x_н} + \frac{3}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_н}\right) +$$

$$+\frac{D}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 v_{1н}\left(e_1 + \frac{v_{1н}^2}{2}\right)}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_2 v_{2н}\left(e_2 + \frac{v_{2н}^2}{2}\right)}{\partial x_н} + \left(\alpha_1 \frac{\partial v_{1н}}{\partial x_н} + \alpha_2 \frac{\partial v_{2н}}{\partial x_н}\right)p +$$

$$+\frac{\partial \rho_1 D (v_{1н} - D)^2}{2\partial x_н} + \frac{\partial \rho_2 D (v_{2н} - D)^2}{2\partial x_н} = 0.$$

Согласно (22) и (23) сумма третьего и четвертого слагаемых обращается в ноль, а пятое и шестое слагаемые согласно (25) и (26) будут равны $(Df - DJv_{2н})$ и $(-Df + DJv_{2н})$. В результате получим

$$\frac{\partial(\rho_1 E_{1н} + \rho_2 E_{2н})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_{1н} E_{1н} + \rho_2 v_{2н} E_{2н} + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)p\right] +$$

$$+\frac{D}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_н} + \frac{\partial \rho_1 D (v_{1н} - D)^2}{2\partial x_н} + \frac{\partial \rho_2 D (v_{2н} - D)^2}{2\partial x_н} = 0. \tag{28}$$

Заключение

1. Анализ инвариантности законов сохранения аэровзвесей [2] относительно преобразования Галилея при переходе в подвижную систему координат уравнения неразрывности газа и частиц

(22) и (23), уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси – (24) и уравнения движения аэровзвесей (25) и (26) являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

2. Уравнение полной энергии смеси в новой системе координат принимает вид (28), в нем появляются дополнительные слагаемые, что говорит о нарушении инвариантности относительно преобразований Галилея.

3. Применение метода «крупных частиц» является не правомерным для расчета течений аэровзвесей [2], так как использует неинвариантное относительно преобразований Галилея уравнение полной энергии смеси, а результаты расчетов не могут быть признаны достоверными.

Авторы выражают свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // ИФЖ. – 2011.– Т. 84, № 1.– С. 74–92.

2. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматулин // Известия АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

3. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 13, № 27 (286). – С. 69–73.

Ковалев Юрий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); yum_kov@mail.ru.

Ковалева Елена Адамовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических методов в экономике, Челябинский государственный университет (г. Челябинск); ea_kov@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"
2014, vol. 14, no. 1, pp. 57–62

THE ANALYSIS OF SOME NUMERICAL METHODS APPLICATION FOR THE SOLUTION OF MULTICOMPONENT MEDIA MECHANICS TASKS

Yu.M. Kovalev, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, yum_kov@mail.ru,*
E.A. Kovaleva, *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ea_kov@mail.ru*

This paper analyzes the possibility of using computational methods using the total energy equation, a numerical study of shock wave propagation in heterogeneous two-phase media. To this end, an analysis of invariance under a Galilean transformation of the conservation equations describing flow in aerosuspension was held. This means that the numerical methods based on the solution of the equation of conservation of total energy (for example, "the method of large particles") can not be applied at present in solving problems related to flow computations for Air-Suspensions. The results of calculations of Air-Suspensions conducted by these methods can not be considered reliable.

Keywords: numerical method, mathematical model, heterogeneous medium, conservation laws, invariance.

References

1. Kuropatenko V.F. New Models of Continuum Mechanics [Novie modeli mechaniki sploshnykh sred]. *Inzhenerno-fizicheskii Zhurnal* [*Engineering and Physical Magazine*], 2011, vol. 84, no 1, pp. 74–92.

2. Vaynshteyn P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatulin H.A. Unsteady Problems of the Monopropellant Combustion in Air [Nestatsionarnyi zadachi gorenia gazovzvesi unitarnogo topliva] *Izvestiya academii nauk SSSR, seriya mekhanica zhidkosti i gaza* [*News of Sciences Academy of the USSR*, *Series mechanics of liquid and gas*], 1981, no. 3, pp. 39–43.

3. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analysis of the Invariance under the Galilean Transformation of some Mathematical Models of Multi-media [Analiz invariantnosti otnositel'no preobrazovaniya Galileya nekotorykh modeley matematicheskikh mnogokomponentnykh sred] *Bulletin of the South-Ural State University. Series "Mathematical Modeling and Programming"*, 2012, iss. 13, no. 27 (286), pp. 69–73. (in Russian)

Поступила в редакцию 9 декабря 2013 г.