

# Системы навигации и управления авиационно-космической техники

УДК 681.51

DOI: 10.14529/ctcr150410

## ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**В.В. Булаев, А.Ю. Горанов**

*АО «НПО автоматики имени академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург*

Приводится описание основных существующих задач теории оптимальных систем. Определяются ключевые особенности задачи оптимального управления для космических аппаратов и средств выведения. Ставится задача о формировании дискретной линейной математической модели на основе непрерывной модели, описываемой системой линейных неоднородных нестационарных дифференциальных уравнений. В качестве объекта управления рассматривается модель возмущенного движения первой ступени ракеты-носителя типа «Союз» этапа 2.1в вдоль программной траектории с учетом дополнительных степеней свободы (упругих колебаний корпуса и колебаний свободной поверхности жидкого наполнения баков) в плоскости тангажа. Сформирована непрерывная модель объекта в векторно-матричной явной канонической форме. Произведена дискретизация непрерывной модели, а также описана методика проведения дискретизации. Произведен сравнительный анализ процессов в непрерывной и дискретной моделях.

*Ключевые слова: фазовое пространство, стабилизация движения, оптимальное управление, дискретная модель, упругий механический объект.*

### Введение

Современные системы управления ракетами-носителями (РН) и космическими аппаратами (КА) представляют собой сложные многоконтурные динамические системы, включающие в качестве одного из основных элементов бортовую цифровую вычислительную машину, основной задачей которой является реализация управляемого движения летательного аппарата. Под управляемым движением обычно понимают любое движение под действием управляющих сил, в результате которого механический объект переходит из некоторого начального состояния в заданное конечное состояние. Как начальное, так и конечное состояния могут определяться параметрами движения (координатами и их производными) или функциями от этих параметров. Часто при проектировании систем управления механическим объектом приходится решать задачи синтеза оптимальных управлений.

Задачи синтеза оптимальных систем являются одними из самых распространенных и востребованных методов управления, которые были объектами исследования в большом количестве литературы [1–4].

Статья сформирована следующим образом: в первой части рассматриваются основные задачи теории оптимальных систем и методы их решения. Во второй части получена математическая векторно-матричная модель возмущенного движения первой ступени ракеты-носителя в явной канонической форме Коши. Производится дискретизация непрерывной модели и описывается методика дискретизации. В конце статьи приведены сравнительные графики непрерывной модели, используемой для расчета параметров регулятора ракеты космического назначения «Союз-2» этапа 1в, и дискретизированной модели.

### 1. О задаче оптимального управления

Как правило, задача проектирования оптимальной системы управления сводится к задаче разработки такого управляющего устройства (УУ), которое бы могло наилучшим способом управлять объектом управления (ОУ), приводя к некоторому эталонному (программному) значению выходную величину.

Однако при разработке и создании систем управления сложными механическими объектами необходимо учитывать, что их динамика зависит от множества факторов (упругих свойств элементов конструкции объекта, наличия жидкого наполнения топливных баков, наличия априорно неизвестных факторов среды и конструктивных особенностей, неполноты информации об объекте и возмущающих воздействиях и др.). Поэтому решение этой задачи требует разработки нелинейной математической модели динамики движения ОУ, учитывающей наличие как управляющих, так и возмущающих воздействий, имеющихся ограничений (физических, технических, и пр.) и дефицита информации.

Фактически в любых системах автоматического регулирования информацию об объекте нельзя считать полной, и часто отсутствие того или иного вида информации чрезвычайно существенно. Из-за неполноты информации об ОУ, УУ на основании имеющейся и поступающей информации должно определять состояние ОУ, а затем на основании апостериорных данных об ОУ формировать управляющее воздействие.

Целью управления часто является достижение экстремума для некоторого параметра или показателя качества, который называется критерием оптимальности. Задача теории оптимальных систем состоит в том, чтобы при заданных начальных условиях найти такой алгоритм (стратегию) управляющего устройства, при котором критерий оптимальности не превосходил бы некоторых заданных границ или чтобы его значение было минимальным. Такой алгоритм называется оптимальным.

В качестве критерия оптимальности в переходном процессе обычно принимают время регулирования или величину максимального отклонения от некоторой априорно заданной величины или функции времени.

Как правило, из-за налагаемых жестких ограничений на время работы и энергетические ресурсы критериями оптимальности могут служить время выполнения маневра и количество расходуемого топлива. Иными словами, задачей является кратчайший переход из начального состояния в некоторое конечное состояние с минимальной затратой энергоресурсов. Однако стоит отметить, что невозможно ставить задачу одновременного достижения экстремума для двух или более функций одной или нескольких переменных, это связано с тем, что в общем случае экстремумы у различных функций или функционалов не соответствуют одному и тому же значению совокупности аргументов. Поэтому значений аргументов, соответствующих экстремуму одновременно двух или более функций и функционалов, в общем случае не существует. Можно ставить лишь задачу достижения экстремума одной функции или функционала, но при этом накладывать дополнительные условия в любом количестве об ограничении других функций или функционалов [4].

Если же рассматривать решение задачи стабилизации первой ступени РН, то необходимо сказать, что в этом случае основной задачей управления является минимизация максимального отклонения параметров состояния объекта от некоторого программного состояния, которое определяет опорную траекторию движения РН. На всем участке полета необходимо использовать такое управление, которое бы минимизировало рассогласование между текущим и некоторым требуемым состоянием объекта. Поэтому возникает потребность в использовании таких систем, которые бы обеспечивали наилучший по сравнению с другими системами результат в наихудшем случае, то есть в использовании системы оптимально-минимаксного типа.

Чтобы применить оптимально-минимаксный подход, необходимо произвести математическое моделирование. Для реализации моделирования в программной среде необходимо располагать математической моделью в форме системы разностных уравнений в рекуррентной форме, причем динамика дискретной модели должна быть максимально схожа с динамикой непрерывной модели. Также использование такой модели в дальнейшем упростит построение областей достижимости, на основании которых будет производиться решение задачи адаптивного минимаксного управления. Кроме того, при моделировании непрерывной динамики в специа-

лизированных программных пакетах, например, MATLAB Simulink, происходит дискретизация модели внутри самого программного пакета, информация о которой зачастую недоступна разработчику.

### 2. Математическая модель объекта

В качестве объекта рассмотрим модель возмущенного движения первой ступени РН. Как известно, движение первой ступени характеризуется наличием аэродинамических сил и моментов, что существенно усложняет решение задачи стабилизации. Помимо аэродинамических воздействий, на динамику объекта накладываются возмущения, обусловленные колебаниями упругой конструкции корпуса механического объекта и колебаниями свободной поверхности жидкости в баках. В связи с этим перед разработчиком алгоритмов системы стабилизации ставится сложная задача, так как необходимо не только парировать всевозможные возмущения, действующие на объект, но также и контролировать переменные состояния дополнительных степеней свободы, которые, в свою очередь, не поддаются измерению.

Первым этапом решения задачи стабилизации является получение адекватной дискретной математической векторно-матричной модели.

#### 2.1. Описание объекта

Динамика возмущенного движения первой ступени РН вдоль программной траектории с учетом воздействий, обусловленных упругими колебаниями корпуса (УКК) и подвижностью жидкого наполнения баков (ЖНБ), в плоскости тангажа описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [5, 6]:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} = -C_{\vartheta\vartheta}\vartheta - C_{\vartheta V_y}V_y - \sum_k T_k \ddot{\beta}_k^{(z)} - \sum_k P_k \beta_k^{(z)} - \sum_i \nu_i s_i^{(y)} - C_{\vartheta\delta_\vartheta} \delta_\vartheta + \bar{M}_z^B, \\ \dot{V}_y = -C_{V_y\vartheta}\vartheta - C_{V_y V_y}V_y + \sum_k U_k \ddot{\beta}_k^{(z)} - \sum_i \mu_i s_i^{(y)} - C_{V_y\delta_\vartheta} \delta_\vartheta + \bar{F}_y^B, \\ \ddot{\beta}_k^{(z)} = -\varepsilon_k \dot{\beta}_k^{(z)} - r_k \beta_k^{(z)} - r_k \vartheta - t_k \ddot{\vartheta} + u_k \dot{V}_y, \\ \ddot{s}_i^{(y)} = -\frac{\Delta_i \omega_i}{\pi} \dot{s}_i^{(y)} - \omega_i^2 s_i^{(y)} + k_i \delta_\vartheta, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vartheta$  – вариация угла тангажа;

$V_y$  – вариация проекции вектора линейной скорости центра масс объекта на ось  $Oy$  связанной системы координат,  $V_y = \dot{y}$ ;

$C_{\vartheta\vartheta}$ ,  $C_{\vartheta V_y}$ ,  $C_{V_y\vartheta}$ ,  $C_{V_y V_y}$  – коэффициенты, характеризующие динамику возмущенного движения РН как абсолютно твердое жесткое тело;

$C_{\vartheta\delta_\vartheta}$ ,  $C_{V_y\delta_\vartheta}$  – коэффициенты, характеризующие эффективность рулевых органов;

$\delta_\vartheta$  – угол отклонения рулевых органов в канале тангажа;

$\bar{M}_z^B$  – возмущающий момент вокруг оси  $Oz$  объекта, отнесенный к моменту инерции;

$\bar{F}_y^B$  – возмущающая сила вдоль оси  $Oy$ , отнесенная к массе;

$k$  – порядковый номер бака РН;

$\beta_k^{(z)}$  – угол отклонения свободной поверхности жидкости в  $k$ -м баке относительно поперечной оси  $Oz$ ;

$r_k$  и  $\varepsilon_k$  – квадрат собственной частоты и коэффициент демпфирования колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м баке;

$U_k$ ,  $T_k$ ,  $u_k$ ,  $t_k$  – коэффициенты инерционных связей, характеризующие взаимовлияние перемещений РН как твердого тела и колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -том баке;

$P_k$  – коэффициенты позиционных связей, характеризующие взаимовлияние перемещений РН как твердого тела и колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м баке;

$i$  – порядковый номер тона изгибных колебаний упругого корпуса РН;

$s_i^{(y)}$  – обобщенный прогиб упругого корпуса на  $i$ -м тоне колебаний в направлении поперечной оси  $Oy$ ;

$\omega_i$  и  $\Delta_i$  – собственная частота и логарифмический декремент  $i$ -го тона изгибных колебаний упругого корпуса РН;

$\mu_i$  и  $\nu_i$  – коэффициенты действующих на РН возмущающих сил и моментов, обусловленных перекосами вектора тяги двигательной установки вследствие деформаций упругого корпуса РН при изгибе на  $i$ -м тоне;

$k_i$  – коэффициент эффективности исполнительного органа, управляющего движением РН в канале тангажа, по отношению к изгибным колебаниям упругого корпуса РН на  $i$ -м тоне колебаний.

Динамические коэффициенты и коэффициенты эффективности рулевых органов рассчитываются следующим образом [6]:

$$C_{\vartheta\vartheta} = \frac{57,3C_y^\alpha q S_m (C_M - C_d)L}{J_{zz}},$$

$$C_{\vartheta V_y} = -\frac{C_{\vartheta\vartheta}}{V},$$

$$C_{V_y\vartheta} = -\frac{P + 57,3C_{y_a}^\alpha q S_m}{mV},$$

$$C_{V_y V_y} = \frac{57,3C_y^\alpha q S_m}{mV},$$

$$C_{\vartheta\delta_\vartheta} = \frac{P_{упр}(C_M L - X_{упр})}{J_{zz}},$$

$$C_{V_y\delta_\vartheta} = -\frac{P_{упр}}{m},$$

где  $C_y^\alpha$  – производная по углу атаки коэффициента нормальной силы;

$C_{y_a}^\alpha$  – производная по углу атаки коэффициента подъемной силы;

$q$  – скоростной напор;

$S_m$  – площадь мидела РН;

$C_M$  и  $C_d$  – относительное положение центра масс и центра давления РН;

$L$  – теоретическая длина РН;

$J_{zz}$  – осевой момент инерции РН вокруг связанной оси  $Oz$ ;

$V$  – относительная скорость центра масс РН;

$m$  – масса РН;

$P$  – тяга, развиваемая двигательной установкой;

$P_{упр}$  – тяга, развиваемая управляющими двигателями в канале тангажа;

$X_{упр}$  – плечо управляющих двигателей.

Теперь запишем уравнения выхода объекта [5, 6]:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_i = \vartheta + \sum_i f_i'(X_{ГП}) \dot{s}_i^{(y)}, \\ \dot{\vartheta}_i = \dot{\vartheta} + \sum_i f_i'(X_{ДУС}) \dot{s}_i^{(y)}, \\ V_y^{каж} = V_y + l\dot{\vartheta} + \sum_i f_i(X_{ГП}) \dot{s}_i^{(y)}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\vartheta_i$  – измеряемый угол тангажа;

$\dot{\vartheta}_i$  – измеряемая угловая скорость по тангажу;

$V_y^{каж}$  – измеряемая кажущаяся скорость;

$f_i(X)$  и  $f_i'(X)$  – форма и производная формы изгибных колебаний  $i$ -го тона упругого корпуса изделия для соответствующих точек  $X$  на корпусе РН;

$X_{ГП}$  и  $X_{ДУС}$  – точки расположения гиросtabilизированной платформы (ГП) и датчиков угловых скоростей (ДУС) соответственно;

$l$  – расстояние вдоль продольной оси  $Ox$  изделия от точки установки ГП до центра масс.

Отметим, что в статье рассматривается объект с тремя выходными параметрами в канале тангажа, однако их может быть больше. Например, часто для получения достоверной информации об угловой скорости изделия прибегают к комплексированию сигналов с двух ДУС, разнесенных по корпусу изделия. В таком случае необходимо дополнить уравнения выхода (2) соответствующими выражениями для выходных параметров.

## 2.2. Формирование векторно-матричной непрерывной модели

Получим векторно-матричную модель объекта в форме Коши, для этого удобно систему (1) переписать в виде

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} + \sum_k T_k \ddot{\beta}_k^{(z)} = -C_{\vartheta\vartheta}\vartheta - C_{\vartheta V_y} V_y - \sum_k P_k \beta_k^{(z)} - \sum_i v_i s_i^{(y)} - C_{\vartheta\delta_g} \delta_g + \bar{M}_z^B, \\ \dot{V}_y - \sum_k U_k \ddot{\beta}_k^{(z)} = -C_{V_y\vartheta}\vartheta - C_{V_y V_y} V_y - \sum_i \mu_i s_i^{(y)} - C_{V_y\delta_g} \delta_g + \bar{F}_y^B, \\ \ddot{\beta}_k^{(z)} + t_k \ddot{\vartheta} - u_k \dot{V}_y = -\varepsilon_k \dot{\beta}_k^{(z)} - r_k \beta_k^{(z)} - r_k \vartheta, \\ \dot{s}_i^{(y)} = -\frac{\Delta_i \omega_i}{\pi} \dot{s}_i^{(y)} - \omega_i^2 s_i^{(y)} + k_i \delta_g. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим как  $n$  параметр размерности системы, примем  $n = 2 + i + k$ , где  $i$  – количество тонов УКК,  $k$  – количество баков РН с подвижным наполнением. Используя систему ОДУ (3) и уравнения выхода (2), можно составить векторно-матричную математическую модель динамики возмущенного движения первой ступени РН вдоль программной траектории в следующем неявном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов размерностью  $2n \times 2n$ ;

$\mathbf{B}$  – матрица управления и возмущений размерностью  $2n \times 3$ ;

$\mathbf{C}$  – матрица выхода объекта размерностью  $3 \times 2n$ ;

$\mathbf{E}$  – матрица коэффициентов левой части системы уравнений (3) размерностью  $2n \times 2n$ ;

$\mathbf{x}$  – фазовый вектор объекта;

$\mathbf{u}$  – вектор управляющих воздействий и возмущений;

$\mathbf{y}$  – вектор выходных параметров.

Распишем векторно-матричную модель (4) в блочном виде согласно системам уравнений (3) и (2):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times 3} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_g \\ \bar{M}_z^B \\ \bar{F}_y^B \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \vartheta_i \\ \dot{\vartheta}_i \\ V_y^{\text{каж}} \end{bmatrix} &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь  $\mathbf{I}$  – единичная матрица размерностью  $n \times n$ ;

$\mathbf{O}$  – нулевая матрица размерностью  $n \times n$ ;

$\mathbf{O}_{n \times 3}$  – нулевая матрица размерностью  $n \times 3$ ;

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_1 & \dots & T_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -U_1 & \dots & -U_k & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & -u_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_k & -u_k & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -C_{\vartheta\vartheta} & 0 & -P_1 & \dots & -P_k & -v_1 & \dots & -v_i \\ -C_{V_y\vartheta} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_1 & \dots & -\mu_i \\ -r_1 & 0 & -r_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_k & 0 & 0 & \dots & -r_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\omega_i^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -C_{\vartheta V_y} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -C_{V_y V_y} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\Delta_1 \omega_1}{\pi} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\frac{\Delta_i \omega_i}{\pi} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -C_{\vartheta \delta_\vartheta} & 1 & 0 \\ -C_{V_y \delta_\vartheta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_i & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & f'_1(X_{\Gamma\Pi}) & \dots & f'_i(X_{\Gamma\Pi}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & f'_1(X_{\text{дус}}) & \dots & f'_i(X_{\text{дус}}) \\ l & 1 & 0 & \dots & 0 & f_1(X_{\Gamma\Pi}) & \dots & f_i(X_{\Gamma\Pi}) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}$  – набор переменных состояния фазового вектора,  $\mathbf{x} = [\vartheta \ y \ \beta_1^{(z)} \ \dots \ \beta_k^{(z)} \ s_1^{(y)} \ \dots \ s_i^{(y)}]^T$ .

Таким образом, выражение (5) представляет собой модель объекта в неявном виде. Но такая запись математической модели является неудобной для получения дискретной рекуррентной модели объекта, поэтому следует привести ее к каноническому явному виду. Очевидно, что модель в каноническом явном виде можно получить из выражения (4) следующим образом

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{E}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}.$$

Тогда выражение (5) примет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \mathbf{M} & \mathbf{R} \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times 3} \\ \mathbf{R} \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\vartheta \\ \bar{M}_z^B \\ \bar{F}_y^B \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_{\text{и}} \\ \dot{\vartheta}_{\text{и}} \\ V_{y \text{ каж}} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

Явная каноническая форма записи модели (6) позволяет осуществить дискретизацию без особых затруднений.

### 2.3. Дискретизация непрерывной модели

Методы дискретизации систем, в том и числе и систем, заданных в пространстве состояний, подробно изложены в [7]. Далее представлена методика дискретизации модели в пространстве состояний, предложенная Джоном Литлом (John N. Little) в 1985 году [8], применительно к модели объекта (6). Данная методика основывается на методах, изложенных в [7], и представляет собой алгоритм для быстрого получения дискретной модели системы в пространстве состояний, соответствующей заданной непрерывной модели.

Итак, пусть имеем непрерывную модель объекта в явном каноническом виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Ей в соответствие можно поставить следующую дискретную векторно-матричную математическую модель

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда следует, что для формирования дискретной математической модели необходимо преобразовать только уравнение состояний. Чтобы получить матрицы  $\mathbf{\Phi}$  и  $\mathbf{\Gamma}$ , составим следующую квадратную матрицу  $\mathbf{\theta}$

$$\mathbf{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_{n_b \times 2n} & \mathbf{O}_{n_b \times n_b} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{O}_{n_b \times 2n}$  – нулевая матрица размерностью  $n_b \times 2n$ ;

$\mathbf{O}_{n_b \times n_b}$  – нулевая матрица размерностью  $n_b \times n_b$ ;

$n_b$  – количество столбцов матрицы управления  $\mathbf{B}$ .

Согласно выражению (6), матрица  $\mathbf{\theta}$  примет вид

$$\mathbf{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O}_{n \times 3} \\ \mathbf{RM} & \mathbf{RN} & \mathbf{RH} \\ \mathbf{O}_{3 \times n} & \mathbf{O}_{3 \times n} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

Получив матрицу  $\mathbf{\theta}$ , введем в рассмотрение матрицу  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = e^{\mathbf{\theta}T_0} = \mathbf{V} \text{diag}(e^{\lambda}) \mathbf{V}^{-1},$$

здесь  $T_0$  – шаг дискретизации по времени;

$\lambda$  – вектор-столбец собственных значений матрицы  $\mathbf{\theta}T_0$ ;

$\mathbf{V}$  – матрица, столбцы которой являются соответствующими собственными правыми векторами матрицы  $\mathbf{\theta}T_0$ , причем  $\mathbf{\theta}T_0 \mathbf{V} = \mathbf{V} \text{diag}(\lambda)$ .

Тогда, рассчитав матрицу  $\mathbf{S}$ , искомые матрицы  $\mathbf{\Phi}$  и  $\mathbf{\Gamma}$  определяются как

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,2n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,1} & s_{2n,2} & \cdots & s_{2n,2n} \end{array} & \begin{array}{ccc} s_{1,2n+1} & s_{1,2n+2} & s_{1,2n+3} \\ s_{2,2n+1} & s_{2,2n+2} & s_{2,2n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{2n,2n+1} & s_{2n,2n+2} & s_{2n,2n+3} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} s_{2n+1,1} & s_{2n+1,2} & \cdots & s_{2n+1,2n} \\ s_{2n+2,1} & s_{2n+2,2} & \cdots & s_{2n+2,2n} \\ s_{2n+3,1} & s_{2n+3,2} & \cdots & s_{2n+3,2n} \end{array} & \begin{array}{ccc} s_{2n+1,2n+1} & s_{2n+1,2n+2} & s_{2n+1,2n+3} \\ s_{2n+2,2n+1} & s_{2n+2,2n+2} & s_{2n+2,2n+3} \\ s_{2n+3,2n+1} & s_{2n+3,2n+2} & s_{2n+3,2n+3} \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

В результате получена дискретная модель объекта в форме (7). Заметим, что так как объект является нестационарным, то необходимо многократно производить расчет матриц  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  и  $\mathbf{C}$ , то есть, по сути, эти матрицы являются трехмерными, каждый слой которых соответствует определенному моменту времени. Но ввиду того, что параметры объекта являются медленноменяющимися величинами, можно обойтись разбивкой траектории на характерные участки, и получать матрицы  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  и  $\mathbf{C}$  методом линейной интерполяции.

## 2.4. Результаты моделирования

Далее представлены результаты моделирования, полученные в программной среде MATLAB. В качестве объекта рассматривалась модель возмущенного движения первой ступени РН среднего класса «Союз-2» этапа 1в с учетом колебаний свободной поверхности жидкого наполнения в двух баках (по одному тону в каждом баке) и четырех тонов колебаний упругого корпуса.

На рис. 1 отражено влияние выбора количества слоев матриц  $\Phi$ ,  $\Gamma$  и  $C$ . Из рисунка видно, что выбор количества слоев несущественно сказывается на динамике модели. Это означает, что линейная интерполяция в данном случае вполне оправдана. Было принято решение оставить 131 слой (при этом траектория «нарезается» на слои посекундно).

Влияние выбора шага дискретизации на динамику модели показано на рис. 2. Результаты анализа показывают, что выбор шага дискретизации также несущественно сказывается на динамике, поэтому, как и в автомате стабилизации,  $T_0$  был принят равным 0,03 с. Это упрощает задачу, поскольку позволяет отказаться от реализации двухтактной системы.

На рис. 3 и 4 приведено сравнение графиков изменения переменных состояния  $\vartheta$  и  $V_y$  непрерывной и дискретной моделей при выборе вышеуказанных параметров дискретной модели.

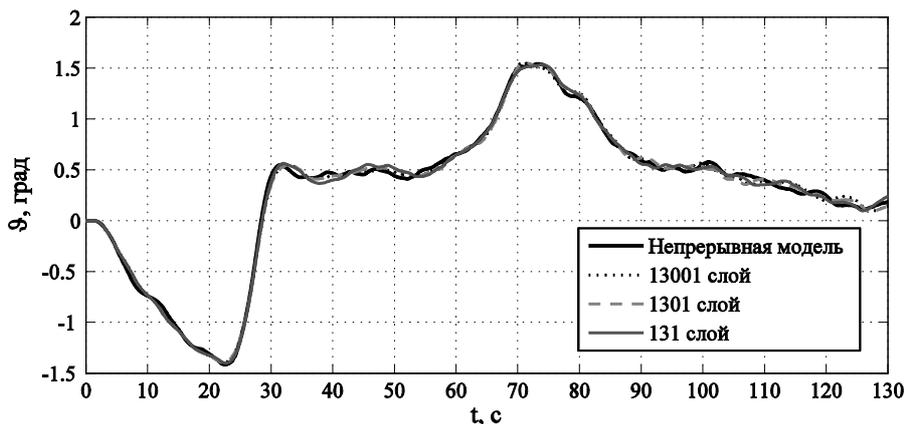
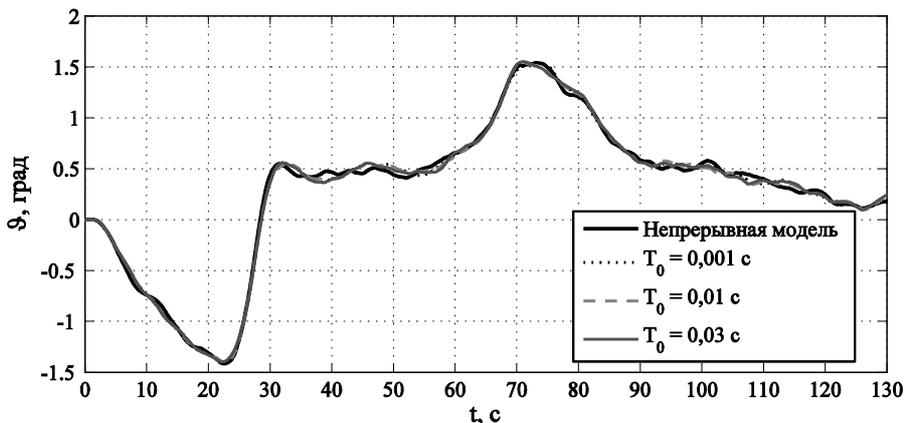
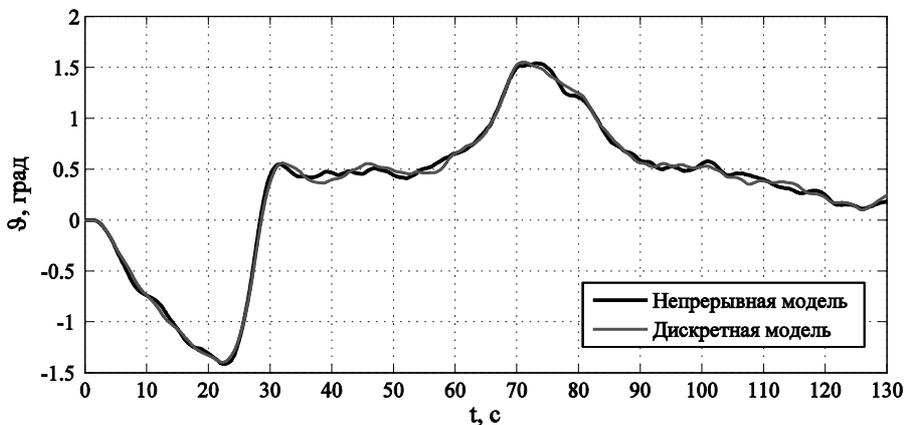


Рис. 1. Влияние выбора количества слоев матриц на динамику модели

Рис. 2. Влияние выбора шага дискретизации  $T_0$  на динамику моделиРис. 3. Сравнение графиков изменения  $\vartheta$  дискретной и непрерывной моделей

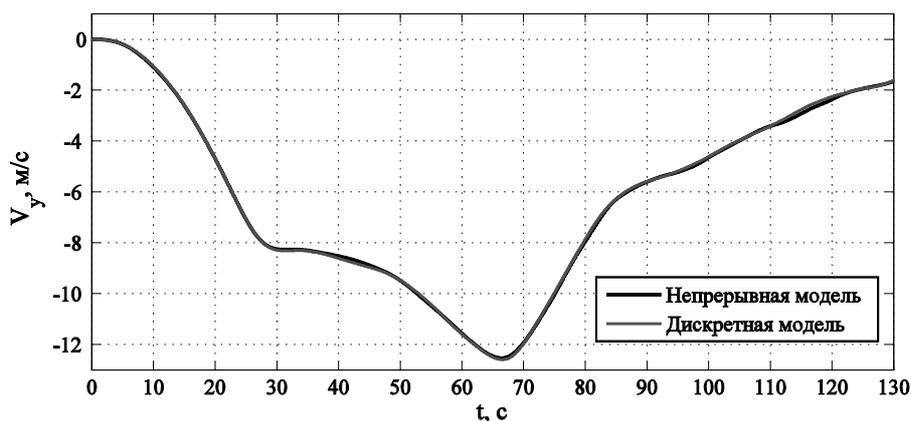


Рис. 4. Сравнение графиков изменения  $V_y$  дискретной и непрерывной моделей

## Заключение

В первой части статьи сформулированы основные положения задачи оптимального управления упругим механическим объектом. Было показано, что динамика движения таких объектов зависит от многочисленных факторов и неконтролируемых параметров, информация о которых зачастую отсутствует. Отмечено, что в зависимости от объекта управления и выполняемой им задачи требуется решать конкретную задачу оптимального управления. Так, например, для оптимизации управления движением космического аппарата приоритетными параметрами служат быстроедействие и экономия энергетических ресурсов. Однако при рассмотрении движения первой ступени ракеты-носителя уже нельзя говорить об оптимизации одного-двух параметров, так как необходимо выполнить требования относительно всех ключевых параметров движения. В этом случае для решения такой задачи предлагается использовать метод минимаксной оптимизации.

Во второй части статьи приведена модель динамики возмущенного движения первой ступени ракеты-носителя. Отражено получение непрерывной линейной модели объекта в явной канонической векторно-матричной форме, произведена дискретизация непрерывной модели. Преимуществом описанного метода дискретизации является то, что он позволяет получить математическую модель объекта управления в удобной для программирования рекуррентной векторно-матричной форме. Причем, как показано на рисунках 3 и 4, дискретизированная модель практически полностью повторяет динамику непрерывной модели даже при довольно большом шаге квантования по времени (0,03 с), что приводит к уменьшению затрат вычислительных ресурсов при моделировании и построении областей достижимости.

Получение дискретной модели объекта является первым шагом к решению задачи оптимального управления сложным механическим объектом в части стабилизации.

## Литература

1. Атанс, М. *Оптимальное управление* / М. Атанс, П.Л. Фалб; под. ред. д.т.н. проф. Ю.И. Топчиева. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
2. Красовский, Н.Н. *Теория управления движением (Линейные системы)* / Н.Н. Красовский; под ред. А.А. Могилевского, Р.Т. Янушевского. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Мирошник, И.В. *Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы* / И.В. Мирошник; под. ред. Е. Строгоновой. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.
4. Фельдбаум, А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем* / А.А. Фельдбаум; под. ред. В.Н. Новосельцева, Р.Ш. Рутмана. – М.: Физматгиз, 1963. – 552 с.
5. Абгарян, К.А. *Динамика ракет: учеб. для студентов вузов* / К.А. Абгарян, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин [и др.]; под. ред. акад. В.П. Мишина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 464 с.
6. Игдалов, И.М. *Ракета как объект управления: учеб.* / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков [и др.]; под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.
7. Franklin, G.F. *Digital control of dynamic systems* / Gene F. Franklin, J. David Powell, Michael L. Workman; 3rd ed. – Addison Wesley Longman Inc., MA, USA, 1997. – 744 p.

8. Little, J.N. *Ctrl-C and matrix environments for the computer-aided design of control systems* / J.N. Little, A. Emami-Naeini, S.N. Bangert // *Systems Control Technology Inc., Palo Alto, CA, USA, 1985. – P. 111–124.*

**Булаев Владимир Владимирович**, инженер-конструктор отдела стабилизации, АО «НПО автоматики имени академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург; BulaevVV@npoa.ru, bulaev1991@mail.ru.

**Горанов Александр Юрьевич**, инженер-конструктор отдела стабилизации, АО «НПО автоматики имени академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург; GoranovAY@npoa.ru, goranovayu@mail.ru.

*Поступила в редакцию 23 сентября 2015 г.*

DOI: 10.14529/ctcr150410

## OPTIMAL CONTROL PROBLEM DEFINITION AND STATE-SPACE SIMULATION OF FLEXIBLE MECHANICAL PLANT DYNAMICS

V.V. Bulaev, BulaevVV@npoa.ru, bulaev1991@mail.ru,

A.Yu. Goranov, GoranovAY@npoa.ru, goranovayu@mail.ru

*“Scientific & Production Association of Automatics named after the academician N.A. Semikhatov”  
JCS, Ekaterinburg, Russian Federation*

This paper provides the description of main existing optimal control theory problems. Also the key features of an optimal control problem for spacecraft and launch vehicles are identified. The authors pose the problem of formation of linear discrete-time mathematical model based on continuous-time model described by linear inhomogeneous nonstationary differential equations system. A first-stage launch vehicle “Soyuz-2.1v” perturbed motion model with additional degrees of freedom (flexible body fluctuations and slosh modes fluctuations in the fuel tanks) in pitch plane is considered. Continuous-time model in vector-matrix explicit canonical form is composed. The sampling of continuous-time model is performed, sampling method is described. Comparative response analysis of the continuous-time and discrete-time models is produced.

*Keywords: state-space, motion stabilization, optimal control, discrete-time model, flexible mechanical plant.*

### References

1. Athans M., Falb P.L. *Optimal Control: an Introduction to the Theory and its Applications*. New York, McGraw-Hill, 1966. 879 p.
2. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem (Lineynye sistemy)* [The Theory of Control of Motion (Linear Systems)]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p.
3. Miroshnik I.V. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Nelineynye i optimalnie sistemy* [Automatic Control Theory. Nonlinear and Optimal Systems]. St. Petersburg. Piter Publ., 2006. 272 p.
4. Feldbaum A.A. *Osnovy teorii optimal'nikh avtomaticheskikh sistem* [Base of Optimal Automatic System Theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 552 p.
5. Abgaryan K.A. *Dynamika raket: uchebnik dlya studentov vuzov* [Rocket Dynamic: Textbook for Students]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1963. 552 p.
6. Igdalov I.M. *Raketa kak ob'ekt upravleniya* [Rocket as a Control Object]. Dnepropetrovsk, ART-PRESS Publ., 2004. 544 p.

7. Gene F. Franklin, J. David Powell, Michael L. Workman. Digital Control of Dynamic Systems. Addison Wesley Longman Inc., MA, USA, 1997. 744 p.

8. J.N. Little, A. Emami-Naeini, S.N. Bangert Ctrl-C and Matrix Environments for the Computer-Aided Design of Control Systems. Systems Control Technology Inc., Palo Alto, CA, USA, 1985, pp. 111–124.

*Received 23 September 2015*

---

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Булаев, В.В. Формулировка задачи оптимального управления и моделирование динамики упругого механического объекта в фазовом пространстве / В.В. Булаев, А.Ю. Горанов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 90–100. DOI: 10.14529/ctcr150410

### FOR CITATION

Bulaev V.V., Goranov A.Yu. Optimal Control Problem Definition and State-Space Simulation of Flexible Mechanical Plant Dynamics. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 90–100. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr150410