УДК 517.948 DOI: 10.14529/ctcr160217

ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

А.И. Сидикова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Модуль непрерывности обратного оператора приводит к минимизации невыпуклого функционала. На практике модуль непрерывности может быть вычислен для очень узкого класса задач. Главной трудностью при его вычислении является коммутируемость входящих в задачу операторов. Так как это условие в реальных задачах редко выполняется, то возникла необходимость в численных алгоритмах для оценки погрешности.

Предложен численный алгоритм для оценки приближенного решения операторного уравнения первого рода, полученного методом невязки, не использующий модуль непрерывности обратного оператора. Показано, что эта оценка погрешности не хуже оценки, использующей модуль непрерывности обратного оператора. Предложенный в работе подход позволяет значительно расширить класс задач, к которым он применим, а также получить точность оценки, не уступающую той, которая могла бы быть получена с помощью модуля непрерывности обратного оператора.

Ключевые слова: регуляризация, метод невязки, оценка погрешности, некорректная задача.

Введение

Во многих областях естествознания приходится сталкиваться с задачами, которые в математике принято называть некорректными. Основы теории исследования и методов решения таких задач были разработаны в трудах академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и член-корр. РАН В.К. Иванова. Развитие вычислительной техники стимулировало интерес к некорректным задачам. В настоящее время практически во всех разделах математики (включая алгебру, математический анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т. д.), в физике, геофизике, медицине, астрономии и многих других областях знаний, в которых применимы математические методы исследований, изучаются такие задачи.

При решении некорректно поставленных задач важную роль играет оценка погрешности приближенного решения. Эта оценка позволяет судить о степени достоверности этого решения. До последнего времени при оценке погрешности приближенного решения использовался модуль непрерывности обратного оператора [1], который не только позволял получить эту оценку, но и доказать ее точность [2], а также оптимальность, используемого метода [2].

Заметим, что к настоящему времени модуль непрерывности обратного оператора достаточно хорошо исследован [3]. Одной из слабых сторон модуля непрерывности [2], является то, что при его вычислении требуется коммутируемость операторов, используемых в задаче. Этот факт значительно сужает класс задач, к которым применим модуль непрерывности.

В настоящей статье предложен численный алгоритм для оценки решения некорректной задачи. Предложенный в работе подход позволяет значительно расширить класс задач, к которым он применим, а также получить точность оценки, не уступающую той, которая могла бы быть получена с помощью модуля непрерывности обратного оператора.

Постановка задачи

Пусть U, F и V – гильбертовы пространства, A – инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий пространство U в F, а B – линейный вполне непрерывный оператор, отображающий V в U.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F. \tag{1}$$

Предложим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1) и $u_0 \in M_r$, где $M_r = B\overline{S}_r$, а $\overline{S}_r = \{v:\ v \in V,\ \ \|v\| \le r\}$, но f_0 не известен, а вместо него даны $f_\delta \in F$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется по f_δ, δ и M_r определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить уклонение $\|u_\delta - u_0\|$ приближенного решения u_δ от точного u_0.

Метод невязки

Метод невязки приближенного решения уравнения (1), следуя работам [4–6], заключается в сведении этого уравнения к вариационной задаче

$$\inf\left\{\|v\|^2 : \quad v \in V,\ \|Cv - f_\delta\| \le \delta\right\}, \tag{2}$$

где $C = AB$.

Из [6] следует существование и единственность решения задачи (2). Решение этой задачи обозначим через v_δ. Тогда приближенное решение u_δ уравнения (1) определим формулой

$$u_\delta = Bv_\delta. \tag{3}$$

Теперь перейдем к оценке погрешности $\|u_\delta - u_0\|$.

Известно [7], что

$$\|u_\delta - u_0\| \le 2\omega(\delta, r),$$

где $\omega(\delta, r) = \sup\left\{\|u\| \ :\ \ u \in M_r,\ \|Au\| \le \delta\right\}$.

Введем функцию $\gamma(\delta, r, u_\delta)$ формулой

$$\gamma(\delta, r, u_\delta) = \sup\left\{\|u_\delta - Bv\| \ :\ \|v_\delta\| \le \|v\| \le r,\ \ \|Cv - f_\delta\| \le \delta\right\}. \tag{4}$$

Из (3) следует, что

$$\|u_\delta - u_0\| \le \gamma(\delta, r, u_\delta),$$

а из (3) и (4), что $\gamma(\delta, r, u_\delta) \le 2\omega(\delta, r)$.

Так как множество $\{Bv : \|v_\delta\| \le \|v\| \le r\}$ компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ этого компакта.

Таким образом, $\gamma_n(\delta, r, u_\delta) = \max_i\left\{\|u_i - u_\delta\| : \ i = 1, 2, ..., n\right\}$, а $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ – ε-сеть компакта $\{Bv : \|v_\delta\| \le \|v\| \le r\}$.

Заключение

В работе предложен численный подход к получению оценки погрешности приближенного решения операторного уравнения первого рода, полученного методом невязки. Показано, что эта оценка погрешности не хуже оценки, использующей модуль непрерывности обратного оператора.

Литература

1. *Иванов, В.К. Об оценке погрешности при решении некорректных задач / В.К. Иванов, Т.И. Королюк // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, № 1. – С. 30–34.*

2. *Иванов, В.К Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М: Наука, 1976. – С. 206.*

3. *Tanana, V.P. The optimum of the M.M. Lavrent'ev method / V.P. Tanana, T.N. Rudakova // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2011. – Vol. 18, no. 8. – P. 935–944.* DOI: 10.1515/jiip.2011.012

4. *Домбровская, И.Н. О решении линейных некорректных уравнений в гильбертовом пространстве / И.Н. Домбровская // Мат. записки Уральск. ун-та. – 1964. – Т. 4, no. 4. – С. 36–40.*

5. *Иванов, В.К О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1966. – Т. 6, no. 6. – С. 1089–1094.*

6. *Васин, В.В Приближенное решение операторных уравнений первого рода / В.В. Васин, В.П. Танана // Мат. записки Уральск. ун-та. – 1969. – Т. 6, no. 2. – С. 27–37.*

7. *Танана, В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач / В.П. Танана // Доклады Академии наук. – 1975. – Т. 220, no. 5. – С. 1035–1037.*

Сидикова Анна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; 7413604@mail.ru.

Поступила в редакцию 1 марта 2016 г.

DOI: 10.14529/ctcr160217

NUMERICAL APPROACH TO ESTIMATE THE ERROR OF ILL-POSED PROBLEMS

***A.I. Sidikova**, 7413604@mail.ru*

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The modulus of continuity of the inverse operator leads to minimization of nonconvex functions. In practice, the modulus of continuity can be calculated for a very narrow class of problems. The main difficulty in the calculation is the commutation members of the task operators. Since this condition in a real application is rarely executed, it became necessary in numerical algorithms for error estimation.

In this paper we consider a numerical algorithm to evaluate the approximate solution of operator equations of the first kind obtained by the method of residuals not taking into account the modulus of continuity of the inverse operator. It is shown that this error estimate is not worse than the estimation using the modulus of continuity of the inverse operator. The proposed approach can significantly extend the class of problems to which it is applicable and to obtain the accuracy of the estimation, not inferior to that which could be obtained by using the modulus of continuity of the inverse operator.

Keywords: regularization, method of residuals, evaluation of inaccuracy, ill-posed problem.

References

1. Ivanov V.K., Koroluk T.I [On the Error Estimation in the Solution of Ill-posed Problems]. *Journal of Calculated. Mat. and Math. Physics*, 1969, vol. 9, no. 1, pp. 30–34. (in Russ.)

2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana, V.P *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 206 p.

3. Tanana V.P, Rudakova T.N. The Optimum of the M.M. Lavrent'ev Method. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems,* 2011, vol. 18, no. 8, pp. 935–944. DOI: 10.1515/jiip.2011.012

4. Dombrovskaya I.N. [On the Solution of Linear Ill-Posed Equations in Hilbert Space]. *Mathematical Notes of Ural University*,1964, vol. 4, no. 4, pp. 36–40. (in Russ.)

5. Ivanov V.K. [On an Approximate Solution of Operator Equations of the First Kind]. *Journal of Calculated. Mat. and Math. Physics*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 1089–1094. (in Russ.)

6. Vasin V.V., Tanana V.P. [The Approximate Solution of Operator Equations of the First Kind]. *Mathematical Notes of Ural University*, 1969, vol. 16, no. 2, pp. 27–37. (in Russ.)

7. Tanana V.P. [About the Optimality of Methods for Solving Nonlinear Unstable Problem]. *Reports of the Academy of Sciences*, 1975, vol. 220, no. 5, pp. 1035–1037. (in Russ.)

Received 1 March 2016

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Сидикова, А.И. Численный подход к оценке погрешности некорректных задач / А.И. Сидикова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 150–153. DOI: 10.14529/ctcr160217

FOR CITATION

Sidikova A.I. Numerical Approach to Estimate the Error of Ill-Posed Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 150–153. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr160217