УДК 621.9

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ДЕТАЛЕЙ

А.А. Кошин, А.В. Геренштейн

EFFICIENT DATA PROCESSING ALGORITHM FOR AUTOMATED LARGE PART CONTROL SYSTEMS

A.A. Koshin, A.V. Gerenshteyn

Рассмотрен алгоритм обработки данных автоматизированных систем контроля крупногабаритных деталей методом координатных измерений устройством типа «Измерительная рука».

Ключевые слова: алгоритм обработки данных, автоматизированные системы контроля, координатные измерения, «измерительная рука».

This article describes the data processing algorithm for automated large part processing systems. The algorithm uses coordinate measuring by "measuring arm" device.

Keywords: data processing algorithm, automated control systems, coordinate measuring, "measuring arm".

Введение

В современной координатной методике для контроля крупногабаритных деталей все большее применение находят устройства типа «Измерительная рука» (рис. 1) [2]. Это устройство через систему из 5 датчиков определяет координаты точки, в которой позиционируется измерительный наконечник.

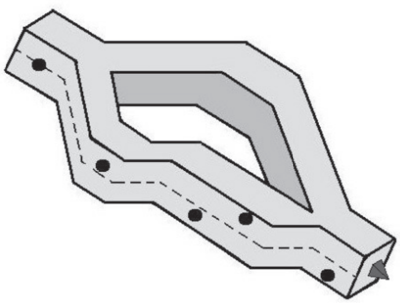

Рис. 1. Схема рукояти прибора с датчиками для координатных измерений

Вид поверхности определяется в результате обработки массива координат измеренных точек этой поверхности. Для получения уравнения поверхности обычно используется линейная регрессия с использованием метода наименьших квадратов (МНК). В данном случае этот метод не вполне корректен, поэтому он сопрягается с условным экстремумом по части переменных, что связано с особенностями метода собственных векторов и собственных значений и со статистической оценкой полученных результатов [3]. Эти особенности и рассматриваются в данной работе.

1. Постановка задачи

Пусть имеется массив значений координат отдельных точек, принадлежащих контролируемой детали. Геометрический прототип детали – поверхность второго порядка. Пусть координаты получены с помощью координатной измерительной машины с некоторой погрешностью (деталь отличается от своего прототипа из-за неизбежных огрехов изготовления) [5]. Необходимо определить вид контролируемой поверхности, разработав методы оценки коэффициентов уравнения поверхности и точности полученных результатов.

Иначе постановку задачи можно записать так:

Кошин Анатолий Александрович – д-р техн. наук, профессор кафедры технологии машиностроения, Южно-Уральский государственный университет; akoshin@inbox.ru

Геренштейн Аркадий Васильевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет; prima@prima.susu.ac.ru

Koshin Anatoly Alexandrovich – Doctor of Science (Engineering), Professor of Mechanical Engineering Technology Department, South Ural State University; akoshin@inbox.ru

Gerenshteyn Arkadiy Vasilevich – Candidate of Science (Physics and Mathematics), Assistant Professor of Applied Mathematics Department, South Ural State University; prima@prima.susu.ac.ru

Пусть $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, N}$ – координаты некоторых точек поверхности, описываемой уравнением:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$
$$+2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0. \quad (1)$$
$$X_i = x_i + \delta, \quad Y_i = y_i + \delta, \quad Z_i = z_i + \delta,$$
$$i = \overline{1, N},$$

где δ – случайная величина, распределенная нормально, $M\delta = 0$, $D\delta = d$.

Пусть K – матрица размера $N \times 9$:

$$K = \\ = \begin{pmatrix} X_i{}^2 & Y_i^2 & Z_i{}^2 & X_iY_i & X_iZ_i & Y_iZ_i & X_i & Y_i & Z_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_N{}^2 & Y_N{}^2 & Z_N{}^2 & X_NY_N & X_NZ_N & Y_NZ_N & X_N & Y_N & Z_N \end{pmatrix}.$$

$$K\alpha = 1_N b + \varepsilon.$$

Необходимо решить задачу:

$$(K\alpha - b)^T(K\alpha - b) \to \min,$$

минимизация происходит по параметрам α *и* b.

α *и* b – оценки коэффициентов уравнения поверхности второго порядка.

Задача определения вида контролируемой поверхности на основе массива координат точек включает в себя следующие основные этапы:

1. Разработка методов оценки коэффициентов уравнения поверхности второго порядка и статистической оценки полученных результатов.
2. Создание алгоритма распознавания вида поверхности второго порядка.
3. Программная реализация алгоритма.

2. Условная оптимизация

Если все коэффициенты уравнения (1) умножить на одно и то же число, то вновь полученное уравнение будет описывать ту же самую поверхность. Поэтому надо выделить какое-то одно уравнение. Так как в общем уравнении поверхности второго порядка:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz +$$
$$+2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

и по крайней мере один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля, то в правую часть уравнения регрессии будут перенесены переменные x, y и z. А наше ограничение будет состоять в том, что:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 = 1.$$

Воспользуемся тем, что расстояние ищется для поверхности второго порядка, для которой известно общее уравнение. Для нахождения расстояния от точки до поверхности будем решать следующую задачу условной оптимизации (рис. 2):

$$\begin{cases} (X - X_0)^T(X - X_0) \to \min, \\ X^TAX + 2X^Tb + c = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где X – координаты точки поверхности;

X_0 – координаты заданной точки;

A, B и C – матрица, вектор-столбец и скаляр, задающие уравнение поверхности.

Введем обозначения:

$$\xi = X - X_0, \quad (3)$$
$$D = X_0{}^TAX_0 + 2X_0{}^Tb + c. \quad (4)$$

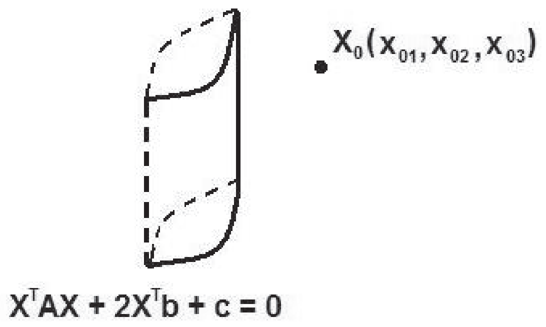

Рис. 2. Тестовая точка, не лежащая на распознанной поверхности

В силу (3) и (4) система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \xi^T\xi \to \min, \\ \xi^TA\xi + 2\xi^TAX_0 + 2\xi^Tb + D = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Теперь искомое расстояние от точки до поверхности – это длина вектора ξ.

Для решения задачи (5) составим функцию Лагранжа:

$$L = \xi^T\xi - \lambda(\xi^TA\xi + 2\xi^TAX_0 + 2\xi^Tb + D) \to \min.$$

Будем искать седловую точку функции Лагранжа [1], для этого найдем ее производную по вектору X и приравняем ее к нулю:

$$2\xi - \lambda(2A\xi + 2AX_0 + 2b) = 0.$$

Сократив на 2 и обозначив

$$T = AX_0 + b, \quad (6)$$

окончательно получим:

$$(E - \lambda A)\xi = \lambda T,$$

где E – единичная матрица размера 3 на 3.

Если матрица $E - \lambda A$ не вырождена, то

$$\xi = \lambda(E - \lambda A)^{-1}T, \quad (7)$$

λ найдем из условия системы (5), подставив ξ в это условие:

$$T^T(E - \lambda A)^{-1}A(E - \lambda A)^{-1}T + 2\lambda T^T(E - \lambda A)^{-1}AX_0 +$$
$$+\lambda^2 + 2\lambda T^T(E - \lambda A)^{-1}b + D = 0 \quad (8)$$

Упростим это уравнение, заметив, что:

$$\lambda A = \lambda A + E - E = -(E - \lambda A) + E.$$

Сделаем соответствующую замену в первом слагаемом в (6), учитывая (8), получим:

$$-\lambda T^T(E - \lambda A)^{-1}T + \lambda T^T(E - \lambda A)^{-2}T +$$
$$+2\lambda T^T(E - \lambda A)^{-1}T + D = 0,$$
$$\lambda T^T(E - \lambda A)^{-2}T + \lambda T^T(E - \lambda A)^{-1}T + D = 0. \quad (9)$$

После нахождения обратной матрицы $(E - \lambda A)^{-1}$ и выполнения операций сложения и умножения над матрицами в (9) получим алгебраическое уравнение относительно λ шестой степени. Мы определим коэффициенты этого уравнения, подставляя конкретные значения λ в (9), это упростит работу с матрицами, а затем аппроксимируя результаты многочленом шестой степени. Решив полученное уравнение, подставим его вещественные корни в (7), если они не обращают в 0 матрицу $E - \lambda A$, получим кандидатов на решение системы (5).

Вычислим λ, являющиеся решением уравнения $|E - \lambda A| = 0$. Каждое λ подставим в (7), если система (7) совместна для некоторого λ, решим ее и получим дополнительного кандидата на решение системы (5).

Из векторов-кандидатов выберем вектор с наименьшей длиной – это и есть искомое расстояние от точки до поверхности второго порядка.

3. Оценка коэффициентов уравнения

Для оценки коэффициентов уравнения поверхности второго порядка используем линейную регрессию. В качестве переменных x_i регрессии используем сгенерированные координаты тестовых точек и необходимые их произведения. Еще раз отметим, что использование линейной регрессии в данном случае правомерно, так как регрессия называется линейной [4, 7], если она линейна относительно параметров регрессии, а не переменных. N наблюдений за переменными x_i, $i = 1, \ldots, n$ образуют матрицу X размерности $N \times n$ (столбцы – переменные, строки – наблюдения). В качестве параметров регрессии выступают коэффициенты общего уравнения поверхности – они образуют вектор α. Уравнение регрессии по наблюдениям записывается следующим образом:

$$X\alpha = 1_N a + \varepsilon,$$

где 1_N – вектор-столбец размерности N, состоящий из единиц; ε – вектор-столбец размерности N случайных ошибок.

Оценка параметров регрессии производится из условия минимизации остаточной дисперсии:

$$s_e^2 = \frac{1}{N}\alpha^T \hat{X}^T \hat{X}\alpha = \alpha^T M\alpha \to \min,$$

где $\hat{X} = X - 1_N\bar{x}$ – матрица центрированных значений наблюдений; $M = \frac{1}{N}\hat{X}^T\hat{X}$ – ковариационная матрица переменных регрессии.

4. Способ измерения

Рассматривается метод координатных измерений, реализованный устройством типа «Измерительная рука». Рассмотрим случай с пятью датчиками (возможно большее количество датчиков, и тогда координаты измеряемой точки могут быть получены более точно).

Перед началом работы измерительный наконечник устанавливается в начало координат прибора. Снимаются координаты датчиков – контрольные данные. Затем снимаются координаты датчиков при прикосновении измерительного наконечника к точкам контролируемой детали.

Пусть имеются контрольные данные для измерений: $p_i(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1,5}$ – координаты датчиков при нахождении острия в начале координат. Для определения положения острия достаточно 4 датчиков. Будем выбирать 4 датчика из 5, без повторений. Способов сделать это $C_5^4 = 5$. Для каждой четверки будем решать систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{i1} + \lambda_2 x_{i2} + \lambda_3 x_{i3} + \lambda_4 x_{i4} = 0; \\ \lambda_1 y_{i1} + \lambda_2 y_{i2} + \lambda_3 y_{i3} + \lambda_4 y_{i4} = 0; \\ \lambda_1 z_{i1} + \lambda_2 z_{i2} + \lambda_3 z_{i3} + \lambda_4 z_{i4} = 0; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \end{cases}$$

где (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) – контрольные координаты датчика p_{ij}; i – номер четверки; j – номер вектора в четверке.

Таким образом, для каждой четверки (если система имеет решение – иначе не используем соответствующую четверку) получим коэффициенты, по этим коэффициентам для последующих координат датчиков из соответствующих четверок будем получать координаты измеряемой точки:

$$x_i = \lambda_1 x_{i1} + \lambda_2 x_{i2} + \lambda_3 x_{i3} + \lambda_4 x_{i4};$$
$$y_i = \lambda_1 y_{i1} + \lambda_2 y_{i2} + \lambda_3 y_{i3} + \lambda_4 y_{i4};$$
$$z_i = \lambda_1 z_{i1} + \lambda_2 z_{i2} + \lambda_3 z_{i3} + \lambda_4 z_{i4},$$

где (x_i, y_i, z_i) – координаты измеряемой точки для i-го набора датчиков; (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) – координаты датчика p_{ij} во время очередного измерения; i – номер четверки; j – номер вектора в четверке.

Поскольку имеется k наборов координат измеренной точки, где k – число используемых четверок, будем уточнять значение измеряемой координаты, находя среднее значение по k полученным.

Для реализации последнего рассмотренного метода координатных измерений была написана программа, которая согласно полученным выкладкам вычисляет коэффициенты λ_i, а по ним восстанавливает координаты точек контролируемой поверхности по известным координатам датчиков.

5. Анализ результатов

Для проверки целесообразности использования данного алгоритма распознавания поверхностей второго порядка был проведен ряд численных экспериментов.

Так как программа работает со сгенерированными тестовыми данными, а не с реально измеренными координатами некоторой контролируемой поверхности, то важным является вопрос, какого рода ошибку накладывать на генерируемые координаты. Для сравнения на тестовые данные накладывали случайные погрешности, распределенные по нормальному закону и равномерно. При этом после ряда экспериментов были оценены среднее значение отклонений для различных погрешностей, среднеквадратическое отклонение, а также характер распределения отклонений тестовых точек от найденной поверхности (табл. 1).

Из таблицы видно, что наложение равномерной случайной погрешности дает более точные результаты на выходе. Значимость нормальности уменьшается с повышением точности данных. Скорее всего, это объясняется тем, что отклонения от поверхности близки между собой, малы и образуют своего рода сгусток, поэтому нормальность не выявляется. К тому же следует помнить, что критерий Пирсона, как и критерий Колмогорова [6], правомерно использовать для числа опытов, стремящегося к бесконечности, и полученные значения значимости нормальности по этим критериям для конечного числа точек не могут дать адекватного ответа на вопрос, распределены ли отклонения тестовых данных от поверхности нормально. Но это не означает некорректности данных оценок. Сравнивая данные оценки для нескольких методов распознавания, можно будет сравнивать и эти методы: эти оценки нужны для единообразия.

Тестовые данные в работе могут генерироваться двумя разными способами: по спирали и случайно. Для этих случаев также были оценены среднее значение отклонений тестовых точек от поверхности, среднеквадратические отклонения этих величин и проверена гипотеза о том, что эти отклонения распределены по нормальному закону (табл. 2).

Для меньшего числа вычислений генерация точек по спирали дает лучшие результаты распознавания, чем случайная генерация точек. Но с ростом числа наблюдений результаты выравниваются, чего следовало ожидать. При этом значимость нормальности у распределения отклонений при случайной генерации точек выше, чем значимость нормальности распределения отклонений при генерации точек по спирали. Так как на практике необходимо увеличить точность измерений при наименьшем числе замеров, то целесообразно производить замеры точек по спирали.

6. Пример

Заданное уравнение поверхности $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Определение вида поверхности.

Составляем характеристический определитель и приравниваем его нулю.

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0-k \end{vmatrix} = 0.$$

Таблица 1

Распределение погрешности	Количество точек	Погрешность	Среднее отклонение от поверхности	СКО	Значимость нормальности по Пирсону	Значимость нормальности по Колмогорову
Равномерное	100	0,1	0,05104	0,03286	0,07	0,39
		0,01	0,00515	0,00349	0,03	0,27
		0,001	0,00049	0,00032	0,18	0,29
	200	0,1	0,04646	0,02941	0,15	0,24
		0,01	0,00485	0,00319	0,02	0,19
		0,001	0,00046	0,00029	0	0,01
Нормальное	100	0,1	0,06332	0,04207	0,34	0,48
		0,01	0,00551	0,00304	0,04	0,10
		0,001	0,00064	0,00044	0,03	0,18
	200	0,1	0,06626	0,05052	0,0007	0,05
		0,01	0,00653	0,00526	0,006	0,02
		0,001	0,00065	0,00041	0,001	0,008

Таблица 2

Способ генерации точек	Количество точек	Нормальная погрешность	Среднее отклонение от поверхности	СКО	Значимость нормальности по Пирсону	Значимость нормальности по Колмогорову
Случайно	100	0,1	0,07344	0,05096	0,60	0,50
		0,01	0,00669	0,00490	0,16	0,15
		0,001	0,00077	0,00051	0,07	0,35
	200	0,1	0,07037	0,04877	0,03	0,014
		0,01	0,00660	0,00506	0,0005	0,0007
		0,001	0,00068	0,00046	0,1	0,2
По спирали	100	0,1	0,06332	0,04207	0,34	0,48
		0,01	0,00551	0,00304	0,04	0,10
		0,001	0,00064	0,00044	0,03	0,18
	200	0,1	0,06626	0,05052	0,0007	0,05
		0,01	0,00653	0,00526	0,006	0,02
		0,001	0,00065	0,00041	0,001	0,008

Раскрывая характеристический определитель, получим характеристическое уравнение:

$-k_3 + 2k^2 - k = 0$.

Инварианты: 2 1 0.

Семиинварианты: –1 –1 0.

Корни уравнения: 1 1 0.

Круговой цилиндр. Радиус 1.

Главные направления:

e1 = (1, 0, 0),

e2 = (0, 1, 0),

e3 = (0, 0, 1).

Ось симметрии e3 проходит через точку (1, 0, 0).

Полученное уравнение поверхности

$0{,}997136\, x^2 + y^2 + 0{,}00246279\, xy -$
$-0{,}0000107\, xz - 0{,}000551462\, yz -$
$-1{,}99803\, x - 0{,}00155618\, y +$
$+ 0{,}00054715\, z + 0{,}00102194 = 0.$

Определение вида поверхности.

Составляем характеристический определитель и приравниваем его нулю.

$$\begin{vmatrix} 0{,}997 - k1 & 0{,}001 & 0 \\ 0{,}001 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0-k \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая характеристический определитель, получим характеристическое уравнение:

$-k + 1{,}99713\, k^2 - 0{,}997132\, k = 0.$

Инварианты: 1,99713 0,997132 0.

Семиинварианты: –0,995994 –0,997013 8,52636e–07.

Корни уравнения: 1,00046 0,996679 0.

Однополостный гиперболоид.

Центр: (1,00334; 0,0793403; 289,404).

Полуоси: a = 0,960104; b = 0,961922; c = –997,31.

Главные направления:

e1 = (0,3477; 0,9376; –0,0003),

e2 = (0,9376; –0,3477; 0,0001),

e3 = (0; 0,0003, 1).

Измеренные координаты точек подставим в заданное и в полученное уравнения поверхностей. Случайные величины – отклонения от нуля левых частей этих уравнений. Для заданной и полученной поверхностей числовые характеристики распределений этих случайных величин таковы:

Выборочное среднее	0,0000622	–0,000018
Выборочная дисперсия	0,0000359	0,0000326
Среднеквадратическое отклонение	0,0059909	0,005712
Несмещенная дисперсия	0,0000363	0,000033
Несмещенное СКО	0,0060211	0,0057407
Асимметрия	0,0950496	0,0862137
Эксцесс	–1,1001362	–1,1104791
Значимость нормальности по Пирсону	0,1785014	0,1443826
Значимость нормальности по Колмогорову	0,4304202	0,4875912
Уровень значимости совпадения	0,993765	
Уровень значимости подобия	0,999633	

Из статистического сравнения заданного и полученного уравнений следует, что в полученном уравнении коэффициент при x^2 незначимо отличается от 1, коэффициент при x незначимо отличается от –2, а все прочие коэффициенты и свободный член незначимо отличаются от нуля.

Литература

1. *Алексеев, В.М. Оптимальное управление / В.М Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 432 с.*

2. *Базров, Б.М. Основы технологии машиностроения / Б.М. Базров. – М.: Машиностроение, 2005. – 736 с.*

3. *Галеев, Э.М. Оптимизация: теории, примеры, задачи / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.*

4. *Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. образование, 2009. – 479 с.*

5. *Гузеев, В.И. Автоматизированные методы и средства измерений, испытаний и контроля в машиностроении / В.И. Гузеев, В.И. Сурков, А.Г. Схиртладзе. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – 346 с.*

6. *Суслов, В.И. Эконометрия / В.И. Суслов, Н.М. Ибрагимов, Л.П. Талышева. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2005. – 741 с.*

7. *Тутубалин, В.Н. Теория вероятностей / В.Н. Тутубалин. – М.: МГУ, 1972. – 230 с.*

Поступила в редакцию 11 марта 2012 г.