

О РАСЧЕТЕ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ С НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫМ РЕЗЕРВОМ

Е.А. Алёшин

RELIABILITY CALCULATION OF RESTORABLE SYSTEMS WITH NONRESTORABLE RESERVE

E.A. Aleshin

Описана работа восстанавливаемой системы с невозстанавливаемым резервом. Приведены граф переходов системы и математическое описание. Рассчитаны основные показатели надежности такой системы.

Ключевые слова: восстанавливаемая система, работоспособность, надежность.

The operation of a restorable system with nonrestorable reserve is described in the article. System transition graph and mathematical descriptions are given. Basic reliability index of the system is shown.

Keywords: restorable system, operating capability, reliability.

Рассмотрим систему из $n+1$ идентичных элементов, из которых только один является рабочим, а остальные n – ненагруженными резервными элементами. Система функционирует таким образом, что после отказа рабочего элемента производится его замена (восстановление системы) одним из резервных элементов, при этом восстановление отказавшего элемента не производится и в дальнейшей работе системы он участия не принимает. Система функционирует до тех пор, пока не откажет последний $n+1$ элемент. Смысл такого рода резервирования заключается в том, что хотя каждый отказ элемента, стоящего на рабочем месте, фиксируется как отказ системы, но быстрая замена отказавшего элемента позволяет форсированно перевести систему в состояние работоспособности, поддерживая ее высокую готовность к функционированию [1].

Начав работать, система последовательно попадает из состояния работоспособности в состояние отказа, затем опять в состояние работоспособности и т. д., причем за время функционирования система может побывать только в конечном числе состояний $H_0, H_1, \dots, H_{2n}, H_{2n+1}$. Пусть система находится в работоспособном состоянии, если она находится в «четных» состояниях $H_0, H_2, \dots, H_{2j}, \dots, H_{2n}$; система находится в состоянии отказа, если она находится в «нечетных» состояниях $H_1, H_3, \dots, H_{2j+1}, \dots, H_{2n+1}$. Та-

ким образом, H_{2j} – состояние работоспособности, в которое система переходит после j -го отказа и j -го восстановления; H_{2j+1} – состояние отказа, в которое система переходит после j -го восстановления и, соответственно, $j+1$ -го отказа.

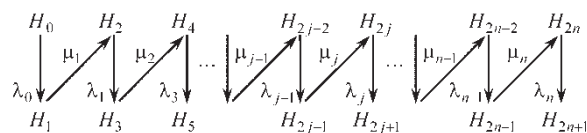


Рис. 1. Граф переходов восстанавливаемой системы

Граф переходов описанной выше системы показан на рис. 1. На графе все нечетные (нижние) состояния являются состояниями отказа системы, а все четные (верхние) состояния – состояниями работоспособности. Введем обозначения

$$N = 2n + 1; \lambda_j = \omega_{2j}; \mu_j = \omega_{2j+1};$$

$$\mu_{-1} = 0; 0 \leq j \leq n,$$

тогда граф переходов можно представить в другом виде (рис. 2), что соответствует графу переходов системы для «схемы гибели» [1, 2].

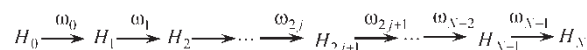


Рис. 2. Преобразованный граф переходов («схема гибели»)

Алёшин Евгений Анатольевич – канд. техн. наук, доцент кафедры систем управления, Южно-Уральский государственный университет; su@susu.ac.ru

Aleshin Evgeniy Anatolievich – Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of Control Systems Department, South Ural State University; su@susu.ac.ru

Решая систему дифференциальных уравнений, отвечающих графу на рис. 2, вероятность $p_k(t)$ того, что система в момент времени t находится в состоянии H_k [1] при начальных условиях $p_0(0) = 1; p_k(0) = 0; 1 \leq k \leq N$;

для случая, когда все ω_i различны, получим

$$p_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1} \omega_j \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\omega_i t}}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^k (\omega_l - \omega_i)}; \quad 1 \leq k \leq N-1; \quad (1)$$

$$p_N(t) = 1 - \prod_{j=0}^{N-1} \omega_j \sum_{i=0}^{N-1} \frac{e^{-\omega_i t}}{\omega_i \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{N-1} (\omega_l - \omega_i)}. \quad (2)$$

Если замена отказавшего элемента на резервный производится с одной и той же интенсивностью μ независимо от номера отказа системы, а интенсивности последовательности отказов одинаковы и равны λ , т. е.

$$\omega_{2j+1} = \mu; \quad 0 \leq j \leq \frac{N-3}{2}; \quad \omega_{2j} = \lambda; \quad 0 \leq j \leq \frac{N-1}{2},$$

то в этом случае [1] получаем для четных k ($0 \leq k \leq N-1$)

$$p_k(t) = \frac{(\lambda\mu)^{\frac{k}{2}}}{(\lambda - \mu)^k} \left\{ e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^i C_{\frac{k}{2}-1+i}^{\frac{k}{2}-1} \frac{[(\mu - \lambda)t]^{\frac{k}{2}-i}}{\left(\frac{k}{2}-i\right)!} + \right. \\ \left. + (-1)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} C_{\frac{k}{2}+i}^{\frac{k}{2}-1} \frac{[(\mu - \lambda)t]^{\frac{k}{2}-i-1}}{\left(\frac{k}{2}-i-1\right)!} \right\}, \quad (3)$$

для нечетных k ($0 \leq k \leq N$)

$$p_k(t) = \frac{\lambda(\lambda\mu)^{\frac{k-1}{2}}}{(\lambda - \mu)^k} \left\{ e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^i C_{\frac{k-1}{2}+i}^{\frac{k-1}{2}} \frac{[(\mu - \lambda)t]^{\frac{k-1}{2}-i}}{\left(\frac{k-1}{2}-i\right)!} + \right. \\ \left. + (-1)^{\frac{k+1}{2}} e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} C_{\frac{k-1}{2}+i}^{\frac{k-1}{2}} \frac{[(\mu - \lambda)t]^{\frac{k-1}{2}-i}}{\left(\frac{k-1}{2}-i\right)!} \right\}, \quad (4)$$

$$p_N(t) = 1 - \frac{1}{(\mu - \lambda)^n} \left\{ \mu^n e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda\mu)^{n-i}}{(n-i)!} \sum_{j=0}^i (-1)^j C_{n-1+j}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)^j + \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \frac{\lambda^{n+1}}{\mu - \lambda} e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \sum_{j=0}^i C_{n+j}^n \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda}\right)^j \right\}. \quad (5)$$

Используя формулы (1)–(5), для соответствующих вариантов можно определить вероятность пребывания системы в момент времени t в одном из состояний работоспособности $K(t)$:

$$K(t) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k(t) \quad (\text{для четных } k). \quad (6)$$

В условиях рассматриваемой модели значение коэффициента готовности равно

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t). \quad (7)$$

Среднее время T_N функционирования системы до ее окончательного отказа (состояние H_N) и среднее время T_Σ пребывания системы в состояниях работоспособности определяются по выражениям

$$T_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\omega_k}, \quad T_\Sigma = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\omega_k} \quad (\text{для четных } i). \quad (8)$$

Вероятность того, что система в интервале времени $[0; t]$ еще функционирует (либо работает, либо производится замена отказавшего элемента), т. е. вероятность того, что система за интервал $[0; t]$ не попадет в конечное состояние H_N , определяется по формуле $S_N(t) = 1 - p_N(t)$, где вероятности $p_N(t)$ для соответствующих случаев определяются по выражениям (2) и (5).

Пусть имеется система из одного основного элемента и пяти резервных элементов, находящихся в ненагруженном режиме. Интенсивность отказов работающего элемента равна $\lambda = 0,05$ 1/ч, интенсивность подключения резервных элементов на место отказавшего (интенсивность восстановления) равна $\mu = 5$ 1/ч. Определим, что в момент времени $t = 30$ ч система будет работоспособной.

Система может находиться в двенадцати состояниях: $H_0, H_2, H_4, H_6, H_8, H_{10}$ – состояния работоспособности; $H_1, H_3, H_5, H_7, H_9, H_{11}$ – состояния отказа, причем H_0 – состояние системы, характеризующееся тем, что основной элемент работает безотказно; H_1 – состояние системы, в котором основной элемент отказал и началось подключение первого резервного элемента (восстановление системы); H_2 – состояние системы, в котором закончилось подключение первого резервного элемента, и система продолжает работать безотказно и т. д.; H_{11} – состояние окончательного отказа системы, когда отказали последовательно все пять резервных элементов.

Так как $n = 5, N = 2n + 1 = 11$, то, воспользовавшись формулами (3)–(5), для вероятностей $p_k(t)$ того, что в момент времени t система находится в состоянии H_k ($k = 0, 1, \dots, 11$), получим

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad p_1(t) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}),$$

$$p_2(t) = \frac{\lambda\mu}{(\mu - \lambda)^2} (e^{-\lambda t} [(\mu - \lambda)t - 1] + e^{-\mu t}), \dots,$$

$$p_{10}(t) = \frac{(\lambda\mu)^5}{(\mu - \lambda)^{10}} \left(e^{-\lambda t} \left[\frac{1}{120} (\mu - \lambda)^5 t^5 - \frac{5}{24} (\mu - \lambda)^4 t^4 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{2}(\mu - \lambda)^3 t^3 - \frac{35}{2}(\mu - \lambda)^2 t^2 + 70(\mu - \lambda)t - 126] - \\
& - e^{-\mu} \left[\frac{1}{24}(\mu - \lambda)^4 t^4 + (\mu - \lambda)^3 t^3 + \frac{21}{2}(\mu - \lambda)^2 t^2 + \right. \\
& \left. + 56(\mu - \lambda)t + 126 \right].
\end{aligned}$$

Вероятность того, что система в момент времени $t = 30$ будет работоспособной в соответствии с формулой (6) равна $K(t = 30) = 0,986$. Вероятность того, что система в момент времени $t = 30$ попала в состояние окончательного отказа H_{11} равна $p_N(t) = p_{11}(30) \approx 0,004$. Среднее вре-

мя работы системы (8) $T_N = 220$, а среднее время пребывания в состояниях работоспособности $T_{\Sigma} = 120$.

Литература

1. Козлов, Б.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики / Б.А. Козлов, И.А. Ушаков. – М.: Советское радио, 1975. – 472 с.
2. Элементы прикладной теории надежности: учеб. пособие / А.Г. Щипицын, А.А. Коцеев, Е.А. Алёшин, О.О. Павловская. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 114 с.

Поступила в редакцию 4 июня 2012 г.