

ВЕКТОРНЫЙ И СКАЛЯРНЫЙ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА

И.В. Войнов, А.И. Телегин, Д.Н. Тимофеев

Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе

Рассмотрена платформа Стюарта на неподвижном корпусе, состоящая из корпуса, жестко связанного с землей, платформы и шести одинаковых устройств подвеса платформы к корпусу. Каждое устройство подвеса состоит из трех тел: основания, направляющей и штанги. Вывод уравнений динамики и формул вычисления динамических реакций подвеса рассмотрен в ранних статьях авторов. Здесь эти формулы повторно используются при выводе искомых уравнений платформы Стюарта. В первом утверждении доказана формула разложения на связанные оси направляющих сил динамических реакций в шаровых шарнирах, связывающих платформу с концами штанг. Во втором утверждении доказаны формулы вычисления движущих сил штанг. В третьем утверждении доказаны формулы вычисления динамических реакций в сочленениях подвесов. Все полученные расчетные формулы явно содержат геометрические, кинематические и инерционные параметры подвижных тел, позволяющие решать задачи синтеза этих параметров для достижения желаемых динамических свойств платформы Стюарта. Явный векторный и скалярный виды системы дифференциально-алгебраических уравнений для решения второй задачи динамики подготовлены для их повторного использования в математических моделях платформы Стюарта на подвижном (несущем) корпусе, которые необходимы в исследованиях влияния управляемых движений несомого тела на динамику несущего тела. С целью проверки на отсутствие описок и ошибок в полученных расчетных формулах рассмотрены три примера, в которых анализируются частные случаи движения тел рассматриваемой системы. Для движения платформы на трех подвесах в вертикальной плоскости из доказанных формул, как их частный случай, получены ожидаемые формулы для вычисления движущих сил и очевидные уравнения геометрических связей. Во втором примере из этих формул, как частный случай, получены уравнения динамики двух подвесов, связанных в концах штанг вращательным шарниром, и соответствующие очевидные уравнения геометрических связей. В третьем примере для движения штанг вдоль горизонтальной прямой из уравнений второго примера получено очевидное уравнение, следующее из второго закона Ньютона.

Ключевые слова: задачи динамики, платформа Стюарта, движущие силы, динамические реакции.

Введение

Интерес к исследованию кинематики, статики и динамики платформы Стюарта возрос с появлением роботов со «змеевидной» схемой построения, а также летательных аппаратов, в которых за счет управления несомой платформой Стюарта можно осуществлять самобалансировку несущего корпуса, а также управлять его ориентацией. Следует отметить, что в известных нам научных публикациях отсутствуют математические модели платформы Стюарта, записанные в аналитическом виде с явно выраженными обобщенными координатами, геометрическими и инерционными параметрами всех тел. Это связано с проблемами аналитического вывода уравнений динамики (УД) систем трех и более тел известными классическими методами (Лагранжа, Аппеля, Гамильтона и других) из-за громоздкости необходимых аналитических вычислений и преобразований. Новые формализмы вывода УД систем твердых тел (СТТ) [1] и выписывания формул вычисления динамических реакций в их подвижных сочленениях позволяют преодолеть указанное препятствие. Например, в статье [2] выведены УД и получены формулы вычисления динамических реакций в сочленениях цепочки трех тел со сферической системой координат. В рассматри-

ваемой платформе Стюарта шесть таких цепочек тел выполняют функцию управляемого подвеса платформы к неподвижному корпусу. Полученные в статье [2] расчетные формулы здесь используются в искомым решениях первой задачи динамики и в уравнениях второй задачи динамики платформы Стюарта, которая моделируется системой девятнадцати подвижных тел.

1. Используемые определения и обозначения

Исследуемая СТТ состоит из корпуса, жестко связанного с землей, платформы и шести одинаковых устройств подвеса платформы к корпусу. Каждое устройство подвеса (рис. 1) состоит из трех тел: основания, направляющей и штанги. Корпус и i -е основание ($i = 1, 2, \dots, 6$) образуют вращательную кинематическую пару, ось которой неподвижна относительно корпуса (рис. 2). Основание и направляющая образуют вращательную кинематическую пару, ось которой поворачивается вместе с основанием и перпендикулярна оси предшествующей пары. Направляющая и штанга образуют поступательную кинематическую пару. Конец каждой штанги образует шаровой шарнир с платформой. С телами СТТ жестко связаны правые ортогональные системы координат (СК).

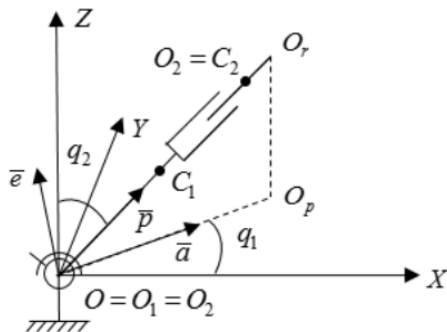


Рис. 1. Кинематическая и расчётная схемы СТТ

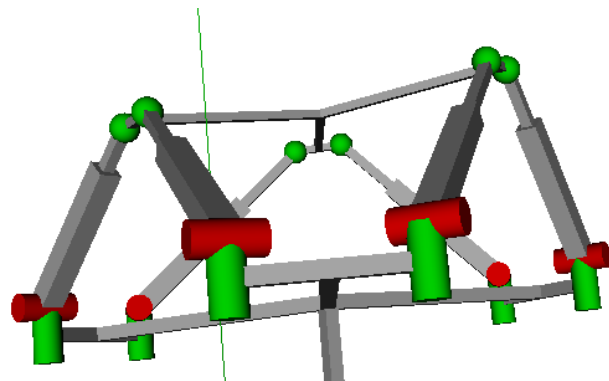


Рис. 2. 3D-модель платформы Стюарта (случай $N = 6$)

Введем обозначения для тел подвеса и их СК: $O_r \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r \mathbf{z}_r$ – абсолютная СК (АСК), жестко связанная с неподвижным корпусом; $O_{oi} \mathbf{x}_{oi} \mathbf{y}_{oi} \mathbf{z}_{oi}$ – СК, жестко связанная с i -м основанием; A_i, B_i, D_i – координаты точки O_{oi} в АСК; $O_{ni} \mathbf{x}_{ni} \mathbf{y}_{ni} \mathbf{z}_{ni}$ – СК, жестко связанная с i -й направляющей, и $O_{oi} = O_{ni}$; $O_{si} \mathbf{x}_{si} \mathbf{y}_{si} \mathbf{z}_{si}$ – СК, жестко связанная с i -й штангой, и $\mathbf{x}_{si} = \mathbf{x}_{ni}$, $\mathbf{y}_{si} = -\mathbf{z}_{ni}$, $\mathbf{z}_{si} = \mathbf{y}_{ni}$, $O_{si} = C_{si}$, где C_{si} – центр масс (ЦМ) i -й штанги; q_{oi} – угол поворота i -го основания вокруг оси $O_{oi} \mathbf{z}_{oi}$, откладываемый от оси $O_r \mathbf{x}_r$ до оси $O_{oi} \mathbf{x}_{oi}$; q_{ni} – угол поворота i -й направляющей и штанги вокруг оси $O_{ni} \mathbf{z}_{ni}$, откладываемый от оси $O_{oi} \mathbf{x}_{oi}$ до оси $O_{ni} \mathbf{x}_{ni}$; $q_{si} = O_{ni} C_{si}$ – расстояние от точки $O_{oi} = O_{ni}$ до ЦМ i -й штанги C_{si} ; O_{ri} – центр шарового шарнира, связывающего платформу с i -й штангой; $L_i = O_{ni} O_{ri}$ – управляемая длина i -й штанги; m_s – масса штанги; m_n – масса направляющей; m_o – масса основания; a_n – расстояние от точки O_{ni} до ЦМ направляющей; J_o^z – момент инерции основания относительно оси $O_{oi} \mathbf{z}_{oi}$; J_n^x, J_n^y – моменты инерции i -й направляющей относительно осей $O_{ni} \mathbf{x}_{ni}$, $O_{ni} \mathbf{y}_{ni}$; J_s^x, J_s^z – моменты инерции i -й штанги относительно осей $O_{si} \mathbf{x}_{si}$, $O_{si} \mathbf{z}_{si}$; \mathbf{F}_{si} – сила, действующая на i -ю штангу со стороны i -й направляющей; $F_i = \mathbf{z}_{si} \cdot \mathbf{F}_{si} = \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si}$ – движущая сила i -й штанги, развиваемая приводом штанги относительно i -й направляющей; \mathbf{M}_{ni} – момент силы относительно точки O_{ni} , действующей на i -ю направляющую со стороны i -го основания; \mathbf{M}_{oi} – момент силы относительно точки O_{oi} , действующей на i -е основание со стороны корпуса; $M_{oi} = \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{oi}$ – момент силы относительно оси $O_{oi} \mathbf{z}_{oi}$; $M_{ni} = \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{M}_{ni}$ – момент силы относительно оси $O_{ni} \mathbf{z}_{ni}$. Заметим, что i -е основание и направляющая не имеют приводов, т. е. $M_{oi} = 0$ и $M_{ni} = 0$.

Для платформы введем следующие обозначения: m_p – масса; C_p – ЦМ; I_p – центральный тензор инерции; x_p, y_p, z_p – координаты ЦМ в АСК; $\boldsymbol{\omega}_p$ – абсолютная угловая скорость.

Назовем параметрами платформы Стюарта (ППС) следующие величины: положения шарниров – A_i, B_i, D_i ; состояния и ускорения подвесов – $q_{oi}, \dot{q}_{oi}, \ddot{q}_{oi}, q_{ni}, \dot{q}_{ni}, \ddot{q}_{ni}, q_{si}, \dot{q}_{si}, \ddot{q}_{si}$; управляемые длины подвесов – L_i ; инерционные параметры – $m_p, I_p, m_s, m_n, a_n, J_o^z, J_n^x, J_n^y, J_s^x, J_s^z$.

Для сокращения записей введем следующие обозначения тригонометрических функций углов поворота основания и направляющей i -го подвеса:

$$s_{oi} = \sin(q_{oi}), c_{oi} = \cos(q_{oi}), s_i = \sin(q_{ni}), c_i = \cos(q_{ni}).$$

2. Формулы вычисления динамических реакций и движущих сил штанг

С целью максимального обобщения рассуждений будем считать, что количество подвесов платформы к корпусу не фиксировано. Обозначим это количество через N . В примерах рассматриваются случаи $N = 2, 3$ (рис. 3, 4).

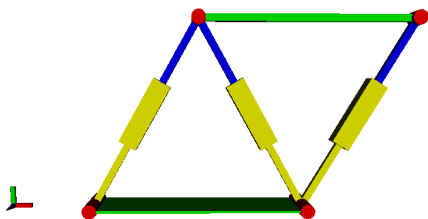


Рис. 3. 3D-модель СТТ случай $N = 3$

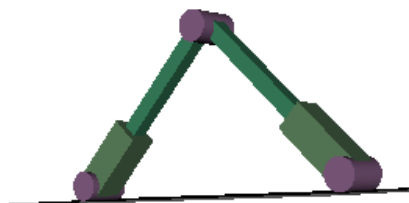


Рис. 4. 3D-модель СТТ случай $N = 2$

Утверждение 1. Реакции в связях платформы с концами штанг выражаются через ППС и движущие силы штанг по формуле

$$\mathbf{F}_{ri} = -M_{in}\mathbf{x}_{ni}/L_i + (F_{is} - F_i)\mathbf{y}_{ni} + M_{io}\mathbf{z}_{ni}/s_i L_i, \quad (1)$$

где

$$F_{is} = m_s \mathbf{y}_{ni} \cdot (d^2 q_{si} \mathbf{y}_{ni} / dt^2 - \mathbf{g}), \quad (2)$$

$$M_{in} = \mathbf{z}_{ni} \cdot (J_{qi} s_i \dot{q}_{oi} \mathbf{x}_{ni} + J_y c_i \dot{q}_{oi} \mathbf{y}_{ni} + J_{qi} \dot{q}_{ni} \mathbf{z}_{ni})'_t + m_{qi} \mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{g}, \quad (3)$$

$$M_{io} = \mathbf{z}_{oi} \cdot (J_o^z \dot{q}_{oi} \mathbf{z}_{oi} + J_{qi} s_i \dot{q}_{oi} \mathbf{x}_{ni} + J_y c_i \dot{q}_{oi} \mathbf{y}_{ni} + J_{qi} \dot{q}_{ni} \mathbf{z}_{ni})'_t - m_{qi} s_i \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{g}, \quad (4)$$

$$J_{qi} = J_n^x + J_s^x + m_s q_{si}^2, J_y = J_n^y + J_s^y, m_{qi} = m_n a_n + m_s q_{si}. \quad (5)$$

Доказательство. Для максимального повторного использования результатов статьи [2] мысленно разорвем шаровые шарниры, связывающие штанги с платформой, и заменим эти связи силами реакций. Тогда получим свободную платформу и отдельные подвесы. Подвес с номером i , изображенный на рис. 1, и СТТ статьи [2] полностью совпадают. Следовательно, совпадают их УД, т. е. здесь можно использовать расчетные формулы статьи [2] с учетом следующих переобозначений: $q_1 = q_{oi}$, $q_2 = q_{ni}$, $q_3 = q_{si}$, $m_{o2} = m_n$, $m_3 = m_s$, $J_2^x = J_n^x$, $J_3^x = J_s^x$, $J_2^y = J_n^y$, $J_3^y = J_s^y$, $J_3^z = J_s^z$, $J_1^z = J_o^z$, $J_q = J_{qi}$, $s_2 = s_i$, $c_2 = c_i$. В дальнейшем для обращения к формуле под номером k в статье под номером j будем использовать ссылку $(j.k)$.

Пусть \mathbf{F}_{ri} – сила реакции, приложенная к концу i -й штанги O_{ri} . Тогда по формуле (2.2) для штанги i -го подвеса получим $\mathbf{F}_{si} + \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{F}_{is}$, где \mathbf{F}_{is} выражается через ППС по формуле (2.6). Отсюда

$$\mathbf{F}_{ri} = \mathbf{F}_{is} - \mathbf{F}_{si}. \quad (6)$$

Выразим \mathbf{F}_{si} через ППС и движущие силы штанг.

По формуле (1.2) для направляющей i -го подвеса получим $\mathbf{M}_{ni} + \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{M}_{in}$, где \mathbf{M}_{in} выражается через ППС по формуле (2.10). Отсюда, с учетом равенств (6), $\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{M}_{ni} = 0$, $\mathbf{L}_i = L_i \mathbf{y}_{ni}$ и обозначения $\mathbf{f}_i = \mathbf{M}_{in} - \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{is}$ получим

$$\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{M}_{ni} - \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{si} = -L_i \mathbf{z}_{ni} \times \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = L_i \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = L_i \mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{f}_i.$$

Следовательно, $\mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{f}_i / L_i$.

Аналогично, по формуле (1.2) для основания i -го подвеса, получим $\mathbf{M}_{oi} + \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{M}_{io}$, где \mathbf{M}_{io} выражается через ППС по формуле (2.11). Отсюда с учетом (6), $\mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{oi} = 0$ получим $\mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{oi} = \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{io} - \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{L}_i \times (\mathbf{F}_{is} - \mathbf{F}_{si}) = 0$. Следовательно, с учетом обозначения

$$f_{oi} = -\mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{io} + \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{is}$$

получим

$$\mathbf{z}_{oi} \times \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{F}_{si} = L_i \mathbf{z}_{oi} \times \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = L_i \sin q_{ni} \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = L_i s_i \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = f_{oi}$$

или $\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = f_{oi} / (s_i L_i)$.

Таким образом, для проекций вектора \mathbf{F}_{si} на оси СК i -й направляющей имеем выражения

$$\mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{f}_i / L_i, \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = F_i, \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{si} = f_{oi} / (s_i L_i).$$

Следовательно, $\mathbf{F}_{Si} = (\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{f}_i/L_i) \mathbf{x}_{ni} + F_i \mathbf{y}_{ni} + (f_{oi}/s_i L_i) \mathbf{z}_{ni}$ и с учетом введенных обозначений для \mathbf{f}_i и f_{oi} получим $\mathbf{F}_{Si} = [\mathbf{z}_{ni} \cdot (\mathbf{M}_{in} - \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{is})/L_i] \mathbf{x}_{ni} + F_i \mathbf{y}_{ni} - \mathbf{z}_{oi} \cdot (\mathbf{M}_{io} - \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{is}) \mathbf{z}_{ni}/s_i L_i$.

Заметим, что $-\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{is} = L_i \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is} = L_i \mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}$,

$-\mathbf{z}_{oi} \times \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{F}_{is} = -L_i \mathbf{z}_{oi} \times \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is} = -L_i \sin q_{ni} \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is} = -L_i s_i \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}$.

Следовательно, $\mathbf{F}_{Si} = (\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{M}_{in}/L_i + \mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{x}_{ni} + F_i \mathbf{y}_{ni} - (\mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{io}/s_i L_i - \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{z}_{ni}$. Из тождества $(\mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{x}_{ni} + (\mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{y}_{ni} + (\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{z}_{ni} = \mathbf{F}_{is}$ получим

$$(\mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{x}_{ni} + (\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{z}_{ni} = \mathbf{F}_{is} - (\mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{y}_{ni}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}_{Si} = \mathbf{F}_{is} - (\mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is}) \mathbf{y}_{ni} + F_i \mathbf{y}_{ni} + \mathbf{x}_{ni} (\mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{M}_{in}/L_i) - \mathbf{z}_{ni} (\mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{io})/s_i L_i.$$

С учетом выражений (2.6), (2.10), (2.11) получим

$$F_{is} = \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{is} = m_s \mathbf{y}_{ni} \cdot (d^2 q_{si} \mathbf{y}_{ni}/dt^2 - \mathbf{g}),$$

$$M_{in} = \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{M}_{in} = \mathbf{z}_{ni} \cdot (J_{qi} s_i \dot{q}_{oi} \mathbf{x}_{ni} + J_{yci} \dot{q}_{oi} \mathbf{y}_{ni} + J_{qi} \dot{q}_{ni} \mathbf{z}_{ni})'_t - m_{qi} \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{g},$$

$$M_{io} = \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{io} = \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{M}_{in} + J_o^z \mathbf{z}_{oi} \cdot (\dot{q}_{oi} \mathbf{z}_{oi})'_t + m_a \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{z}_{oi} \times \mathbf{g} =$$

$$= \mathbf{z}_{oi} \cdot (J_{qi} s_i \dot{q}_{oi} \mathbf{x}_{ni} + J_{yci} \dot{q}_{oi} \mathbf{y}_{ni} + J_{qi} \dot{q}_{ni} \mathbf{z}_{ni})'_t - m_{qi} \mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{g} + J_o^z \mathbf{z}_{oi} \cdot (\dot{q}_{oi} \mathbf{z}_{oi})'_t.$$

Отсюда по формуле (6) получим $\mathbf{F}_{ri} = \mathbf{F}_{is} - \mathbf{F}_{Si} = -M_{in} \mathbf{x}_{ni}/L_i + (F_{is} - F_i) \mathbf{y}_{ni} + M_{io} \mathbf{z}_{ni}/s_i L_i$, где величины F_{is} , M_{in} , M_{io} вычисляются по формулам (2)–(4). **Утверждение доказано.**

Утверждение 2. Движущие силы F_1, F_2, \dots, F_N штанг подвеса платформы удовлетворяют следующим векторным уравнениям

$$\sum_{i=1}^N (F_i - F_{is}) (y_i^x \mathbf{x}_r + y_i^y \mathbf{y}_r + y_i^z \mathbf{z}_r) = m_p (\mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p - \mathbf{g}) - \sum_{i=1}^N (M_{in} \mathbf{x}_{ni} - M_{io} \mathbf{z}_{ni}/s_i)/L_i, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N (F_i - F_{is}) (y_{xi} \mathbf{x}_r + y_{yi} \mathbf{y}_r + y_{zi} \mathbf{z}_r) = (I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t - M_x \mathbf{x}_r - M_y \mathbf{y}_r - M_z \mathbf{z}_r, \quad (8)$$

где

$$x_i^x = c_{oi} c_i, x_i^y = s_i, x_i^z = -s_{oi} c_i, y_i^x = -c_{oi} s_i, y_i^y = c_i, y_i^z = s_{oi} s_i, \quad (9)$$

$$x_i = A_i - x_p, y_i = B_i - y_p, z_i = D_i - z_p, \quad (10)$$

$$y_{xi} = y_i y_i^z - z_i c_i, y_{yi} = z_i y_i^x - x_i y_i^z, y_{zi} = x_i c_i - y_i y_i^x, \quad (11)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^N [M_{in} (y_i x_i^z - z_i s_i - L_i s_{oi}) - M_{io} (y_i c_{oi} + L_i x_i^x)/s_i]/L_i, \quad (12)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^N [M_{in} (z_i x_i^x - x_i x_i^z) - M_{io} (z_i s_{oi} - x_i c_{oi} + L_i s_i)/s_i]/L_i, \quad (13)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^N [M_{in} (x_i s_i - y_i x_i^x - L_i c_{oi}) - M_{io} (L_i x_i^z - y_i s_{oi})/s_i]/L_i. \quad (14)$$

Доказательство. Если \mathbf{F}_{ri} – сила реакции, приложенная к концу i -й штанги, то в точке O_{ri} к платформе будет приложена сила « $-\mathbf{F}_{ri}$ ». Под действием сил « $-\mathbf{F}_{ri}$ » ($i = \overline{1, N}$) платформа движется поступательно относительно АСК и вращается вокруг своего ЦМ согласно известным УД свободного твердого тела

$$m_p (\mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p - \mathbf{g}) = -\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ri}, (I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t = -\sum_{i=1}^N \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{F}_{ri}. \quad (15)$$

Подставим сюда выражение (1) силы реакции \mathbf{F}_{ri} . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^N [M_{in} \mathbf{x}_{ni}/L_i + (F_i - F_{is}) \mathbf{y}_{ni} - M_{io} \mathbf{z}_{ni}/s_i L_i] = m_p (\mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p - \mathbf{g}), \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times [M_{in} \mathbf{x}_{ni}/L_i + (F_i - F_{is}) \mathbf{y}_{ni} - M_{io} \mathbf{z}_{ni}/s_i L_i] = (I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t. \quad (17)$$

Из разложений (2.23) имеем

$$\mathbf{x}_{ni} = c_{oi} c_i \mathbf{x}_r + s_i \mathbf{y}_r - s_{oi} c_i \mathbf{z}_r, \mathbf{y}_{ni} = -c_{oi} s_i \mathbf{x}_r + c_i \mathbf{y}_r + s_{oi} s_i \mathbf{z}_r,$$

$$\mathbf{z}_{ni} = s_{oi} \mathbf{x}_r + c_{oi} \mathbf{z}_r.$$

Отсюда, с использованием обозначений (9), получим

$$\mathbf{x}_{ni} = x_i^x \mathbf{x}_r + s_i \mathbf{y}_r + x_i^z \mathbf{z}_r, \mathbf{y}_{ni} = y_i^x \mathbf{x}_r + c_i \mathbf{y}_r + y_i^z \mathbf{z}_r, \mathbf{z}_{ni} = s_{oi} \mathbf{x}_r + c_{oi} \mathbf{z}_r. \quad (18)$$

Из (16) и второго равенства выражений (18) получим искомое уравнение (7).

Найдем выражения $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{x}_{ni}$, $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{y}_{ni}$, $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{z}_{ni}$. Из описания платформы Стюарта и рис. 1 следует, что мысленно разорванные геометрические связи имеют следующее аналитическое описание

$$\mathbf{O}_r \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} = \mathbf{O}_r \mathbf{O}_{oi} + \mathbf{L}_i,$$

где

$$\mathbf{O}_r \mathbf{C}_p = x_p \mathbf{x}_r + y_p \mathbf{y}_r + z_p \mathbf{z}_r, \mathbf{O}_r \mathbf{O}_{oi} = A_i \mathbf{x}_r + B_i \mathbf{y}_r + D_i \mathbf{z}_r,$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{O}_{oi} \mathbf{O}_{ri} = L_i \mathbf{y}_{ni},$$

т. е. с учетом обозначения (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} &= A_i \mathbf{x}_r + B_i \mathbf{y}_r + D_i \mathbf{z}_r + L_i \mathbf{y}_{ni} - x_p \mathbf{x}_r - y_p \mathbf{y}_r - z_p \mathbf{z}_r = \\ &= L_i \mathbf{y}_{ni} + (A_i - x_p) \mathbf{x}_r + (B_i - y_p) \mathbf{y}_r + (D_i - z_p) \mathbf{z}_r = L_i \mathbf{y}_{ni} + x_i \mathbf{x}_r + y_i \mathbf{y}_r + z_i \mathbf{z}_r. \end{aligned} \quad (19)$$

По формулам (18), (19) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{x}_{ni} &= -L_i \mathbf{z}_{ni} + (x_i \mathbf{x}_r + y_i \mathbf{y}_r + z_i \mathbf{z}_r) \times (x_i^x \mathbf{x}_r + s_i \mathbf{y}_r + x_i^z \mathbf{z}_r) = \\ &= x_i (s_i \mathbf{z}_r - x_i^z \mathbf{y}_r) + y_i (x_i^z \mathbf{x}_r - x_i^x \mathbf{z}_r) + z_i (x_i^x \mathbf{y}_r - s_i \mathbf{x}_r) - L_i (s_{oi} \mathbf{x}_r + c_{oi} \mathbf{z}_r) = \\ &= (y_i x_i^z - z_i s_i - L_i s_{oi}) \mathbf{x}_r + (z_i x_i^x - x_i x_i^z) \mathbf{y}_r + (x_i s_i - y_i x_i^x - L_i c_{oi}) \mathbf{z}_r. \end{aligned}$$

Аналогично по формулам (18), (19) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{y}_{ni} &= (x_i \mathbf{x}_r + y_i \mathbf{y}_r + z_i \mathbf{z}_r) \times (y_i^x \mathbf{x}_r + c_i \mathbf{y}_r + y_i^z \mathbf{z}_r) = \\ &= x_i (c_i \mathbf{z}_r - y_i^z \mathbf{y}_r) + y_i (y_i^z \mathbf{x}_r - y_i^x \mathbf{z}_r) + z_i (y_i^x \mathbf{y}_r - c_i \mathbf{x}_r) = \\ &= (y_i y_i^z - z_i c_i) \mathbf{x}_r + (z_i y_i^x - x_i y_i^z) \mathbf{y}_r + (x_i c_i - y_i y_i^x) \mathbf{z}_r. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{z}_{ni} &= L_i \mathbf{x}_{ni} + (x_i \mathbf{x}_r + y_i \mathbf{y}_r + z_i \mathbf{z}_r) \times (s_{oi} \mathbf{x}_r + c_{oi} \mathbf{z}_r) = \\ &= -x_i c_{oi} \mathbf{y}_r + y_i (c_{oi} \mathbf{x}_r - s_{oi} \mathbf{z}_r) + z_i s_{oi} \mathbf{y}_r + L_i (x_i^x \mathbf{x}_r + s_i \mathbf{y}_r + x_i^z \mathbf{z}_r) = \\ &= (y_i c_{oi} + L_i x_i^x) \mathbf{x}_r + (z_i s_{oi} - x_i c_{oi} + L_i s_i) \mathbf{y}_r + (L_i x_i^z - y_i s_{oi}) \mathbf{z}_r. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} \times [M_{in} \mathbf{x}_{ni}/L_i + (F_i - F_{is}) \mathbf{y}_{ni} - M_{io} \mathbf{z}_{ni}/s_i L_i] &= \\ &= [M_{in} (y_i x_i^z - z_i s_i - L_i s_{oi})/L_i + (F_i - F_{is}) (y_i y_i^z - z_i c_i) - M_{io} (y_i c_{oi} + L_i x_i^x)/s_i L_i] \mathbf{x}_r + \\ &+ [M_{in} (z_i x_i^x - x_i x_i^z)/L_i + (F_i - F_{is}) (z_i y_i^x - x_i y_i^z) - M_{io} (z_i s_{oi} - x_i c_{oi} + L_i s_i)/s_i L_i] \mathbf{y}_r + \\ &+ [M_{in} (x_i s_i - y_i x_i^x - L_i c_{oi})/L_i + (F_i - F_{is}) (x_i c_i - y_i y_i^x) - M_{io} (L_i x_i^z - y_i s_{oi})/s_i L_i] \mathbf{z}_r. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом обозначений (11)–(14), получим искомое уравнение (8). **Утверждение доказано.**

Из двух векторных уравнений (7), (8) следует система шести скалярных линейных алгебраических уравнений относительно шести движущих сил штанг. Для этого достаточно скалярно умножить векторные уравнения (7), (8), например, на орты $\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r$ АСК, с учетом очевидных равенств $\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p = \ddot{x}_p, \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p = \ddot{y}_p, \mathbf{z}_r \cdot \mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p = \ddot{z}_p$.

Рассмотрим один из возможных вариантов вывода выражения $(\mathbf{x}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t$. Используем для этого следующие обозначения: $C_p \mathbf{x}_p \mathbf{y}_p \mathbf{z}_p$ – главная центральная СК платформы (СКП); I_p – главный центральный тензор инерции платформы; A_p, B_p, C_p – главные моменты инерции платформы; p_p, q_p, r_p – проекции $\boldsymbol{\omega}_p$ на оси СКП; $x_p^x = \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_r, x_p^y = \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{y}_r, x_p^z = \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{z}_r$ – направляющие косинусы (НК) оси $C_p \mathbf{x}_p$ относительно СК $C_p \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r \mathbf{z}_r$; $y_p^x = \mathbf{y}_p \cdot \mathbf{x}_r, y_p^y = \mathbf{y}_p \cdot \mathbf{y}_r, y_p^z = \mathbf{y}_p \cdot \mathbf{z}_r$ – НК оси $C_p \mathbf{y}_p$ относительно СК $C_p \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r \mathbf{z}_r$; $z_p^x = \mathbf{z}_p \cdot \mathbf{x}_r, z_p^y = \mathbf{z}_p \cdot \mathbf{y}_r, z_p^z = \mathbf{z}_p \cdot \mathbf{z}_r$ – НК оси $C_p \mathbf{z}_p$ относительно СК $C_p \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r \mathbf{z}_r$. Тогда в СКП $I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p = (A_p p_p, B_p q_p, C_p r_p)$ и

$$\mathbf{x}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p = A_p x_p^x p_p + B_p y_p^x q_p + C_p z_p^x r_p.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{x}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t = A_p x_p^x \dot{p}_p + B_p y_p^x \dot{q}_p + C_p z_p^x \dot{r}_p + A_p \dot{x}_p^x p_p + B_p \dot{y}_p^x q_p + C_p \dot{z}_p^x r_p.$$

Аналогично

$$(\mathbf{y}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t = A_p x_p^y \dot{p}_p + B_p y_p^y \dot{q}_p + C_p z_p^y \dot{r}_p + A_p \dot{x}_p^y p_p + B_p \dot{y}_p^y q_p + C_p \dot{z}_p^y r_p,$$

$$(\mathbf{z}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t = A_p x_p^z \dot{p}_p + B_p y_p^z \dot{q}_p + C_p z_p^z \dot{r}_p + A_p \dot{x}_p^z p_p + B_p \dot{y}_p^z q_p + C_p \dot{z}_p^z r_p.$$

Если известны проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_p$ на оси СК $C_p \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r \mathbf{z}_r$, то тензор I_p необходимо представить в СК $C_p \mathbf{x}_r \mathbf{y}_r \mathbf{z}_r$ или перевести эти проекции в СК $C_p \mathbf{x}_p \mathbf{y}_p \mathbf{z}_p$. Затем достаточно выполнить операции выражения $(\mathbf{x}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t$ и т. д.

3. Решения задач динамики

На практике, как правило, ось $O_1 \mathbf{z}_1$ – вертикальна. Если при этом считать, что ось Oy АСК вертикальна, то $\mathbf{g} = -g\mathbf{y}$ ($|\mathbf{g}| \approx 9,81 \text{ м/с}^2$) и формулы (2)–(4) принимают следующий вид [2]:

$$F_{is} = m_s (\ddot{q}_{si} - q_{si} s_i^2 \dot{q}_{oi}^2 - q_{si} \dot{q}_{ni}^2 + g c_i), \quad (20)$$

$$M_{in} = J_{qi} \ddot{q}_{ni} - J_i s_i c_i \dot{q}_{oi}^2 + 2m_s q_{si} \dot{q}_{ni} \dot{q}_{si} + G_i, \quad (21)$$

$$M_{io} = (J_o^z + J_{qi} - J_i c_i^2) \ddot{q}_{oi} + 2s_i (m_s q_{si} s_i \dot{q}_{si} + J_i c_i \dot{q}_{ni}) \dot{q}_{oi}, \quad (22)$$

где $J_i = J_{qi} - J_n^y - J_s^z$, $G_i = -g(m_n a_n + m_s q_{si})s_i$. В дальнейшем будем использовать формулы (20)–(22).

Найдем формулы вычисления сил и моментов сил динамических реакций, действующих в сочленениях платформы Стюарта. В записи искомым формул используются выражения (2.6)–(2.11) с учетом следующих переобозначений: $F_3 = F_{is}$, $F_2 = F_{in}$, $F_1 = F_{io}$, $M_3 = M_{is}$, $M_2 = M_{in}$, $M_1 = M_{io}$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_{si} = \mathbf{x}_{ni}$, $\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_{si} = -\mathbf{z}_{ni}$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_{si} = \mathbf{y}_{ni}$, $m_q = m_{qi} = m_n a_n + m_s q_{si}$, $m_2 = m_n + m_s$, $m_1 = m_o + m_n + m_s$ – масса подвеса.

Утверждение 3. Векторы сил динамических реакций в сочленениях i -го подвеса платформы Стюарта вычисляются по формулам

$$\mathbf{F}_{ri} = -M_{in}\mathbf{x}_{ni}/L_i + (F_{is} - F_i)\mathbf{y}_{ni} + M_{io}\mathbf{z}_{ni}/s_i L_i, \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_{si} = m_s g \mathbf{y} + m_s d^2 q_{si} \mathbf{y}_{ni} / t^2 - \mathbf{F}_{ri}, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_{ni} = (m_n + m_s) g \mathbf{y} + d^2 m_{qi} \mathbf{y}_{ni} / t^2 - \mathbf{F}_{ri}, \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_{oi} = \mathbf{F}_{ni} + m_o g \mathbf{y}. \quad (26)$$

Векторы моментов сил динамических реакций относительно полюсов тел i -го подвеса платформы Стюарта вычисляются по формулам

$$\mathbf{M}_{si} = (J_s^x s_i \dot{q}_{oi} \mathbf{x}_{ni} + J_s^z c_i \dot{q}_{oi} \mathbf{y}_{ni} + J_{si}^x \dot{q}_{ni} \mathbf{z}_{ni})' - a(M_{io} \mathbf{x}_{ni} / s_i + M_{in} \mathbf{z}_{ni}) / L_i, \quad (27)$$

$$\mathbf{M}_{ni} = (J_{qi} s_i \dot{q}_{oi} \mathbf{x}_{ni} + J_y c_i \dot{q}_{oi} \mathbf{y}_{ni} + J_{qi} \dot{q}_{ni} \mathbf{z}_{ni})' - \frac{M_{io} \mathbf{x}_{ni}}{s_i} + (G_i - M_{in}) \mathbf{z}_{ni}, \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_{oi} = J_o^z \ddot{q}_{oi} \mathbf{y} + \mathbf{M}_{ni}. \quad (29)$$

Доказательство. Формула (23) доказана в утверждении 1.

Из формулы (6) $\mathbf{F}_{si} = \mathbf{F}_{is} - \mathbf{F}_{ri}$. Отсюда, с учетом (2.6), получим искомую формулу (24).

По формуле (1.1) для i -й направляющей $\mathbf{F}_{ni} + \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{F}_{in}$, т.е. $\mathbf{F}_{ni} = \mathbf{F}_{in} - \mathbf{F}_{ri}$. Следовательно, с учетом формулы (2.7) получим искомую формулу (25).

По формуле (1.1) для i -го основания $\mathbf{F}_{oi} + \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{F}_{io}$, т.е. $\mathbf{F}_{oi} = \mathbf{F}_{io} - \mathbf{F}_{ri}$. Следовательно, с учетом формулы (2.8) получим $\mathbf{F}_{oi} = (m_n + m_s) g \mathbf{y} + d^2 m_{qi} \mathbf{y}_{ni} / t^2 - \mathbf{F}_{ri}$. Отсюда следует искомая формула (26).

По формуле (1.2) для i -й штанги $\mathbf{M}_{si} + \mathbf{C}_{si} \mathbf{O}_{ri} \times \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{M}_{is}$, т.е. $\mathbf{M}_{si} = \mathbf{M}_{is} - a \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{F}_{ri}$. С учетом формулы (23) получим

$$\mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{F}_{ri} = M_{in} \mathbf{z}_{ni} / L_i + M_{io} \mathbf{x}_{ni} / s_i L_i. \quad (30)$$

Следовательно, с учетом формулы (2.7) и равенств $\mathbf{x}_{si} = \mathbf{x}_{ni}$, $\mathbf{y}_{si} = -\mathbf{z}_{ni}$, $\mathbf{z}_{si} = \mathbf{y}_{ni}$ получим искомую формулу (27).

По формуле (1.2) для i -й направляющей $\mathbf{M}_{ni} + \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{M}_{in}$, $\mathbf{M}_{ni} = \mathbf{M}_{in} - L_i \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{F}_{ri}$. Следовательно, с учетом формулы (5.7) получим искомую формулу (28).

По формуле (1.2) для i -го основания

$$\mathbf{M}_{oi} + \mathbf{L}_i \times \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{M}_{io} = J_o^z \ddot{q}_{oi} \mathbf{y} + \mathbf{M}_{in}. \mathbf{M}_{oi} = J_o^z \ddot{q}_{oi} \mathbf{y} + \mathbf{M}_{in} - L_i \mathbf{y}_{ni} \times \mathbf{F}_{ri}.$$

Следовательно, с учетом формулы (5.7) получим искомую формулу (29). **Утверждение доказано.**

Формулам (23)–(29) можно придать скалярный вид. Для этого достаточно умножить эти формулы скалярно на орты той или иной СК. Например, проекции вектора \mathbf{F}_{ri} на оси связанной СК направляющей i -го подвеса вычисляются по формулам

$$F_{ri}^x = \mathbf{x}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{ri} = -M_{in} / L_i = -(J_{qi} \ddot{q}_{ni} - J_i s_i c_i \dot{q}_{oi}^2 + 2m_s q_{si} \dot{q}_{ni} \dot{q}_{si} + G_i) / L_i,$$

$$F_{ri}^y = \mathbf{y}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{ri} = F_{is} - F_i = m_s (\ddot{q}_{si} - q_{si} s_i^2 \dot{q}_{oi}^2 - q_{si} \dot{q}_{ni}^2 + g c_i) - F_i,$$

$$F_{ri}^z = \mathbf{z}_{ni} \cdot \mathbf{F}_{ri} = M_{io} / s_i L_i = [J_o^z + J_{qi} - J_i c_i^2] \ddot{q}_{oi} + 2s_i (m_s q_{si} s_i \dot{q}_{si} + J_i c_i \dot{q}_{ni}) \dot{q}_{oi} / s_i L_i.$$

Скалярный вариант системы уравнений (1), (2) содержит шесть нелинейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $3N + 6$ параметров, определяющих положение и ориентацию подвижных тел рассматриваемой СТТ. Для постановки второй задачи динамики, т.е. записи системы дифференциально-алгебраических уравнений, достаточно к этой системе присоединить уравнения геометрических связей платформы с N штангами. Эти уравнения имеют вид N векторных алгебраических уравнений (19). Их можно представить в виде системы $3N$ трансцендентных алгебраических уравнений относительно $3N + 6$ параметров, определяющих положение и ориентацию подвижных тел рассматриваемой СТТ. Эта система получается из векторного уравнения (19) после его скалярного умножения на три некопланарных вектора, например, на орты $\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r$ АСК.

Представим вектор $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri}$ в виде $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri} = p_i \mathbf{p}_i$, где p_i – расстояние от ЦМ платформы до конца i -й штанги, \mathbf{p}_i – орт вектора $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{ri}$. Обозначим через p_i^x, p_i^y, p_i^z направляющие косинусы орта \mathbf{p}_i относительно АСК, т. е. $p_i^x = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{p}_i, p_i^y = \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{p}_i, p_i^z = \mathbf{z}_r \cdot \mathbf{p}_i$. Теперь, умножив обе части уравнения (19) скалярно на орты АСК, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} p_i p_i^x = -c_{oi} s_i L_i + A_i - x_p, \\ p_i p_i^y = c_i L_i + B_i - y_p, \\ p_i p_i^z = s_{oi} s_i L_i + D_i - z_p, i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (31)$$

Направляющие косинусы p_i^x, p_i^y, p_i^z выражаются через углы ориентации платформы в АСК, например, через углы Эйлера или Брайнта по известным формулам [3].

4. Частные случаи платформы Стюарта

На рис. 2 изображена твердотельная 3D-модель платформы Стюарта, где неподвижный корпус и подвижная платформа представлены в виде круговой трисекции с поперечинами на концах. Вертикальный шток в центре корпуса жестко связан с землей. На краях каждой поперечины корпуса установлены цилиндрические шарниры основания и направляющей подвеса. На краях каждой поперечины платформы установлены шаровые шарниры, связывающие штанги с платформой.

На рис. 3 изображена твердотельная 3D-модель СТТ в вертикальной плоскости, соответствующая случаю $N = 3$, т. е. платформа в виде стержня связана с корпусом тремя подвесами, в каждом из которых отсутствует вращающееся вокруг вертикальной оси основание. Вместо шаровых шарниров связи платформы с концами штанг используются цилиндрические шарниры. Левый цилиндрический шарнир связей платформы со штангами – сложный. Правый цилиндрический шарнир связей направляющих с корпусом – сложный.

На рис. 4 изображена твердотельная 3D-модель СТТ в вертикальной плоскости, соответствующая случаю $N = 2$, где платформа заменена материальной точкой в центре сложного цилиндрического шарнира, связывающего штанги двух подвесов.

Рассмотрим уравнения (7), (8), (31) в случаях $N = 3$ (см. рис. 3) и $N = 2$ (см. рис. 4).

Пример 1. В случае $N = 3, O_{r1} = O_{r2}, B_i = D_i = 0, q_{oi} = 0, \dot{q}_{oi} = 0, i = 1, 2, 3$, т. е. $c_{oi} = 1, s_{oi} = 0$. В этом случае $\mathbf{z}_{ni} = \mathbf{z}_r, r_p = \alpha, \boldsymbol{\omega}_p = \dot{\alpha} \mathbf{z}_r, p_p = q_p = 0$, где α – угол поворота платформы в вертикальной плоскости $O_r X_r Y_r$, откладываемый от оси $O_r X_r$ до оси $C_p \mathbf{p}_3$.

По первой формуле (9) $x_i^x = c_i$. По четвертой формуле (9) $y_i^x = -s_i$. По формуле (4) $M_{io} = 0$. По третьей формуле (11) $y_{zi} = (A_i - x_p) c_i - y_p s_i$. Следовательно, умножив скалярно уравнение (7) на \mathbf{x}_r и на \mathbf{y}_r , а уравнение (8) на \mathbf{z}_r , получим

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^3 (F_i - F_{is}) s_i &= m_p \mathbf{x}_r \cdot (\mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p - \mathbf{g}) - \sum_{i=1}^3 M_{in} \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_{ni} / L_i, \\ \sum_{i=1}^3 (F_i - F_{is}) c_i &= m_p \mathbf{y}_r \cdot (\mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p - \mathbf{g}) - \sum_{i=1}^3 M_{in} \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{x}_{ni} / L_i, \\ \sum_{i=1}^3 (F_i - F_{is}) y_{zi} &= \mathbf{z}_r \cdot (I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t - M_z, \end{aligned}$$

где $M_z = \sum_{i=1}^3 M_{in} (x_i s_i + y_p c_i - L_i) / L_i$. Теперь, учитывая равенства $\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{g} = -g \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{g} = -g, \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p = \ddot{x}_p, \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{O}_r \ddot{\mathbf{C}}_p = \ddot{y}_p, \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_{ni} = -c_i, \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{x}_{ni} = s_i, (\mathbf{z}_r \cdot I_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)'_t = J_p^z \ddot{\alpha}$, где J_p^z – момент инерции платформы относительно оси $C_p \mathbf{z}_r$, получим следующую систему трех линейных алгебраических уравнений относительно движущих сил штанг F_1, F_2, F_3 .

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 s_i F_i = \sum_{i=1}^3 (s_i F_{is} + M_{in} c_i / L_i) - m_p \ddot{x}_p, \\ \sum_{i=1}^3 c_i F_i = m_p (\ddot{y}_p + g) + \sum_{i=1}^3 (c_i F_{is} - M_{in} s_i / L_i), \\ \sum_{i=1}^3 y_{zi} F_i = J_p^z \ddot{\alpha} + \sum_{i=1}^3 y_{zi} F_{is} - M_z, \end{cases} \quad (32)$$

где, согласно (2), (3),

$$F_{is} = m_s (\ddot{q}_{si} - q_{si} \dot{q}_{ni}^2 + g c_i), M_{in} = J_{qi} \ddot{q}_{ni} + 2 m_s q_{si} \dot{q}_{ni} \dot{q}_{si} + G_i. \quad (33)$$

Из системы уравнений геометрических связей (31) для рассматриваемой СТТ получим

$$\begin{cases} p_i p_i^x = -s_i L_i + A_i - x_p, \\ p_i p_i^y = c_i L_i - y_p, i = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

где $A_1 = 0, A_2 = A_3 = A, p_i = b$. НК вектора $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{r1} = \mathbf{C}_p \mathbf{O}_{r2}$ вычисляются по формулам

$$p_j^x = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{p}_j = \cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos(\alpha) = -c_\alpha,$$

$$p_j^y = \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{p}_j = \cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin(\alpha) = -s_\alpha.$$

НК вектора $\mathbf{C}_p \mathbf{O}_{r3}$ вычисляются по формулам

$$p_3^x = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{p}_3 = \cos(\alpha) = c_\alpha, p_3^y = \mathbf{y}_r \cdot \mathbf{p}_3 = \cos(\alpha + 270^\circ) = \sin(\alpha) = s_\alpha.$$

Следовательно, система шести уравнений геометрических связей рассматриваемой СТТ имеет следующий вид

$$\begin{cases} bc_\alpha = s_1 L_1 + x_p, bc_\alpha = s_2 L_2 - A + x_p, bc_\alpha = -s_3 L_3 + A - x_p, \\ bs_\alpha = y_p - c_1 L_1, bs_\alpha = y_p - c_2 L_2, bs_\alpha = c_3 L_3 - y_p. \end{cases} \quad (34)$$

Система девяти дифференциально-алгебраических уравнений (32), (34) для девяти параметров $x_p, y_p, \alpha, q_{ni}, q_{si}, i = 1, 2, 3$, описывающих положения тел рассматриваемой СТТ, позволяет решать задачи динамики этой СТТ. Если заданы функции времени $x_p(t), y_p(t), \alpha(t), q_{ni}(t), q_{si}(t)$, согласованные со связями (34), то система трех линейных алгебраических уравнений (33) позволяет решить первую задачу динамики, т. е. найти функции $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$. Если заданы функции времени $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ и начальное состояние СТТ, то путем интегрирования системы (32) с учетом геометрических связей (34) решается вторая задача динамики, т. е. вычисляются $x_p, y_p, \alpha, q_{ni}, q_{si}, i = 1, 2, 3$, как функции времени.

Пример 2. Пусть в СТТ из примера 1 платформа вырождается в материальную точку массой m_p , и третий подвес отсутствует, т. е. имеет место СТТ на рис. 4. Тогда из системы (32) получается следующая система двух линейных алгебраических уравнений относительно движущих сил штанг F_1, F_2 .

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 s_i F_i = \sum_{i=1}^2 (s_i F_{is} + M_{in} c_i / L_i) - m_p \ddot{x}_p, \\ \sum_{i=1}^2 c_i F_i = m_p (\ddot{y}_p + g) + \sum_{i=1}^2 (c_i F_{is} - M_{in} s_i / L_i). \end{cases} \quad (35)$$

Система четырех уравнений геометрических связей рассматриваемой СТТ следует из (34) с учетом равенств $p_i = 0$ и имеет следующий вид

$$\begin{cases} 0 = s_1 L_1 + x_p, 0 = s_2 L_2 - A + x_p, \\ 0 = y_p - c_1 L_1, 0 = y_p - c_2 L_2. \end{cases} \quad (36)$$

Пример 3. Рассмотрим частный случай СТТ из примера 2. Пусть в этой СТТ $q_{n1} = -90^\circ$,

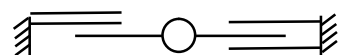


Рис. 5. Схема к примеру 3

$q_{n2} = 90^\circ, \dot{q}_{ni} = 0, L_1 + L_2 = A$ (рис. 5). Тогда $c_1 = c_2 = 0, s_1 = -1, s_2 = 1, F_{is} = m_s \ddot{q}_{si}$, и первое уравнение системы примет вид $\sum_{i=1}^2 s_i F_i = m_s \sum_{i=1}^2 s_i \ddot{q}_{si} - m_p \ddot{x}_p$. В этом состоянии возможно движение, в котором $\ddot{q}_{s2} = -\ddot{q}_{s1}, \ddot{q}_{s1} = \ddot{x}_p$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^2 s_i F_i = -F_1 + F_2 = m_s (-\ddot{q}_{s1} + \ddot{q}_{s2}) - m_p \ddot{x}_p = -2m_s \ddot{q}_{s1} - m_p \ddot{x}_p = -(m_p + 2m_s) \ddot{x}_p,$$

т. е. $F_1 - F_2 = (m_p + 2m_s) \ddot{x}_p$, что соответствует 2-му закону Ньютона.

Заключение

Полученные символьные виды математических моделей платформы Стюарта позволяют решать весь спектр задач механики и управления движением платформы Стюарта относительно неподвижного корпуса, в том числе решать задачи синтеза явно выраженных конструктивных параметров платформы Стюарта, которые обеспечивают ей заданные свойства движений. Выведенные УД и формулы вычисления сил и моментов сил динамических реакций платформы Стюарта подготовлены к использованию в математической модели платформы Стюарта на свободном корпусе, где управляемая платформа обеспечивает заданное положение центра масс и желаемые значения некоторых элементов тензора инерции корпуса. УД и геометрические связи (42)–(46) частных случаев платформы Стюарта подготовлены для использования в учебном процессе и научных исследованиях в лаборатории «Ракетодинамика» Научно-образовательного центра (НОЦ) «Ракетостроение».

Литература

1. Телегин, А.И. Новый векторный вид уравнений динамики систем тел / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 33–40.

2. Телегин, А.И. Математическое моделирование трехстепенного манипулятора / А.И. Телегин, Д.И. Читалов // Наука ЮУрГУ. – 2015. – С. 1716–1723. – http://lib.susu.ru/fid?base=SUSU_KONF&key=000537718&dtype=F&etype=.pdf.

3. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Войнов Игорь Вячеславович, д-р техн. наук, профессор, директор, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе; mail@miass.susu.ru.

Телегин Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, декан электротехнического факультета, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе; teleginai@susu.ru.

Тимофеев Дмитрий Николаевич, аспирант, лаборант, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе; goshanoob@mail.ru.

Поступила в редакцию 15 августа 2016 г.

DOI: 10.14529/ctcr160403

VECTOR AND SCALAR EQUATIONS TYPES TO SOLVE PROBLEMS OF THE DYNAMICS OF THE STEWART PLATFORM

I.V. Voynov, mail@miass.susu.ru,

A.I. Telegin, teleginai@susu.ru,

D.N. Timofeev, goshanoob@mail.ru

South Ural State University, branch in Miass, Chelyabinsk region, Russian Federation

The Stewart platform on the stationary body are considered. It consists of body, which rigidly connected to the ground, platform and six identical suspension devices for platform. Each suspension device consists of three bodies – the base, the guide and the rod. The solution of the dynamics equations and formulas of calculating the dynamic suspension reactions are discussed in earlier articles of authors. In this article the formulas are used in the derivation of equation for Stewart platform. The first assertion is proved a formula for expansion related to the axis of the guide forces of dynamic reactions in ball joints for connecting the platform to the ends of the rods. The second assertion is proved formulas for calculating the driving forces of rods. The third assertion is proved formulas for calculating the dynamic reactions in joints suspensions. All received formulas contains geometric, kinematic and inertial parameters of moving bodies. This allows to solve the problem of synthesis parameters to achieve the desired Stewart platform dynamic properties. Explicit types of vector and scalar systems of differential-algebraic equations for solving the second problem of the dynamics are prepared for re-use in mathematical models of Stewart platform on the mobile (carrier) body. These models are needed to investigate the influence of movements of the body carried by supporting body. Three examples are considered in order to verify the absence of errors in the calculation formulas. The particular cases of motion of the bodies of the system are analyzed in these examples. The formulas to calculate the driving forces and the obvious equation of geometric relations are obtained as a special case of the proven formulas for the motion of the platform on three hangers in the vertical plane. The equations of the dynamics for two hangers, connected at the ends of the rods with rotational hinge, and the corresponding apparent equation of geometric relations are obtained in the second example of these formulas, as a special case. The obvious equation for movement along a horizontal line rods that follows from Newton's second law are obtained in the third example.

Keywords: dynamics problems, Stewart platform, driving forces, dynamic response.

References

1. Telegin A.I. [New Vector Form of the Equations of Multibody System Dynamics]. *Bulletin of South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 33–40. (in Russ.)
2. Telegin A.I., Chitalov D.I. [Mathematical Modeling of the Three Stage Manipulator]. Available at: http://lib.susu.ru/ftd?base=SUSU_KONF&key=000537718&dtype=F&etype=.pdf.
3. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Classical Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 824 p.

Received 15 August 2016

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Войнов, И.В. Векторный и скалярный виды уравнений для решения задач динамики платформы Стюарта / И.В. Войнов, А.И. Телегин, Д.Н. Тимофеев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 19–28. DOI: 10.14529/ctcr160403

FOR CITATION

Voynov I.V., Telegin A.I., Timofeev D.N. Vector and Scalar Equations Types to Solve Problems of the Dynamics of the Stewart Platform. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 19–28. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr160403
