УДК 621.391.24:512.643 DOI: 10.14529/ctcr160416

БЫСТРЫЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША, КРЕСТЕНСОНА – ВИЛЕНКИНА И ХААРА

***В.Г. Лабунец*[1]*, С.А. Мартюгин*[1, 2]**

[1]*Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург*

[2]*АО «НПО Автоматики имени академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург*

Представлен новый класс многопараметрических и дробных преобразований Уолша, Крестенсона – Виленкина и Хаара для адаптивного спектрального анализа сигналов, и разработаны быстрые алгоритмы для этих преобразований. Частным случаем этих многопараметрических преобразований являются дробные однопараметрические преобразования. Представлен систематический метод синтеза многопараметрических симметричных и несимметричных преобразований. При плавном изменении параметров многопараметрические преобразования плавно меняют свою форму от тождественных преобразований до классических, что позволяет ввести элементы адаптации в спектральный анализ сигналов. Базисные функции преобразований Уолша и Хаара могут быть использованы в качестве поднесущих в обобщенных OFDM- и CDMA-системах.

Ключевые слова: преобразование Фурье, преобразование Уолша, преобразование Крестенсона – Виленкина, преобразование Хаара, дробные и многопараметрические преобразования, обработка сигналов и изображений, OFDM- и CDMA-системы.

Введение

Идея о дробных степенях оператора Фурье появилась в математической литературе в начале XX века [1, 2]. Она основывалась на собственном разложении оператора Фурье в рамках его собственных значений и собственных функций. Позже, в 1961 г. В. Баргманн в [3] дал более точное определение этого преобразования, основанное на многочленах Эрмита. Известно, что функции Эрмита $\Psi_{\mathrm{n}}\left(\sqrt{2\pi \mathrm{t}}\right)$ порядка n являются собственными функциями преобразования Фурье: $\mathbf{F}\left[\Psi_n(t)\right]=\lambda_n\Psi_n(\omega)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_n = j^n$. Они формируют ортогональный набор функций на интервале $(-\infty,\infty)$ относительно весовой функции $e^{\pi t^2}$, поскольку $\left\langle \Psi_n(t) \middle| \Psi_m(t) \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi t^2}\Psi_n(t)\Psi_m(t)dt = \delta_{mn}$. В рамках собственных функций преобразование Фурье имеет следующее собственное разложение

$$\mathbf{F}=\left[e(\omega,t)\right]:=\left[\sum_{n=0}^{\infty} j^n\Psi_n(\omega)\Psi_n(t)\right]=\left[e^{j\omega t}\right].$$

Тогда согласно [3] дробное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{\alpha}$ определяется через его собственные функции следующим образом:

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}=\left[\mathrm{e}^{(\alpha)}(\omega,t)\right]:=\left[\sum_{n=0}^{\infty} j^{\alpha n}\Psi_n(\omega)\Psi_n(t)\right]=\frac{e^{\frac{\mathrm{j}\pi}{4}\left(\alpha-\mathrm{sgn}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}}\left[e^{\mathrm{j}\pi\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left(\omega^2-2\omega t\,\csc(\pi\alpha)+t^2\right)}\right],$$

где $\mathrm{e}^{(\alpha)}(\omega,t)$ – ядро дробного преобразования Фурье, а $\Psi_n(t)$ его собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_n^{\alpha}=j^{\alpha n}$, так как $\mathcal{F}^{\alpha}\left[\Psi_n(t)\right]=\lambda_n^{\alpha}\Psi_n(t)$. Для $\alpha=1$ $\mathrm{e}^{(1)}(\omega,t)=e^{j\omega t}$ и дробное преобразование Фурье принимает облик классического преобразования Фурье. При $\alpha=0$ оно вырождается в тождественное преобразование. Таким образом, при непрерывном изменении параметра α дробное преобразование Фурье плавно меняет облик от тождественного преобразования до обычного преобразования Фурье.

В 1980 г. Намиас заново открыл дробное преобразование Фурье [4]. В своей работе, посвященной использованию дробного ПФ для решения некоторых задач, связанных с квантовыми гармоническими колебаниями, он представил операционное исчисление этого преобразования. Его подход был расширен Мак Брайдом и Керром в 1987 г. [5]. В 1993 г. Мендлович и Озактас предложили дробное преобразование в оптике [6]. На сегодняшний день дробное ПФ нашло широкое применение в разных областях науки и техники [7].

В этой работе мы вводим многопараметрические преобразования Уолша, Крестенсона – Виленкина, Хаара и разрабатываем быстрые алгоритмы для этих преобразований. Частным случаем этих многопараметрических преобразований являются дробные однопараметрические преобразования.

1. Собственное разложение и дискретные многопараметрические преобразования

Пусть $\mathbf{F}=\left[F_k(i)\right]_{k,t=0}^{N-1}$ – произвольное дискретное симметричное $(N\times N)$ – преобразование, λ_n и $\Psi_n(t)$ – его собственные значения и собственные вектора соответственно, где $n=0,1,\ldots,N-1$. Пусть $\mathbf{U}=\left[\Psi_0(i)\,|\,\Psi_1(i)\,|\vdots|\,\Psi_{N-1}(i)\right]$ – матрица, составленная из собственных векторов $\mathbf{F}$-преобразования. Тогда $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{FU}=\mathbf{Diag}\{\lambda_n\}$ представляет собой собственное разложение преобразования $\mathbf{F}$. Следовательно, $\mathbf{F}=\left[F_k(i)\right]:=\mathbf{U\Lambda U}^{-1}$. Если $\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}$ – произвольные вещественные числа, то выражение

$$\mathbf{F}^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_{\mathrm{N-1}})}:=\mathbf{U}\left\{\mathbf{diag}\left(\lambda_0^{\alpha_0},\ldots,\lambda_{\mathrm{N-1}}^{\alpha_{\mathrm{N-1}}}\right)\right\}\mathbf{U}^{-1}$$

назовем многопараметрическим $\mathbf{F}$-преобразованием. Если $\alpha_i\equiv\alpha,\ i=0,1,\ldots,N-1$, то такое преобразование назовем дробным $\mathbf{F}$-преобразованием. В качестве $\mathbf{F}$-преобразований рассмотрим преобразования Уолша, Крестенсона – Виленкина и предложим быстрые алгоритмы для реализации многопараметрической модификации этих преобразований.

2. Многопараметрические преобразования Уолша

Преобразование Уолша $(2^n\times 2^n)$ задается следующим соотношением:

$$\mathbf{W}_{2^n}:=\mathbf{W}_2\otimes\mathbf{W}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{W}_2,$$

где $\mathbf{W}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ и $\otimes$ – символ тензорного произведения. Для $\mathbf{W}_2$ имеет место собственное разложение:

$$\mathbf{W}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8)\\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\pi/8) & \sin(\pi/8)\\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8)\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{R}}_2\mathbf{D}_2(1,-1)\mathbf{R}_2,$$

где $\overline{\mathbf{R}}_2,\mathbf{R}_2$ – матрицы вращения на углы $\pm\pi/8$, соответственно. Это разложение позволяет ввести следующее двухпараметрическое преобразование

$$\mathbf{W}_2(\alpha_1,\alpha_2):=\overline{\mathbf{R}}_2\mathbf{D}_2(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{R}_2=$$
$$=\begin{bmatrix}\cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8)\\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{2j\pi\alpha_1} & \\ & e^{j\pi\alpha_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\pi/8) & \sin(\pi/8)\\ -\sin(\pi/8) & \cos(\pi/8)\end{bmatrix}. \quad (1)$$

Тензорно перемножая его n раз, получаем многопараметрическое ($2n$-параметрическое) быстрое преобразование Уолша (МПБПУ)

$$\mathbf{W}_{2^n}^{(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1};\alpha_{1,2},\alpha_{2,2};\ldots;\alpha_{1,n},\alpha_{2,n})}=\bigotimes_{i=1}^{n}\mathbf{W}_2(\alpha_{1,i},\alpha_{2,i})=\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{2^{i-1}}\otimes\mathbf{W}_2(\alpha_{1,i},\alpha_{2,i})\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]. \quad (2)$$

Подставляя $\mathbf{W}_2(\alpha_1,\alpha_2)=\overline{\mathbf{R}}_2(\pi/8)\mathbf{D}_2(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{R}_2$ в (2), получаем собственное разложение МППУ

$$\mathbf{W}_{2^n}^{(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1};\alpha_{1,2},\alpha_{2,2};\ldots;\alpha_{1,n},\alpha_{2,n})} = \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{2^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{n-i}}\right] \times \left[\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1}\right) \otimes \ldots \otimes \mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n}\right)\right] \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{2^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]. \qquad (3)$$

Количество параметров в выражении (3) можно увеличить с $2n$ до 2^n, используя вместо матрицы тензорной структуры $\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1}\right) \otimes \ldots \otimes \mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n}\right)$ диагональную матрицу общего вида с 2^n свободными параметрами $\mathbf{D}_{2^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n}\right)$, что дает новое МПБПУ с неразделимой диагональной матрицей

$$\mathbf{W}_{2^n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n})} = \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{2^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{n-1}}\right] \times \left[\mathbf{D}_{2^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n}\right)\right] \times \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{2^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{I}_{2^{n-1}}\right].$$

3. Многопараметрические преобразования Крестенсона – Виленкина

Как и преобразование Уолша, преобразование Крестенсона – Виленкина $(m^n \times m^n)$ имеет тензорную структуру. Например, для $m=3$ это преобразование задается следующим образом:

$$\mathbf{C}_{3^n} := \mathbf{C}_3 \otimes \mathbf{C}_3 \otimes \ldots \otimes \mathbf{C}_3,$$

где $\mathbf{C}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}$ и $\otimes$ – символ тензорного произведения. Собственное разложение для $\mathbf{C}_3$ представлено как:

$$\mathbf{C}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ & -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{R}}_{12}\,\overline{\mathbf{R}}_{01}\mathbf{D}_3\left(1,-1,j\right)\mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12},$$

где $\overline{\mathbf{R}}_{12}, \mathbf{R}_{12}$ – матрицы вращения на углы $\mp\pi/4$, а матрицы $\overline{\mathbf{R}}_{01}, \mathbf{R}_{01}$ – матрицы вращения на углы $\pm\theta$, $\theta = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\right)$ соответственно. Аналогично с (1) введем следующее трехпараметрическое преобразование

$$\mathbf{C}_3\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right) = \overline{\mathbf{R}}_{12}\,\overline{\mathbf{R}}_{01}\mathbf{D}_3\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{2j\pi\alpha_1} & & \\ & e^{j\pi\alpha_2} & \\ & & e^{j\frac{\pi}{2}\alpha_3} \end{bmatrix} \times \qquad (4)$$
$$\times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ & -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}.$$

Тензорно перемножая его n раз, получаем многопараметрическое ($3n$-параметрическое) быстрое преобразование Крестенсона – Виленкина:

$$\mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\alpha_{3,1};\alpha_{1,2},\alpha_{2,2},\alpha_{3,2};\ldots;\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n})} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{C}_3\left(\alpha_{1,i},\alpha_{2,i},\alpha_{3,i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{C}_3\left(\alpha_{1,i},\alpha_{2,i},\alpha_{3,i}\right) \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right].$$

Собственное разложение $\mathbf{C}_3$ представлено следующим образом:

$$\mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\alpha_{3,1};\alpha_{1,2},\alpha_{2,2},\alpha_{3,2};\ldots;\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n})} = \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{12}\overline{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{D}_3\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\alpha_{3,1}\right)\otimes\ldots\otimes\mathbf{D}_3\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n}\right)\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times \tag{5}$$

$$\times\left[\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\alpha_{3,1}\right)\otimes\ldots\otimes\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n}\right)\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right].$$

Аналогично с преобразованием Уолша, количество параметров в выражении (5) можно увеличить с $3n$ до 3^n, используя вместо матрицы тензорной структуры $\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\alpha_{3,1}\right)\otimes\ldots\otimes\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n}\right)$ диагональную матрицу общего вида с 3^n свободными параметрами $\mathbf{D}_{3^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{3^n}\right)$, что дает новое многопараметрическое (3^n-параметрическое) быстрое преобразование Крестенсона – Виленкина с неразделимой диагональной матрицей:

$$\mathbf{C}_{3^n}^{(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\alpha_{3,1};\alpha_{1,2},\alpha_{2,2},\alpha_{3,2};\ldots;\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n})} = \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{12}\overline{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{D}_{3^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{3^n}\right)\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{D}_{3^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{3^n}\right)\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{01} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{3^{i-1}} \otimes \mathbf{R}_{12} \otimes \mathbf{I}_{3^{n-i}}\right].$$

4. Общий алгоритм для многопараметрических $\mathbf{F}$-преобразований

На основе предложенных алгоритмов получен общий алгоритм для mn-параметрических $\mathbf{F}$-преобразований (симметричных преобразований):

$$\mathbf{F}_{m^n}^{(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\ldots\alpha_{m,1};\alpha_{1,2},\alpha_{2,2},\ldots\alpha_{m,2};\ldots;\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\ldots\alpha_{m,n})} = \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{m^{i-1}} \otimes \prod_{i=1}^{q}\overline{\mathbf{R}}_{k_i,l_i}(\varphi_i) \otimes \mathbf{I}_{m^{n-i}}\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{D}_m\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\ldots\alpha_{m,1}\right)\otimes\ldots\otimes\mathbf{D}_m\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\ldots,\alpha_{m,n}\right)\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{m^{i-1}} \otimes \prod_{i=1}^{q}\mathbf{R}_{k_i,l_i}(\varphi_i) \otimes \mathbf{I}_{m^{n-i}}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{m^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{k_1,l_1}(\varphi_1) \otimes \mathbf{I}_{m^{n-i}}\right]\times\ldots\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{m^{i-1}} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{k_q,l_q}(\varphi_q) \otimes \mathbf{I}_{m^{n-i}}\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{D}_m\left(\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},...\alpha_{m,1}\right)\otimes\ldots\otimes\mathbf{D}_m\left(\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},...,\alpha_{m,n}\right)\right]\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{m^{i-1}}\otimes\mathbf{R}_{k_q,l_q}(\varphi_q)\otimes\mathbf{I}_{m^{n-i}}\right]\times\ldots\times\prod_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_{m^{i-1}}\otimes\mathbf{R}_{k_1,l_1}(\varphi_1)\otimes\mathbf{I}_{m^{n-i}}\right], \quad (6)$$

где q – количество поворотных матриц для полной диагонализации $\mathbf{F}$ -матрицы. Используя в (6) диагональную матрицу общего вида с m^n свободными параметрами, получим m^n параметрическое $\mathbf{F}$ -преобразование с неразделимой диагональной матрицей.

Очевидно, что в случаях $m=2,3...$ имеем преобразование Уолша и Крестенсона – Виленкина. При $n=1$ имеем преобразование Фурье и синусно-косинусные преобразования.

5. Дробные и многопараметрические преобразования Хаара

Пусть $\mathbf{M}=\left[M_k\left(n\right)\right]_{k,n=0}^{N-1}$ – произвольное несимметричное обратимое $(N\times N)$ – преобразование. Сформируем два произведения $\mathbf{MM}^+$ и $\mathbf{M}^+\mathbf{M}$, где «+» – символ эрмитова сопряжения. Эти преобразования симметричны и, следовательно, имеют собственные разложения: $\mathbf{MM}^+=\mathbf{V\Lambda V}^+$, $\mathbf{M}^+\mathbf{M}=\mathbf{W\Lambda W}^+$, где $\mathbf{\Lambda}:=\mathbf{diag}\left\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}\right\}$ – диагональная матрица сингулярных чисел. Тогда $\mathbf{M}$ имеет следующее сингулярное разложение $\mathbf{M}=\mathbf{VDW}^+$, где $\mathbf{V}=\left[\Phi_0\left(i\right)|\,\Phi_1\left(i\right)|\vdots|\,\Phi_{N-1}\left(i\right)\right]$, $\mathbf{W}=\left[\Psi_0\left(i\right)|\,\Psi_1\left(i\right)|\vdots|\,\Psi_{N-1}\left(i\right)\right]$ – матрицы собственных векторов преобразований $\mathbf{MM}^+$ и $\mathbf{M}^+\mathbf{M}$, соответственно, и $\mathbf{D}=\sqrt{\Lambda}:=\mathbf{diag}\left\{\sqrt{\sigma_0},\sqrt{\sigma_1},\ldots,\sqrt{\sigma_{N-1}}\right\}=\mathbf{diag}\left\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1}\right\}$.

Если $\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}$ – произвольные вещественные числа, то преобразование

$$\mathbf{M}^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_{\mathrm{N-1}})}:=\mathbf{V}\left\{\mathbf{diag}\left(\lambda_0^{\alpha_0},\ldots,\lambda_{\mathrm{N-1}}^{\alpha_{\mathrm{N-1}}}\right)\right\}\mathbf{W}^+$$

называется многопараметрическим $\mathbf{M}$-преобразованием. Если $\alpha_i=\alpha \quad \forall i=0,1,\ldots,N-1$, то это преобразование называется дробным $\mathbf{M}$-преобразованием. В качестве $\mathbf{M}$-преобразования будет использовано дискретное вейвлет преобразование Хаара и построены его многопараметрические версии, включая и дробное преобразование Хаара.

Вейвлет преобразование Хаара может быть определено с использованием классического дискретного преобразования Хаара, имеющего следующее разложение на множители:

$$\mathbf{H}_{2^n}=\prod_{i=1}^{n}[(\mathbf{W}_2\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}})\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}]\mathbf{P}_{2^n}, \quad (7)$$

где $\mathbf{W}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ – $\left(2\times2\right)$ – преобразование Уолша, P_{2^n} – так называемая матрица «идеального» перемешивания: $\mathbf{P}_{2^n}=\prod_{i=2}^{n}\left(\mathbf{I}_{2^{n-i}}\otimes\mathbf{P}_4\otimes\mathbf{I}_{2^{i-2}}\right)$, где $\mathbf{P}_4$ – оператор «bit swap», т. е., $\mathbf{P}_4\left(i_1,i_0\right):=\left(i_0,i_1\right)$.

Используя в (7) двухпараметрическое $\left(2\times2\right)$-преобразование Уолша (1), получаем $2n$-параметрические преобразование Хаара

$${}_{2^n}\mathbf{H}_{(\alpha_{11},\alpha_{21};\alpha_{12},\alpha_{22};...;\alpha_{1n}\alpha_{2n})}=\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\overline{\mathbf{R}}_2\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1i},\alpha_{2i}\right)\mathbf{R}_2\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}\right\}\mathbf{P}_{2^n} \quad (8)$$

со следующим сингулярным разложением

$${}_{2^n}\mathbf{H}_{(\alpha_{11},\alpha_{21};\alpha_{12},\alpha_{22};...;\alpha_{1n}\alpha_{2n})}=\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\overline{\mathbf{R}}_2\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}\right\}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\mathbf{D}_2\left(\alpha_{1i},\alpha_{2i}\right)\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}\right\}\times\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\mathbf{R}_2\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}\right\}\mathbf{P}_{2^n}= \quad (9)$$
$$=\mathbf{V}\times\mathbf{D}(\alpha_{11},\alpha_{21};...;\alpha_{1n}\alpha_{2n})\times\mathbf{W}^+.$$

Количество параметров в выражении (9) можно увеличить с $2n$ до 2^n, используя вместо диагональной матрицы тензорной структуры диагональную матрицу общего вида с 2^n свободными параметрами $\mathbf{D}_{2^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n}\right)$, что дает новое 2^n-многопараметрическое преобразование Хаара с неразделимой диагональной матрицей:

$$\mathbf{H}_{2^n}^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n})} = \mathbf{V}\times\mathbf{D}_{2^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n}\right)\times\mathbf{W}^+ =$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\overline{\mathbf{R}}_2\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}\right\}\times\mathbf{D}_{2^n}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2^n}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\mathbf{R}_2\otimes\mathbf{I}_{2^{n-i}}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-i+1}}\right\}\mathbf{P}_{2^n}.$$

Заключение

Представлен систематический метод синтеза многопараметрических симметричных ($\mathbf{F}$) и несимметричных ($\mathbf{M}$) преобразований. Базисные функции преобразований Уолша и Хаара могут быть использованы в качестве поднесущих в обобщенных OFDM и CDMA системах. При плавном изменении параметров $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m^n})$ многопараметрические преобразования плавно меняют свою форму от тождественных преобразований до классических, что позволяет ввести элементы адаптации в спектральный анализ сигналов.

Литература / References

1. Wiener N. Hermitian Polynomials and Fourier Analysis. *J. Math. Phys.*, 1929, 8, pp. 70–73. DOI: 10.1002/sapm19298170

2. Condon E.U. Immersion of the Fourier Transform in a Continuous Group of Functional Transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1937, vol. 12, pp. 158–164. DOI: 10.1073/pnas.23.3.158

3. Bargmann V. On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform. Part 1. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1961, vol. 14, no. 3, pp. 187–214. DOI: 10.1002/cpa.3160140303

4. Namias V. The Fractional Order Fourier Transform and its Application to Quatum Mechanics. *J. Inst. Math. Appl.*, 1980, vol. 25, pp. 131–265. DOI: 10.1093/imamat/25.3.241

5. McBride A.C., Kerr F.H. On Namias' Fractional Fourier Transforms. *IMA J. Appl. Math.*, 1987, vol. 39, pp. 131–265. DOI: 10.1093/imamat/39.2.159

6. Ozaktas H.M., Mendlovic D. Fourier Transform of Fractional Order and Their Optical Interpretation. *Opt. Commun.*, 1993, vol. 101, no. 3, pp. 163–169. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90359-D

7. Sejdić E., Djurović I., Stanković L. Fractional Fourier Transform as a Signal Processing Tool: An Overview of Recent Developments. *Signal Processing*, 2011, vol. 91, no. 6, pp. 1351–1369. DOI: 10.1016/j.sigpro.2010.10.008

Лабунец Валерий Григорьевич, д-р техн. наук, профессор, кафедра теоретических основ радиотехники, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина.

Мартюгин Степан Александрович, аспирант, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина; инженер, АО «Научно-производственное объединение автоматики имени академика Н.А. Семихатова»; stmart2608@gmail.com.

Поступила в редакцию 10 сентября 2016 г.

DOI: 10.14529/ctcr160416

FAST MULTIPARAMETER WALSH, CHRESTENSON-VILENKIN AND HAAR TRANSFORMS

V.G. Labunets[1],
S.A. Martyugin[1, 2], *stmart2608@gmail.com*
[1]*Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation,*
[2]*SPA Automatics, named after Academician N.A. Semikhatov, Ekaterinburg, Russian Federation*

In this article the new class of multiparameter and fractional Walsh Krestensona-Vilenkin and Haar transforms for the adaptive spectrum analysis of signals is provided and quick algorithms are developed for these conversions. Fractional one-parameter conversions are the special case of these multiparameter conversions. The systematic method of synthesis of multiparameter symmetric and asymmetrical conversions is provided. In case of the smooth change of parameters multiparameter conversions change the form from identical conversions to classical smoothly that allows to enter adaptation elements into spectrum analysis of signals. Basis functions of Walsh transforms and Haar can be used as subcarriers in the generalized OFDM and CDMA systems.

Keywords: Fourier Transform, Walsh Transform, Chrestenson-Vilenkin Transform, Haar Transform, Fractional and multiparameter transforms, signal and image processing.

Received 10 September 2016

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Лабунец, В.Г. Быстрые многопараметрические преобразования Уолша, Крестенсона – Виленкина и Хаара / В.Г. Лабунец, С.А. Мартюгин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 136–142. DOI: 10.14529/ctcr160416

FOR CITATION

Labunets V.G., Martyugin S.A. Fast Multiparameter Walsh, Chrestenson – Vilenkin and Haar Transforms. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 136–142. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr160416