УДК 681.513.8 DOI: 10.14529/ctcr160402

# СМЫСЛЫ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ И ОПТИМИЗАЦИИ

***Вл.Д. Мазуров, Д.В. Гилёв***

*Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург*

Изучается интерпретация комитетных решений неформализованных и противоречивых задач распознавания, а также надёжность таких решений. Строится соответствующая инконсистентная логика. Также приводится необходимое и достаточное условие построения комитетов для разделения трудно разделимых, но всё-таки непересекающихся конечных множеств. Описываются также конструкции, близкие к понятию комитета, их интерпретации и применение. Особое внимание уделяется использованию комитетных конструкций в области оптимизационных задач. Отмечается, что применимость этих конструкций в решении прикладных задач основана не только на решении конкретных задач, но и подтверждена строгим математическим обоснованием, которое приведено в данной статье в виде теорем. Также делается вывод, что в несобственных задачах или нет решений, или нарушаются соотношения двойственности.

*Ключевые слова: метод комитетов, противоречивость ограничений, несобственные задачи.*

## Введение

Смысл несуществующего в силу системы ограничений объекта выражается в смыслах максимальных по включению совместных подзадач задачи выбора. Например, когда ограничения слишком жёсткие.

Противоречивые ситуации выбора решений и отвечающие им противоречивые математические задачи сейчас уже приходится принимать как данность. Во многом это связано с проблемами формализации содержательных и вербальных текстов. Противоречия с одной стороны неизбежны, а с другой стороны они продуктивны. Надо только их не отбрасывать как негодный материал, а работать с ними аккуратно и обоснованно. При противоречивых системах можно применять обход эффективных состояний. Например, обход виртуального равновесия. Тогда статическая задача в объективном смысле преобразуется в динамическую.

## 1. Исторические предпосылки

Такие задачи впервые явным образом рассмотрены академиками Кондорсе и Борда. Они обратили внимание на нетранзитивность голосования при выборах.

На несобственные задачи надо смотреть как на естественные модели «возможных миров». Формализация описания объектов в какой-то степени предполагает толерантное отношение к их содержанию, но это не небрежность, а профессиональная работа. Идеи анализа несобственных (в том числе противоречивых) задач обсуждались нами с академиками РАН И.И. Ерёминым, Н.Н. Красовским и Ю.И. Журавлёвым [1].

Учёт экологических факторов в моделях горно-рудных технологий обсуждался с академиком АН СССР С.С. Шварцем [2]. Заметим, что класс несобственных задач шире, чем класс противоречивых задач – например, в математическом программировании собственные задачи обладают свойством совпадения значений прямой и двойственной задач.

## 2. Постановка задачи

Пусть $x = [x_1,\ldots,x_n] \in R_n$ – вектор состояния некоторого объекта. Он неизвестен, и мы хотим оценить этот вектор с помощью некоторых приборов, причём для некоторых видов приборов известны реакции приборов на объект. Прибор $p_j$ (для которого известна аналитическая зависимость как функция от вектора состояния) работает по схеме

$x \to p_j \to f_j(x)$ для $j \in J$;

прибор $p_s$ с номером $s \in S$ работает по схеме

$x \to p_s \to g_s(x)$.

Множества J и S предполагаются конечными и не имеющими общих элементов.

Зависимости fj(x} известны аналитически. Зависимости gs(x) неизвестны (неформализованы). Их надо идентифицировать в ходе решения задачи выбора допустимого по ограничениям объекта.

Мы отбираем допустимые векторы состояний x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$A_j \le f_j(x) \le B_j \ (j \in J); \quad (1)$$

$$a_s \le g_s(x) \le b_s \ (s \in S). \quad (2)$$

Здесь вторая группа неравенств – чисто символическая. Эти неравенства приобретут конкретный смысл в ходе решения задачи. Для этого мы привлекаем экспертов или эксперименты, которые проверяют допустимость возникшего в ходе итераций вектора состояния x по неформализованным критериям (2). В частности, изначально в моделях и неформализованы задачи с экологическими ограничениями.

Идея применения описанной процедуры поиска допустимого по критериям (1), (2) вектора состояния возникла вначале в ходе решения в 1982 году реальной прикладной горно-геологической задачи оценки блоков разработки рудного тела, подходящих по минеральному составу [3].

Метод решения подобной задачи был обсуждён в ходе бесед с канд. техн. наук В.М. Кисляк и на семинаре отдела математического программирования Института математики и механики УрО РАН.

В математической экологии рассматриваются описания биогеоценоза с точки зрения их включения в модель горно-рудного комплекса. Эти факторы трудно формализуемы. При этом в данном примере рассматривается минеральный состав рудного тела, $x_i$ – содержание некоторого полезного компонента в i-м блоке. Минеральный состав вначале прогнозируется средствами распознавания образов, а по мере выемки породы уточняется. В результате система (1) – (2) как правило становится несовместной.

Далее – уже в конце решения задачи – вектор x становится интерпретацией наблюдений. Если система (1) – (2) совместна, функции gs идентифицированы, то мы имеем множество решений этой системы, и тогда мы получаем множество интерпретаций наблюдений с помощью приборов. Обычно приборы измеряют значения естественных геофизических полей – гравитации, электромагнитного поля, температуры, сейсмического поля, радиационного. Есть и искусственно создаваемые поля.

Т.Н. Внуковская отмечает, что объединение нескольких научных школ с целью выработки более многомерных описаний объектов часто приводит к противоречивым описаниям объектов [4]. Из всего множества интерпретаций мы выбираем вектор x, оптимальный по некоторому критерию.

Если же система (1) – (2) несовместна, то мы ставим ей в соответствие комитетное решение, определяющее «размытую» интерпретацию.

В общем же случае система может быть и несовместной, и неформализованной. Тогда мы вначале применяем распознавание образов для идентификации неформализованных ограничений, а затем используем понятие комитета системы (1) – (2) как конструкцию для многозначной интерпретации противоречивых данных.

Это похоже на метод альтернатив, придуманный К. Поппером в другой ситуации. А именно, К. Поппер исследовал пути развития научного знания [5].

Ещё в древности Августин считал, что Бог – творец духовного и физического мира, и Он заложил в модели физического мира семенные причины – «логосы», содержащие то, что должно было раскрыться в ходе эволюции.

### 3. Математическое обоснование применения метода комитетов

Комитетом системы ограничений называется такое конечное множество C элементов пространства $R_n$, что каждому ограничению удовлетворяют более половины элементов из C.

Точнее, комитетом большинства системы ограничений

$$x \in H_k \ (k \in K),\ x \in H,$$

называется такое множество C – подмножество множества H, что для любого $k \in K$:

$$\mathrm{I}\{x \in C: x \in H_k\}\mathrm{I} > \mathrm{I}\{x \in C : x \in H\backslash H_k\}.$$

Здесь вертикальными чёрточками обозначена мощность множества. В конечном случае – число элементов множества.

В задачах построения решающих правил интерпретации, прогнозирования, диагностики и классификации комитетные конструкции являются моделями принятия решений на основе идеи консилиума, которая обычно применяется в медицинской сфере в наиболее сложных случаях. А именно, если задача построения решающего правила в выбранном классе правил неразрешима, то строится некоторый коллектив решающих правил и способ («демократия») выработки результирующего коллективного решения. Буквально консилиумное построение решающего правила использует более изощрённую методику – она в наших работах строится как комитет старшинства. При этом во многих случаях неразрешимость задачи преодолевается; модифицированная постановка задачи приобретает свойство непротиворечивости. Интересно, что нами установлена необходимая и достаточная для разделения трудно разделимых множеств, но всё-таки непересекающихся конечных множеств, процедура построения: члены комитета должны выбираться в классе аффинных функций. И с этой добавкой метод комитетов большинства и старшинства становятся адекватными методами дискриминации.

В задачах математического программирования комитеты являются моделями «размытого» решения, то есть некоторого «облака» элементов, обладающего не всеми, но существенными свойствами решения, в обычном совместном случае сосредоточенного в одном элементе.

Возможны и многие другие интерпретации комитетных решений, вытекающие из «физического» или содержательного смысла решаемой задачи. В общем же смысле комитет является обобщением понятия решения, применяемым в несовместном случае.

К настоящему времени предложено много конструкций, близких к понятию комитета. Это, например, p-комитеты и другие комитетные конструкции, измеряющие процент правильных диагностик. Кроме комитетов большинства рассматривались комитеты старшинства, комитеты запрета, разделяющие наборы тестов, комитеты единогласия, комитеты с произвольной (общей) логикой.

Комитетные конструкции – одно из средств релаксации противоречивости ограничений задачи; они дают некоторые из возможных направлений ослабления жёсткости системы ограничений задачи. В задачах принятия решений иногда могут встречаться слишком жёсткие критерии, следствием которых является противоречивость и несовместность требований.

В области оптимизационных задач комитетные конструкции могут применяться в следующих ситуациях:

– в задачах математического программирования с противоречивой системой условий; например, для целей оптимизации на максимальных по включению совместных подсистемах системы условий, задающих по идее допустимое множество вариантах;

– в многокритериальной оптимизации;

– для построения некоторых способов решения несовместных вариационных неравенств;

– в задачах оптимального планирования, при построении смешанных стратегий назначения последовательности планов, удовлетворяющих подсистемам условий;

– при построении наиболее сложных, трудно формализуемых (и уж совсем редко – в принципе неформализуемых) зависимостей в задачах математического моделирования технико-экономических и природных систем (как быть с неформализуемостью – будет сказано отдельно);

– при построении и исследовании принятия коллективных или групповых решений (как правило, в социологии и экономики);

– при построении и исследовании решающих правил классификации объектов в задачах оптимизации, в частности для повышения надёжности распознавания – при решении задач дискриминантного и кластерного анализа, при поиске информативных систем признаков, для структурирования материала обучения и его коррекции;

– для управления эмпирически заданными процессами;

– для построения оценивающих функций в искусственном интеллекте.

Доказано: коллективные решения надёжнее и устойчивее индивидуальных решений.

Комитеты как некоторые обобщения решений несобственных задач оптимизации и распознавания (в частности, задач с несовместными системами условий) основаны на следующей идее:

Определённые функции решения берёт на себя заменяющая его совокупность точек такая, что каждому ограничению удовлетворяют не менее заданного процента точек этой совокупности.

К этому направлению можно отнести работы, посвящённые вопросам организации коллективов алгоритмов через демократию между членов коллектива.

Применимость комитетных конструкций в решении прикладных задач основана в частности на том, что свойства p-комитетов подтверждена не только конкретными решёнными прикладными задачами, но и математическим обоснованием.

Итак, математическое обоснование – в следующих теоремах.

Теорема 1. Если система D множеств $D_1,\ldots,D_m$ такова, что всякие s её множеств имеют непустые пересечения, то при s\m > p существует p-комитет системы

$x \in D_j$ $(j = 1,\ldots,m)$.

Теорема 2. Для того чтобы система линейных неравенств над пространством $R_n$

$(c_j, x) > 0$ $(j = 1,\ldots,m)$

обладала комитетом, необходимо и достаточно, чтобы любая её подсистема из двух неравенств была совместной [6].

Теорема 3. Пусть множества A, B в $R_n$ конечны. Для того чтобы существовал разделяющий эти множества комитет аффинных функций, необходимо и достаточно, чтобы множества A и B не имели общих элементов.

Рассмотрим применения приведённых конструкций. Метод комитетов существенно использует поиск максимальных по включению совместных подсистем системы неравенств и поиск минимальных по включению несовместных подсистем. Уже сами эти подсистемы дают богатую информацию об особенностях системы условий, что можно и чего нельзя сказать о соответствующих особенностях задачи приятия решений.

**4. Экономико-математические модели**

Рассмотрим вопрос об идентификации экономико-математических моделей. Этот вопрос решается на основе прецедентов. Например, при решении задачи управления технологическими процессами. Пусть состояние процесса описывается вектором параметров $x \in R_n$. При воздействии управления $u \in U$ можно вычислить оценку f(x,u) эффективности производства. Самое эффективное управление u(x) определяется из равенства

$f(x, u(x)) = \max\{f(x,u): u \in U\}$.

Пусть $U = \{u_i: i = 1,\ldots,m\}$, M – множество состояний процесса,

$M_j = \{x: u(x) = u_j\}$.

Тогда задача выбора эффективного управления u(x) состоит в нахождении разбиения множества M на классы $M_j$ по прецедентным подмножествам $N_j$ множеств $M_j$. Это задача дискриминантного анализа.

Такая задача была решена нами для выбора управления на горно-обогатительном комбинате в 1977 году [7].

Приведём оценку надёжности комитетного прогноза.

Пусть задача разделения множеств A, B функцией f решается комитетом

$C = [f_1,\ldots,f_q]$,

причём $f_i$ разделяет подмножества $A_i$, $B_i$. И пусть элементы этих множеств появляются в соответствие с нормальным распределением. Обозначим:

$G_i = E\ (xI\ A_i)$, $Hi = E(xI\ B_i)$.

По этим данным вычисляем дисперсии, а по ним – плотности вероятностей

$p(y_i IA_i)$, $p(y_i IB_i)$.

Тогда мы можем вычислить вероятности ошибочных классификаций:

p(B/A) и p(A/B).

Наконец, о неформализуемом. В случае расширяющихся выпуклых непересекающихся множеств, co $A_i$, co $B_i$, когда объединение всех множеств лежит внутри ограниченного замкнутого множества. Здесь co – символ выпуклой оболочки.

Используя результат С.А. Гальперина [8], покажем, что в неформализуемом случае может появиться последовательность с континуумом предельных точек. Для этого возьмём прижимающую последовательность, «наматывающуюся» на выпуклый замкнутый шар и отобразим её точки в симметрические относительно поверхности шара. Тогда новые точки будут прижиматься изнутри шара к его границе. И это как раз и есть свойство неформализуемых задач.

У нас имеется богатый опыт решения многих неформализованных и противоречивых задач в разных областях. Противоречия влекут множество возможных миров.

Вообще, идея альтернативных путей и соответственно множества возможных миров была высказана давно, ещё в античной философии.

**Заключение**

Универсальность и строгая обоснованность метода комитетов, его важные интерпретации делают его применимым и в распознавании образов, и в математическом программировании, и в математической экономике и социологии, и в физико-технических науках, в биологии и медицине, а также в исследовании операций.

**Работа поддержана РНФ № 14-11-00109.**

***Литература***

1. *Еремин, И.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И.И. Еремин, Вл.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. – М.: Наука, 1983. – 336 с.*

2. *Шварц, С.С. Экологические закономерности эволюции / С.С. Шварц, Н.Н. Данилов. – М.: Наука, 1980. – 278 с.*

3. *Мазуров, Вл.Д. Реализация диагностики и выбора вариантов в горно-геологических задачах / Вл.Д. Мазуров, М.Ю. Хачай, В.П. Некрасов // Изв. вузов. Горный журнал. – 2001. – № 1. – С. 10–15.*

4. *Внуковская, Т.Н. Современные методические подходы к приращению научного знания / Т.Н. Внуковская // Многоконцептуальность в науке: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 65-летию проф. Б.В. Личмана / под ред. проф. В.В. Запария. – Екатеринбург: Изд-во УМЦ-УПИ, 2011. – С. 133–137.*

5. *Поппер, К. Объективное знание. Эволюционный подход / К. Поппер. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 384 с.*

6. *Мазуров, Вл.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации / Вл.Д. Мазуров. – М.: Наука, 1990. – 248 с.*

7. *Гизатуллин, Х.Н. Оценка комплексных железных руд в производстве черных металлов / Х.Н. Гизатуллин // Математические методы в планировании промышленного производства. – Свердловск: АН СССР, УНЦ, ИММ, 1977. – Вып. 22. – С. 42–50.*

8. *Гальперин, С.А. Прижимающие отображения / С.А. Гальперин. // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: материалы конференции (Владивосток, 7–14 сентября 2007). – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. – С. 15–20.*

**Мазуров Владимир Данилович**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математической экономики Института математики и компьютерных наук, профессор кафедры эконометрики и статистики Высшей школы экономики и менеджмента, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; vldmazurov@gmail.com.

**Гилёв Денис Викторович**, аспирант Института математики и компьютерных наук, ассистент кафедры эконометрики и статистики Высшей школы экономики и менеджмента, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; deni-gilev@narod.ru.

***Поступила в редакцию 30 августа 2016 г.***

DOI: 10.14529/ctcr160402

# MEANINGS OF IMPROPER PROBLEMS OF CLASSIFICATION AND OPTIMIZATION

***V.D. Mazurov***, *vldmazurov@gmail.com*,
***D.V. Gilev***, *deni-gilev@narod.ru*
*Ural Federal University named after the First President of Russia Boris Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation*

In this article we study the interpretation of the formalized Committee decisions and conflicting objectives recognition and also reliability of such solutions. Inconsistently corresponding logic is built. Also a necessary and sufficient condition for the building committees for the separation of hard-separable, but still disjoint finite sets is provided. The design close to the concept of the Committee, their interpretation and application are described. Special attention is paid to the use of the Committee structures in the area of optimization problems. It is noted that the applicability of these structures in solving applied problems is based not only on solving specific problems, but also confirmed by a rigorous mathematical justification, which is given in this article as theorems. Also it is concluded that in non-native tasks or there are no solutions, or violated the relation of duality.

*Keywords: Method of the committees, the inconsistency of the restrictions, improper task.*

**References**

1. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astafiev N.N. *Nesbstvennye zadachi lineynogo I vypuklogo programmirovaniya* [Improper Problems of Linear and Convex Programming]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 336 p.
2. Schwartz S.S., Danilov N.N. *Ekologicheskie zakonomernosti evolyutsii* [Ecological Regularities of Evolution]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 278 p.
3. Mazurov Vl.D., Khachay M.Yu., Nekrasov V.P. [Implementation of Diagnosis and in the Mining and Geological Tasks]. *News of Higher Education Institution. Mining Journal*, 2001, № 1, pp. 10–15. (in Russ.)
4. Vnukovskaya T.N. Modern methodological approaches to the increment scientific knowledge. *Mnogokontseptual'nost' v nauke, Materialy mezhdunarodnoy konferetsii, posvyashchennoy 65-letiyu prof. B.V. Lichmana* [Materials of the International Scientific Conference Devoted to 65-Anniversary of Professor B.V. Lichman]. Ekaterinburg, 2011, pp. 133–137.
5. Popper K. *Ob'ektivnoe znanie. Evolyutsionnyy podkhod* [Objective Knowledge. An Evolutionary Approach]. Moscow, Editorial URSS, 2002. 384 p.
6. Mazurov Vl.D. *Metod komitetov v zadachakh optimizatsii i klassifikatsii* [Method of Committees in Optimization and Classification]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 248 p.
7. Gizatullin H.N. Evaluation of Comprehensive Iron Ores in the Production of Ferrous Metals. [*Mathematic Methods in Planning of Industrial Production*]. Sverdlovsk, 1977, vol. 22, pp. 42–50. (in Russ.)
8. Halperin S.A. [Pressing display]. *Rossiyskaua konferetsiya "Diskretnaya optimizatsiya i issledovanie operatsiy"* [Russian conference "Discrete optimization and operations research" (Vladivostok, 7–14 September, 2007)]. Novosibirsk, Publ. of Institute of Mathematics, 2007, pp. 15–20. (in Russ.)

***Received 30 August 2016***

**ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ**

Мазуров, Вл.Д. Смыслы несобственных задач классификации и оптимизации / Вл.Д. Мазуров, Д.В. Гилёв // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 13–18. DOI: 10.14529/ctcr160402

**FOR CITATION**

Mazurov V.D., Gilev D.V. Meanings of Improper Problems of Classification and Optimization. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 13–18. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr160402