

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМАЦИИ ДВУМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПРОТОЧНОМ ТРАКТЕ ВИХРЕВОГО РАСХОДОМЕРА В ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

А.Л. Карташев, А.А. Кривоногов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Статья посвящена разработке математической модели, трансформирующей частоту, фазу, амплитуду двумерного течения в аналогичные параметры для трехмерного течения.

В статье представлены результаты выполнения анализа существующей 3D модели, реализованной в пакете ANSYS, используемой для моделирования течения в проточной части вихревого расходомера.

По результатам анализа картины течения в проточной части вихревого расходомера определены базовые точки геометрии проточного тракта вихревого расходомера, в которых будет проводиться математическое моделирование.

Разработана функциональная структура математической модели определения параметров течения в проточной части вихревого расходомера для варианта двумерного моделирования.

Осуществлен выбор математического метода трансформации трехмерной модели расчета проточного тракта вихревого расходомера в двумерную модель.

Разработан вычислительный алгоритм математической модели, связывающей трехмерную и двумерную модели проточного тракта вихревого расходомера. Алгоритм основан на использовании быстрого преобразования Фурье и решении задачи минимизации для определения частоты, амплитуды и фазы сигнала.

Актуальность исследования связана с выбором оптимального математического алгоритма моделирования процесса срыва вихрей с тела обтекания, находящегося в трубе (проточной части вихревого расходомера), и распространения вихрей ниже по потоку для последующей оптимизации.

Ключевые слова: проточный тракт вихревого расходомера, 3D модель, 2D модель, пакет программ ANSYS, тестовые расчеты, математический метод трансформации 2D модели, число Струхала, Число Рейнольдса.

Введение

Расчет параметров вихревого расходомера и определение его оптимальных геометрических и рабочих характеристик представляет собой одну из важнейших задач, решаемых при проектировании расходомерного устройства, использующего процесс нестационарного вихреобразования для определения расхода жидкости или газа.

Одним из основных методов решения рассматриваемой задачи является математическое моделирование. Однако при проведении математического моделирования возникает ряд проблем, без преодоления которых невозможно их эффективное применение для вихревых расходомеров [1].

Исследование проблем математического моделирования в вихревой расходомерии требует новых современных подходов, в которых одновременно совмещены высокая точность и низкая ресурсоемкость. В современном мире для исследования вихревых течений все более широкое применение получают численные методы, основанные на ряде математических моделей, которые реализованы в различных программных пакетах (ANSYS CFX, ANSYS Fluent, STAR-CD, FLOWEFD, NUMECA, OpenFOAM, Phoenix и др.) [2]. Благодаря применению численных мето-

дов удается получать полезную информацию, которую на физическом эксперименте получить невозможно, а также иметь возможность обходиться без физического эксперимента.

Трехмерное численное моделирование (далее 3D моделирование), являясь мощным средством расчета пространственного вихревого течения в вихревом расходомере, обладает существенным недостатком – значительным временем счета. Особенно ярко данный недостаток проявляется при решении задач оптимизации, которые связаны с проведением серии последовательных расчетов характеристик вихревого расходомера (метод итераций, прямые методы оптимизации) [3, 4].

Двумерное численное моделирование (далее 2D моделирование), свободное от указанного недостатка (значительного времени счета и затрат вычислительных ресурсов), удобно применять в процедурах оптимизации, что позволяет быстро получать оптимальные конфигурации вихревых расходомеров, однако результаты расчета по 2D моделям отличаются от 3D модели, что, в свою очередь, часто ставит под сомнение возможность их применения для расчета характеристик оптимальных расходомерных устройств.

При разработке математической модели оптимизации проточной части вихревого расходомера основной проблемой является обеспечение возможностей решения оптимальных задач с использованием 2D моделирования. При этом необходимо обеспечить точность расчета характеристик вихревого расходомера по 2D модели близкой, то есть соответствующей с определенной (заданной) погрешностью, точности расчета по 3D модели.

Необходимость проведения исследований по математическому моделированию процессов в вихревых расходомерах обусловлена важностью проведения численных исследований конструкций, рассматриваемых расходомерных устройств с помощью высокоэффективных алгоритмов, обладающих необходимой точностью и затрачивающих приемлемые вычислительные ресурсы. Одним из рассматриваемых вариантов является выбор математического метода трансформации 3D модели в 2D модель.

Такая трансформация предполагает установление связей между результатами 3D и 2D моделирования в виде функциональных зависимостей и коэффициентов, зависящих, в том числе от геометрии вихревого расходомера, параметров течения и вида рабочего тела: жидкость или газ.

1. Описание численной модели

Для разработки математического метода трансформации была построена геометрическая модель проточной части в трехмерной и плоской постановке с возможностью параметрического перестроения (рис. 1) в ANSYS Workbench, Designmodeler.

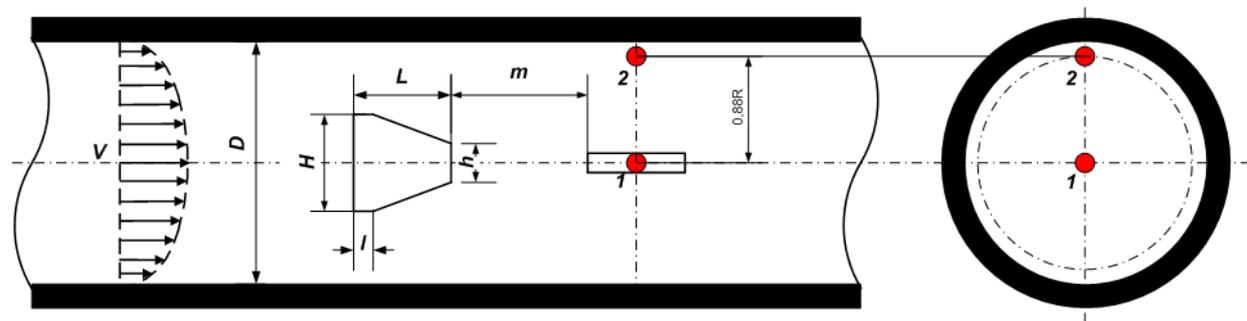


Рис. 1. Схема расположения базовых точек для сравнения результатов 3D и 2D моделирования

В ANSYS были построены 2 конечно-элементные модели в соответствии с рекомендациями, полученными по результатам исследований, представленных в работе [5].

Построены две геометрические конфигурации проточного тракта вихревого расходомера: трехмерная (3D-геометрия), представленная на рис. 2, а, и плоская (2D-геометрия), представленная на рис. 2, б.

Далее были построены O – Greed сетки для трехмерного случая (рис. 3, а) и для плоского варианта (рис. 3, б). Следует отметить, что в ANSYS CFX нет возможности моделировать реальное двумерное течение, но можно задать толщину слоя в одну ячейку.

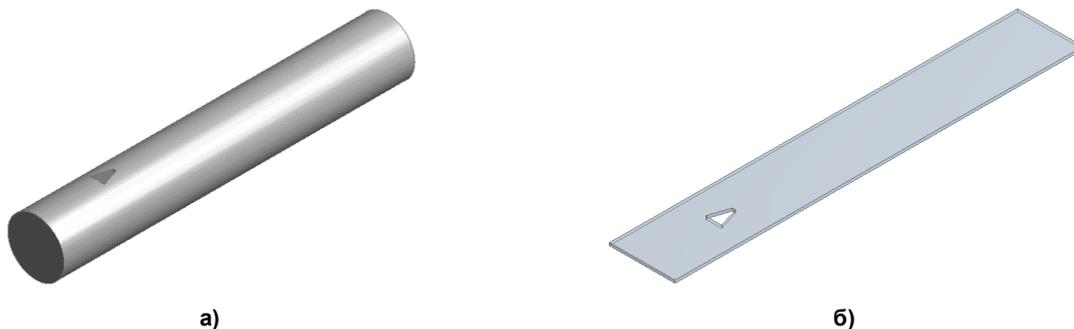


Рис. 2. Геометрия проточной части

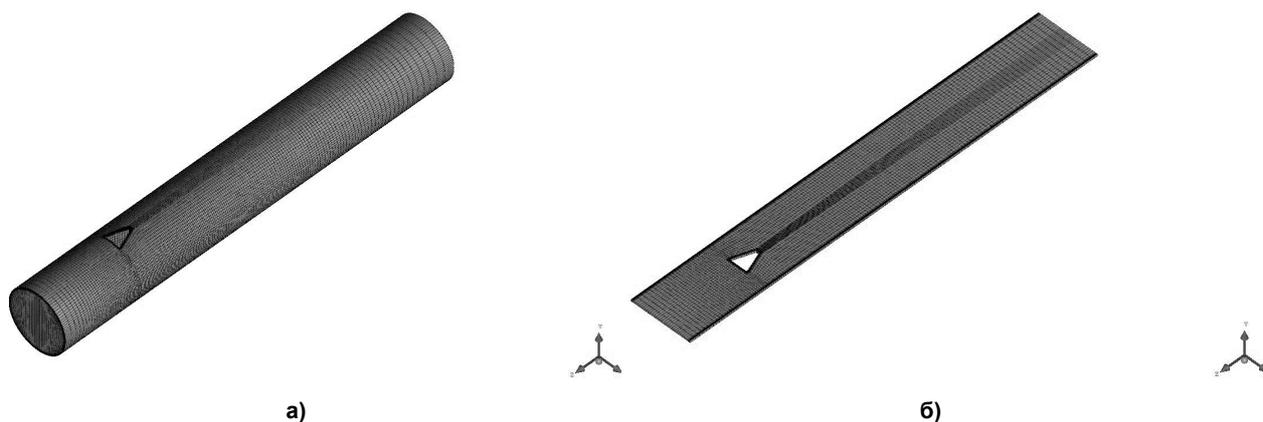


Рис. 3. Конечно-элементная модель проточной части

В двумерном случае есть определенные отличия при настройке исходного файла решателя по сравнению с трехмерным вариантом. Начальный профиль скорости задается по оси параллельной сечению (1), а не радиуса трубы как в трёхмерной модели. В данном случае этой координатой осью является ось X (см. рис. 3, б). Таким образом, в трехмерном случае профиль имел форму эллиптического параболоида, а в двумерном – бесконечно длинного параболического цилиндрического сегмента (рис. 4):

$$V_{prof} = V_{max} \cdot \left(1 - \left|\frac{r}{R_{max}}\right|\right)^{0,143} \quad (1)$$

Кроме профиля скорости в плоской задаче на секущие плоскости были заданы условия симметрии, в результате чего модель стала представлять собой бесконечно длинное тело обтекания, ограниченное бесконечно длинными стенками.

Для сравнения результатов 3D и 2D моделирования необходимо определить базовые точки геометрии проточного тракта вихревого расходомера, в которых будет устанавливаться соответствие параметров 3D и 2D моделирования. Так как в процессе вихреобразования с тела обтекания вихри срываются не симметрично [6, 7]. В центральной части проточного тракта частота с максимальной амплитудой будет в два раза выше, чем в крайней точке. Это связано с тем, что энергия вихря с противоположной стороны проточной части значительно ниже. Поэтому для анализа расчетных данных выбраны следующие базовые точки, представленные на рис. 5. Следует отметить, что общих точек у плоской и у трехмерной модели две.

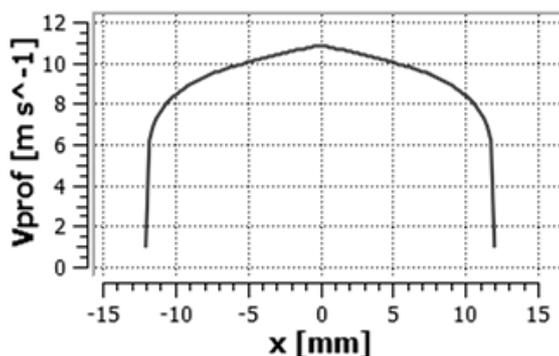


Рис. 4. Начальный турбулентный профиль скорости для плоской модели

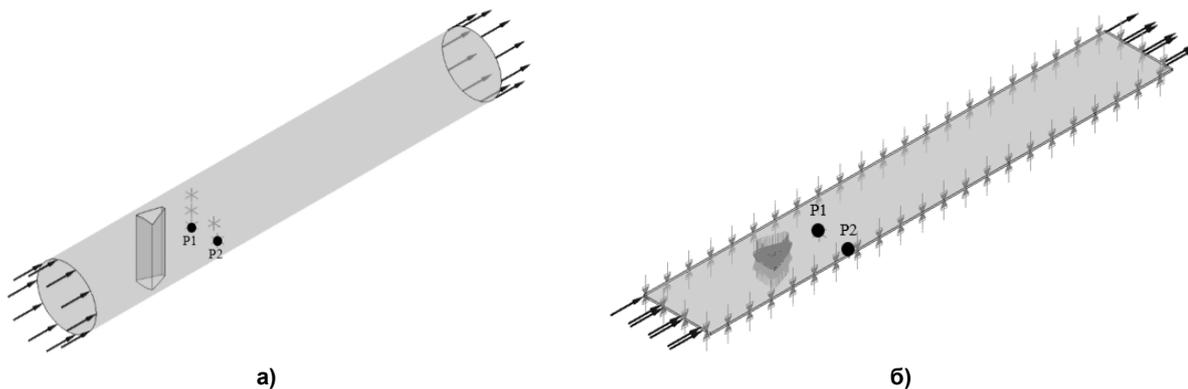


Рис. 5. Расположение базовых точек для сравнения результатов

2. Выбор математического метода трансформации 3D модели расчета проточного тракта вихревого расходомера в 2D модель

Результаты математического моделирования характеристик вихревого расходомера представляют собой кривые, показывающие зависимость величины пульсаций давления от времени (рис. 6). Анализ таких кривых [5] позволяет определить объемный расход рабочего тела в вихревом расходомером устройстве.

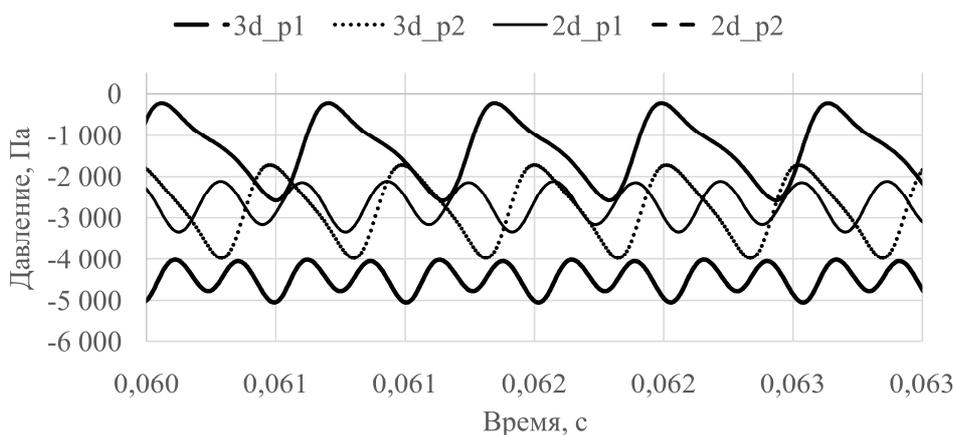


Рис. 6. Пульсации давления в зависимости от времени, воздух Re = 199 595

Выбор математического метода трансформации 3D модели расчета проточного тракта вихревого расходомера в 2D и разработка на ее основе математической модели проводились с использованием общей теории математического моделирования [8, 9] и теории цифровой обработки сигналов [10–14].

Кривую зависимости пульсаций давления от времени можно охарактеризовать следующими параметрами:

- частота (спектр) пульсаций;
- амплитуда пульсаций;
- фаза (фазовый сдвиг) колебаний.

Поэтому для установления соответствия между кривыми зависимости пульсаций давления от времени, получаемыми в результате 3D и 2D моделирования, следует установить соответствие между частотами, амплитудами и фазами пульсаций, получаемыми с помощью различных типов моделирования.

Установление соответствия между результатами 3D и 2D моделирования (иначе – «выбор метода трансформации 3D модели») возможно с помощью введения так называемой «функции трансформации» (2) или, что является более привычным названием, «передаточной функции», которая в общем случае имеет следующий вид:

$$F = F \{ f_m, a_m, \varphi_m, d_y, v, Re, Sh, \tilde{Sh}, (x_i, y_i), \rho, \mu \} . \tag{2}$$

Таким образом, если не рассматривать начальные параметры и вычисляемые величины при постобработке, математическая модель, представленная в виде соотношения (2), содержит три компонента, определяющих функции трансформации:

- f_m – частота колебаний m -й гармоники, Гц;
- a_m – амплитуда колебаний m -й гармоники, Па;
- φ_m – фаза (фазовый сдвиг) колебаний m -й гармоники.

Для определения описанных выше характеристик сигнала необходимо провести их цифровую обработку, которая может быть осуществлена различными методами. При обработке получаемых в результате математического моделирования кривых (сигналов) могут быть использованы различные математические методы, такие как преобразование Фурье (его различные модификации, в том числе быстрое преобразование Фурье), преобразование Хартли, вейвлет-анализ, корреляционный анализ, фильтрация сигнала, спектральный анализ, алгоритмы нелинейных преобразований (ранговая фильтрация, гистограммные преобразования) и др. [10–14].

Сигнал, детектируемый сенсором в проточном тракте вихревого расходомера, представляет собой стационарный периодический сигнал (см. рис. 6), для анализа которого целесообразно использовать методы, основанные на преобразовании Фурье.

Также детектируемый сигнал удовлетворяет условиям Дирихле:

- не должно быть разрывов функции второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции);
- число разрывов первого рода (скачков функции) должно быть конечным;
- число экстремумов функции на конечном интервале должно быть конечным.

Поэтому Фурье-анализ может быть эффективно использован для целей настоящего исследования.

В математической модели использован алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), обеспечивающий существенное снижение временных затрат вычисления коэффициентов дискретного преобразования Фурье.

Применение других вышеупомянутых методов определения характеристик сигнала для решения поставленной задачи возможно, но их преимущества для анализа периодического сигнала, детектируемого вихревым расходомером, неочевидны, а сложность реализации выше, в том числе увеличиваются затраты вычислительных ресурсов и машинного времени.

Поэтому выбор БПФ в качестве метода анализа сигнала в вихревом расходомере, учитывая его дальнейшее использование в математической модели оптимизации, представляется наиболее выгодным.

3. Вычислительный алгоритм математической модели, связывающей 3D и 2D модели проточного тракта вихревого расходомера

Вычислительный алгоритм математической модели, связывающей 3D и 2D модели проточного тракта вихревого расходомера, основан на методах цифровой обработки сигнала. В соответствии с целями настоящей работы для анализа частотных, амплитудных и фазовых характеристик пульсаций давления, регистрируемых сенсором расходомера, использованы методы Фурье анализа, прежде всего быстрое преобразование Фурье (БПФ).

Существо вычислительного алгоритма заключается в следующем.

Пусть даны значения временного ряда $P(t)$, имеющего периодические составляющие, в равноотстоящих узлах $t_1 \dots t_n$. Данный ряд описывает изменение статического давления в точке мониторинга, ряд рассматривается, начиная с некоторого момента времени расчета, после завершения переходного процесса от начальных условий расчета и установления периодических колебаний в точках мониторинга.

Далее выполняется аппроксимация временного ряда $P(t)$ непрерывной функцией $p(t)$ вида

$$p(t) = A_0 + \sum_{i=1}^k A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), \quad (3)$$

где A_0 – постоянная составляющая сигнала; A_i, f_i, φ_i – амплитуда, частота и фаза i -й гармоники; k – число гармонических составляющих.

Аппроксимация проводится в 2 этапа.

Первый этап. С помощью быстрого преобразования Фурье определяется наличие гармонических составляющих в исходном сигнале (рис. 7).

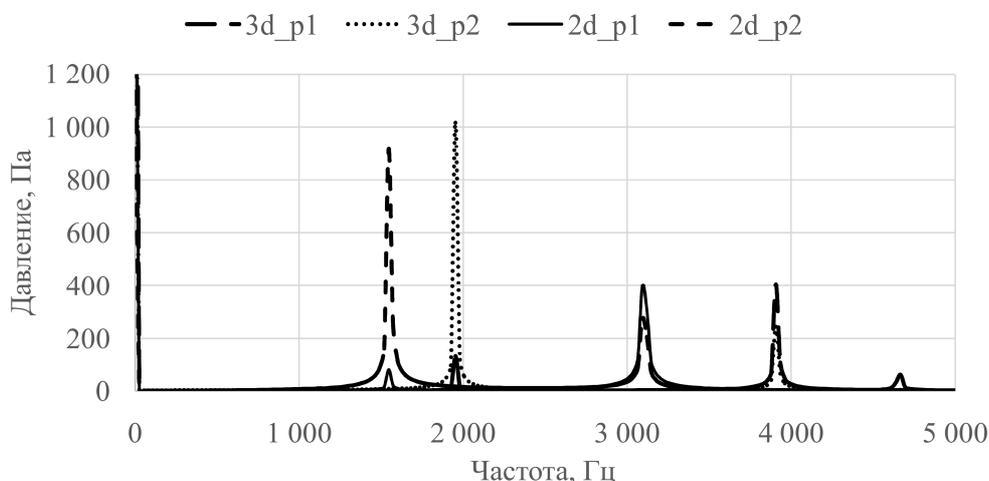


Рис. 7. Спектры пульсации давления, воздух $Re = 199\ 595$

Ограничивается число гармоник k , отбрасываются гармонические составляющие, амплитуда которых не превышает заданного порога от максимальной амплитуды имеющихся гармоник. Принимается значение данного порога равным 10 %. Данное значение может быть изменено в зависимости от точности описания исходного сигнала. После этого по оставшимся гармоникам сигнал при восстановлении отличается от исходного, так как рассматривается неполный диапазон (рис. 8). Поэтому необходимо выполнять дополнительные вычисления.

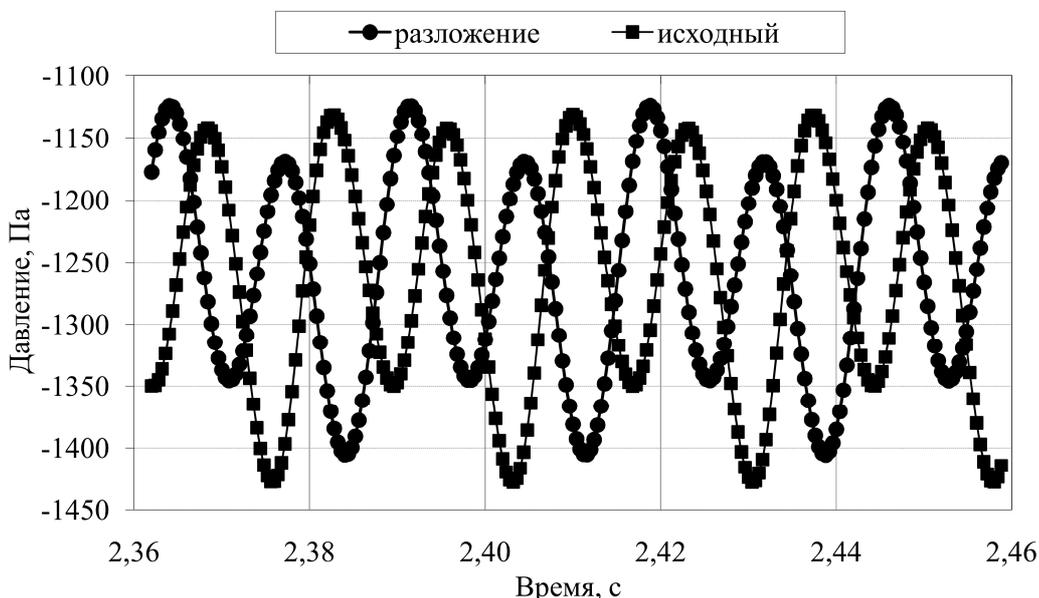


Рис. 8. Результат восстановления сигнала по двум гармоникам после БПФ

Второй этап. Коэффициенты A_i, f_i, φ_i принимаются за параметры регрессии и вычисляются методом наименьших квадратов (4). Будем считать, что $p(t)$ построена при условии наилучшего квадратичного приближения, для чего найдем минимум функции:

$$\sum_{j=1}^n (P(t_j) - p(t_j, A_i, f_i, \varphi_i))^2 \rightarrow \min_{A_i, f_i, \varphi_i} . \quad (4)$$

Задача минимизации решается методом Ньютона, с использованием значений A_i, f_i, φ_i , полученных методом БПФ на первом этапе работы математической модели в качестве начального приближения.

В результате работы математической модели определяем значения амплитуды, частоты и фазы зависимости (сигнала) давления от времени $(A_i, f_i, \varphi_i)_{2D}$, полученные в результате 2D моделирования (рис. 9).

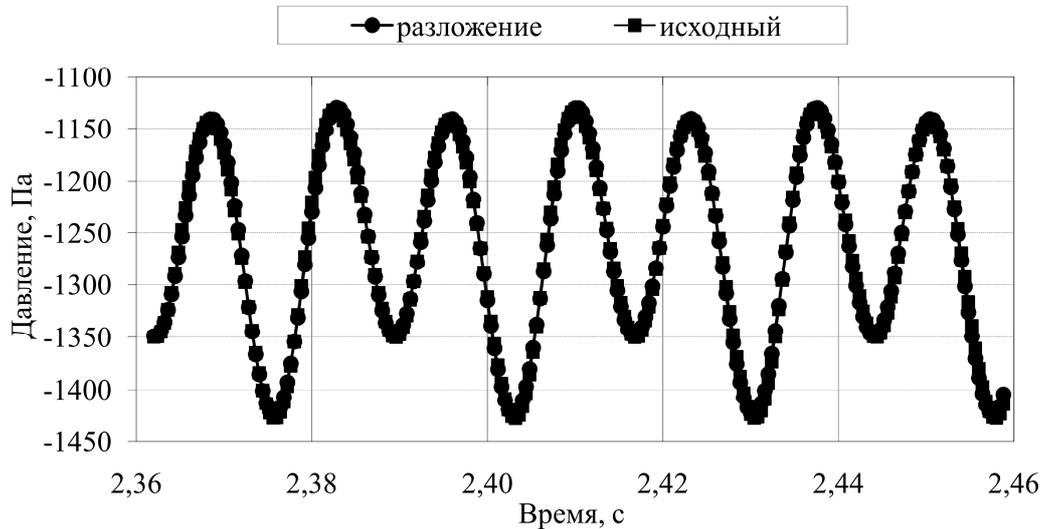


Рис. 9. Результат обработки сигнала после минимизации по методу Ньютона

Третий этап. Переход от величин $(A_i, f_i, \varphi_i)_{2D}$, полученных в результате 2D моделирования, к величинам $(A_i, f_i, \varphi_i)_{3D}$, соответствующим «эквивалентному» сигналу, моделирующему сигнал, получающийся в результате 3D моделирования.

Четвертый этап. Вычисление расхода по значениям частоты либо полное восстановление эквивалентного сигнала по формуле (3).

Пятый этап. Вывод результатов, полученных по математической модели, передача их в математическую модель оптимизации проточной части вихревого расходомера.

Выводы

По результатам исследований разработан вычислительный алгоритм математической модели (рис. 10), связывающей 3D и 2D модели проточного тракта вихревого расходомера. Алгоритм основан на использовании быстрого преобразования и решении задачи минимизации для определения частоты, амплитуды и фазы сигнала.

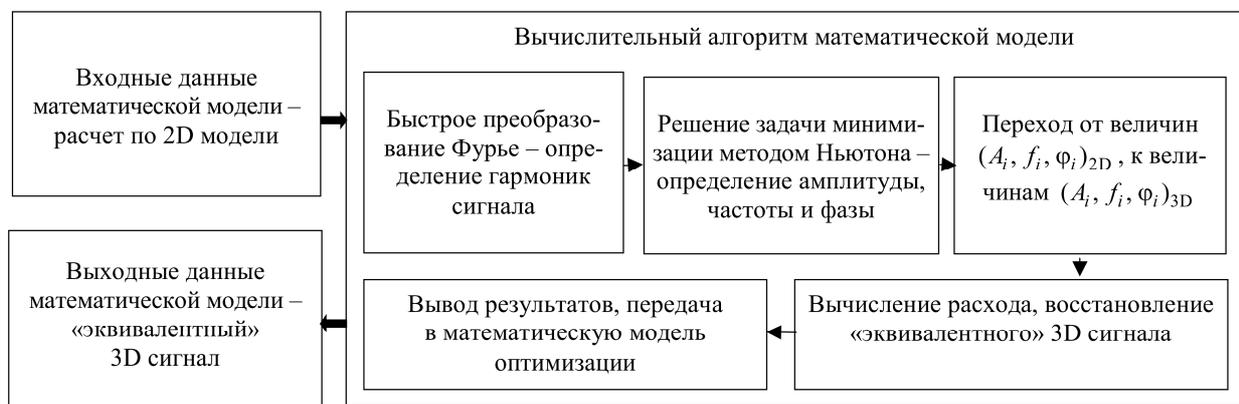


Рис. 10. Схема вычислительного алгоритма математической модели

Заключение

Благодаря использованию данного алгоритма в значительной степени сокращается время проведения расчетов, так как используется упрощенная модель с меньшим количеством конечных элементов. Наибольшую актуальность применение алгоритма приобретает в решении задач оптимизации.

В дальнейшем необходимо провести исследования по установлению функциональных зависимостей.

Литература

1. Карташев, А.Л. Исследование пространственных гидрогазодинамических эффектов в проточной части вихревого расходомера / А.Л. Карташев, А.А. Кривоногов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2015. – Т. 15, № 4 – С. 5–13. DOI: 10.14529/engin150401
2. Снегирёв, А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учеб. пособие / А.Ю. Снегирёв. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 143 с.
3. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
4. Самарский, А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. Kartashev, A.L. Mathematical modeling of vortex generation process in the flowing part of the vortex flowmeter and selection of an optimal turbulence model / A.A. Krivonogov // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 117–128. DOI: 10.14529/mtr160411
6. Альбом течений жидкости газа / сост. М. Ван-Дайк. – М.: Мир. – 1986. – 184 с.
7. Von Karman, T. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt / T. von Karman // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1911. – P. 509–517.
8. Зарубин, В.С. Математическое моделирование в технике / В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
9. Прохоров, С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов / С.А. Прохоров. – Уральск: ТОО «Экспо», 2001. – 208 с.
10. Васильев, К.К. Методы обработки сигналов: учеб. пособие / К.К. Васильев. – Ульяновск: УлГТУ, 2001. – 78 с.
11. Глинченко, А. С. Цифровая обработка сигналов: в 2 ч. / А.С. Глинченко. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. – 383 с.
12. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – Изд. 2-е, испр. – М.: Техносфера, 2007. – 856 с.
13. Якимов, Е.В. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие / Е.В. Якимов, Г.В. Вавилова, И.А. Клубович. – Томск: Изд-во Томского политехнического университет, 2008. – 307 с.
14. Гетманов В.Г. Цифровая обработка сигналов / В.Г. Гетманов – М.: Типография НИЯУ МИФИ, 2010. – 232 с.

Карташев Александр Леонидович, д-р техн. наук, профессор кафедры летательных аппаратов, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; al_kartashev@mail.ru.

Кривоногов Алексей Александрович, аспирант кафедры летательных аппаратов, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; alexeykrivonogov@mail.ru.

Поступила в редакцию 30 января 2017 г.

MATHEMATICAL MODEL OF TRANSFORMATION A 2D SIMULATION FLOWING PART OF VORTEX FLOWMETER TO 3D CASE

A.L. Kartashev, al_kartashev@mail.ru,

A.A. Krivonogov, alexeykrivonogov@mail.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The article is devoted to the mathematical model development which transforming the two-dimensional flow variable such as frequency, phase, amplitude in the three-dimensional values.

The paper presents the analysis results an existing 3D model, which implemented in ANSYS software package. It is used to flow simulate in the flow part of vortex flowmeter.

The control points of flow part geometry the vortex flowmeter was define as an analysis results of stream simulation result in the flow part of vortex flowmeter. Mathematical modeling was carried out in these control points and collected the simulation results.

The functional structure of a mathematical model for determining the flow parameters in the flow part of the vortex flowmeter was created for the variant of two-dimensional simulation.

The mathematical method of transformation the two-dimensional simulation results to a three-dimensional model was selected for flow simulation in the flow part of vortex flowmeter.

A computational algorithm is a mathematical model relating the three-dimensional and two-dimensional model of a vortex flow meter flow part was created. The algorithm is based on the fast Fourier transform and the minimization problem solution to determine the frequency, amplitude and phase of the signal.

Research relevance related to the choice of optimal mathematical algorithm simulation vortex shedding process from bluff body in a tube (the flow part of the vortex flowmeter), and vortices downstream distribution.

Keywords: flow part, vortex flowmeter, 3D model, 2D model, the ANSYS software package, test calculations, mathematical method of transformation 2D model to 3D, Strouhal number, Reynolds number.

References

1. Kartashev A.L., Krivonogov A.A. [Research of Spatial Hydrodynamic Effects in the Meterbody of the Vortex Flowmeter]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 5–13. (in Russ.) DOI: 10.14529/engin150401
2. Snegiryov A.Yu. *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy* [High-Performance Computing in Technical Physics. Numerical Simulation of Turbulent Flows]. St. Petersburg, Polytechnic Univ. Publ., 2009. 143 p.
3. Bazara M., Shetti K. *Nelineynoe programmirovaniye. Teoriya i algoritmy* [Nonlinear Programming. Theory and Algorithms]. Moscow, Mir Publ., 1982. 583 p.
4. Samarskiy A. A., Mikhaylov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery* [Principles of Mathematical Modeling. Ideas, Methods, Examples]. Moscow. Fizmatlit Publ., 2001. 320 p.
5. Kartashev A.L., Krivonogov A. A. Mathematical Modeling of Vortex Generation Process in the Flowing Part of the Vortex Flowmeter and Selection of an Optimal Turbulence Model. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 117–128. (in Russ.) DOI: 10.14529/mmp160411
6. Van Dyke M. *Al'bom techeniy zhidkosti gaza* [An Album on Fluid Motion]. Moscow, Mir Publ., 1986. 840 p.
7. Von Karman T. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911, pp. 509–517.
8. Zarubin V.S. *Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike* [Mathematical Simulation in the Technique]. Moscow, MSTU. NE Bauman Publ., 2003. 524 p.

9. Prokhorov S.A. *Matematicheskoe opisanie i modelirovanie sluchaynykh protsessov* [Mathematical Description and Modeling of Random Processes]. Uralsk, "Expo" Ltd. Publ., 2001. 208 p.
10. Vasil'ev K.K. *Metody obrabotki signalov: uchebnoe posobie* [Methods of Signal Processing: Tutorial]. Ulyanovsk, Ul. State Univ. Publ., 2001. 78 p.
11. Glinchenko A.S. *Tsifrovaya obrabotka signalov: v 2 ch.* [Digital Signal Processing. In 2 parts]. Krasnoyarsk: KSTU Publ., 2001. 383 p.
12. Oppenheim A., Shafer A. R. *Tsifrovaya obrabotka signalov.* [Digital Signal Processing]. Moscow, Technosphere Publ., 2007. 856 p.
13. Yakimov E.V., Vavilova G.V., Klubovich I. A. *Tsifrovaya obrabotka signalov: uchebnoe posobie* [Digital Signal Processing: Tutorial]. Tomsk. Tomsk Polytechnic University Publ., 2008. 307 p.
14. Getmanov V.G. *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. Moscow, NRNU MEPhI Printing House, 2010. 232 p.

Received 30 January 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Карташев, А.Л. Математическая модель трансформации двумерного течения в проточном тракте вихревого расходомера в трехмерное течение / А.Л. Карташев, А.А. Кривоногов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 93–102. DOI: 10.14529/ctcr170208

FOR CITATION

Kartashev A.L., Krivonogov A.A. Mathematical Model of Transformation a 2D Simulation Flowing Part of Vortex Flowmeter to 3D Case. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 93–102. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr170208