УДК 519
ББК 32.81
DOI: 10.14529/ctcr170212

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНОВ ЗАСТРОЙКИ РАЙОНА

П.Н. Курочка, А.И. Половинкина, М.А. Пинаева
Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж

Показано, что задача максимизации жилой площади при ограничениях на стоимость строительства и площадь земельного участка сводится к задаче целочисленного программирования с двумя ограничениями. Для ее решения можно применить стандартные известные методы и алгоритмы. Рассмотрим, однако, другой подход, в основе которого лежит метод сетей допустимых решений, предложенный В.Н. Бурковым. Идея метода состоит в следующем. Рассмотрим первое из ограничений задачи и построим сеть всех допустимых решений для этого ограничения. На основании введенного понятия проблемной вершины доказывается теорема о том, что предлагаемый способ построения сети всех допустимых решений будет содержать все решения, удовлетворяющие ограничениям исходной задачи, а длина максимального пути в такой сети будет определять оценку сверху для исходной задачи. Показано, что если путь максимальной длины не содержит проблемных вершин, то соответствующее решение является оптимальным. Алгоритм обобщен на случай учета рисков строительства.

Ключевые слова: метод дихотомического программирования, сеть всех допустимых решений, задача транспортного типа, вогнутая функция стоимости строительства.

Рассматриваются задачи оптимальной застройки района по критерию прибыли. Пусть имеется n участков возможного строительства и m типов проектов. Задача состоит в выборе числа домов каждого типа, обеспечивающих максимальную прибыль от продажи квартир. Для решения задач предлагается метод дихотомического программирования.

Имеются m типов домов. Стоимость строительства домов i-го типа $C_i(x_i)$ зависит от числа x_i домов i-го типа, включенных в план застройки, и является вогнутой функцией $0 \le x_i \le b_i$. Имеются n участков для строительства домов. Строительство дома i-го типа на участке j требует дополнительных затрат Δ_{ij}. Известно количество S_i жилой площади домов i-го типа и рыночная цена p_i 1 м^2 жилой площади домов i-го типа. Обозначим $y_{ij} = 1$, если на j-м участке строится дом i-го типа, и $y_{ij} = 0$ в противном случае, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Прибыль от продажи квартир $x_i = \sum_j y_{ij}$ домов i-го типа равна

$$Q_i = p_i s_i x_i - \sum_j \Delta_{ij} y_{ij} - C_i(x_i).$$

Тогда возникает задача следующего типа: определить $\{y_{ij}\}$ $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ максимизирующие

$$Q = \sum_{i,j}\left(p_i s_i - \Delta_{ij}\right) y_{ij} - \sum_i c_i \sum_j y_{ij},$$

при ограничениях

$$\sum_i y_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_i y_{ij} \le b_i, \quad i=\overline{1,m}.$$

В линейном случае $C_i(x_i) = q_i x_i$ и задача принимает вид

$$Q = \sum_{i,j} t_{ij} \cdot y_{ij} \; ,$$

где

$$t_{ij} = p_i s_i - \Delta_{ij} - q_i \; ,$$

что является частным случаем транспортной задачи [1, 2].

Если приять во внимание ограничение на площадь земельного участка, то это приводит к появлению дополнительного ограничения в задаче. Обозначим: t_i – площадь, требуемая для строительства дома i-го типа; N – общая площадь земельного участка, отведенного под строительство жилых домов. Ограничимся случаем линейной зависимости стоимости строительства от числа домов каждого типа. Задача заключается в максимизации площади жилых помещений

$$S(x)=\sum_i x_i s_i \,, \tag{1}$$

при ограничениях

$$C(x)=\sum_i c_i \cdot x_i \le R \,, \tag{2}$$

$$T(x)=\sum_i t_i \cdot x_i \le N \,. \tag{3}$$

Получили задачу целочисленного линейного программирования с двумя ограничениями. Для ее решения можно применить стандартные программы [3–6].

Рассмотрим, однако, другой подход, в основе которого лежит метод сетей всех допустимых решений (ВДР), предложенный В.Н. Бурковым. Идея метода состоит в следующем. Рассмотрим первое ограничение (2) и построим сеть всех допустимых решений для этого ограничения. Способ построения такой сети описан, например, в [1, 7, 8]. Примем для упрощения вычислений, что дома строятся пакетами. Положим $x_i = 1$, если строится пакет домов i-го типа (пакет содержит определенное число домов), и $x_i = 0$ в противном случае. Алгоритм рассмотрим на примере.

Пример 1.

1 шаг. Пусть ограничение (2) имеет вид

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \le 5 \,.$$

Соответствующая сеть всех допустимых вариантов приведена на рис. 1.

2 шаг. Рассмотрим ограничение (3)

$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \le 8 \,.$$

Соответствующая сеть приведена на рис. 2

Определение. Проблемной вершиной сети всех допустимых решений (сеть ВДР) назовем вершину, не принадлежащую последнему слою (в нашем случае слою 5), имеющую сеть захода больше 1. Заметим, что сеть ВДР рис. 1. имеет шесть проблемных вершин, а сеть ВДР рис. 2. имеет одну проблемную вершину (3; 2).

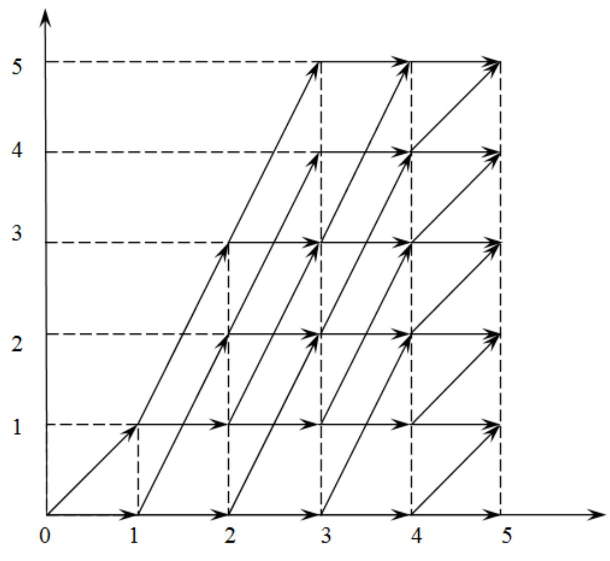

Рис. 1

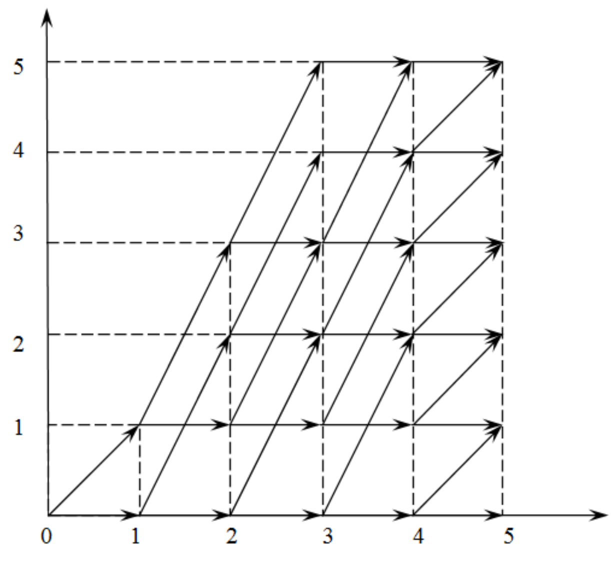

Рис. 2

Вершины сети будем обозначать номером переменной (в нашем случае 3) и величиной требуемой площади земельного участка (в нашем случае 2).

3 шаг. Выбираем сеть с минимальным числом проблемных вершин. Назовем эту сеть основной. Длины дуг сети берем равными соответствующим коэффициентам другой сети, в нашем случае первой (длины дуг приведены у дуг на рис. 2 в скобках).

Определяем кратчайшие пути в каждую вершину основной сети. Если длина кратчайшего пути в вершину больше правой части первого ограничения, то есть 5, то соответствующую дугу исключаем. Исключенные дуги перечеркнуты на рис. 2.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Сеть ВДР содержит все допустимые решения системы неравенств* (*2*)*,* (*3*).

Доказательство. Если длина кратчайшего пути в какую-либо вершину сети превышает правую часть первого ограничения, то не существует ни одного допустимого решения задачи, которому соответствуют пути, заканчивающиеся в данной вершине. Поэтому соответствующую заходящую дугу можно исключить. В нашем примере для дуги [(3; 4), (4; 7)] имеет место

$$\lambda(3;4) + c_4 = 6 > 5,$$

$\lambda(3;4)$ – потенциал вершины (3; 4).

Поэтому эту дугу, а значит и следующую за ней дугу [(4; 7), (5; 7)] исключаем. Полученная сеть приведена на рис. 3.

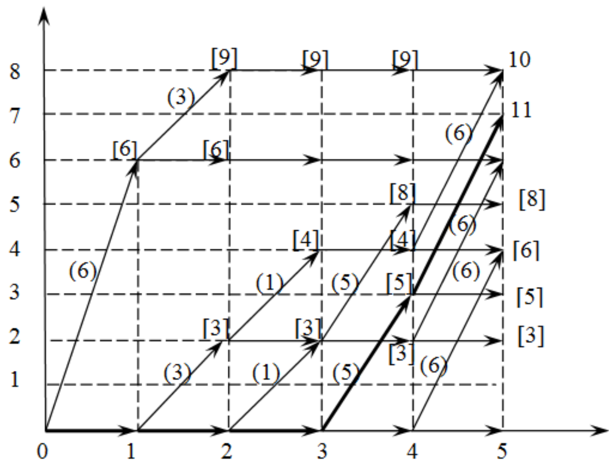

Рис. 3

4 шаг. Полагаем длины дуг сети рис. 3. равными соответствующим коэффициентам целевой функции. Пусть целевая функция имеет вид

$$6x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5.$$

Определим путь максимальной длины.

Теорема 2. *Длина максимального пути в сети ВДР определяет оценку сверху для исходной задачи* (*1*)–(*3*).

Доказательство. Следует из теоремы 1, поскольку сеть ВДР содержит все допустимые решения.

В примере длина максимального пути равна 11 (путь выделен на рис. 3).

Следствие. Если среди путей максимальной длины существует путь, для которого соответствующее решение задачи удовлетворяет первому ограничению, то это решение является оптимальным. Доказательство очевидно.

В нашем случае это именно так. Пути максимальной длины соответствует решение $x = (0, 0, 0, 1, 1)$, которое удовлетворяет неравенству (2). Поэтому это решение является оптимальным.

Теорема 3. *Если путь максимальной длины не содержит проблемных вершин, то соответствующее решение является оптимальным.*

Доказательство. Если путь не содержит проблемных вершин, то, очевидно, соответствующее решение удовлетворяет неравенству (2). Если решение, соответствующее пути максимальной длины, не удовлетворяет ограничению (2), то применяем метод ветвей и границ, причем ветвление проводим по переменной, соответствующей одной из проблемных вершин.

Приведем пример.

Пример 2. Пусть ограничение (3) имеет вид

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \le 10, \tag{4}$$

а целевая функция

$$S(x) = x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5, \tag{5}$$

Построим сеть ВДР для ограничения (4) рис. 4.

Число проблемных вершин равно 5, что меньше чем для сети рис. 1. Поэтому в качестве основной берем сеть рис. 4. Подставляя длины дуг из ограничения (2), получаем, что ни одна дуга не исключается. Берем длины дуг равными коэффициентам целевой функции (5) и определяем путь максимальной длины (длины дуг указаны над уровнем ограничения 10). Путь максимальной длины $\mu = \left[(0;0);\ (1;0); (2;3); (3;5);\ (4;8); (5;10) \right]$. Его длина равна 15. Соответствующее решение $x = (0, 1, 1, 1, 0)$. Однако это решение не удовлетворяет неравенству (2). Поэтому 15 – это оценка сверху. Применяем метод ветвей и границ. Для ветвления берем проблемную вершину (4; 8), то есть переменную x. Делим множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве $x_4 = 1$, а во втором $x_4 = 0$.

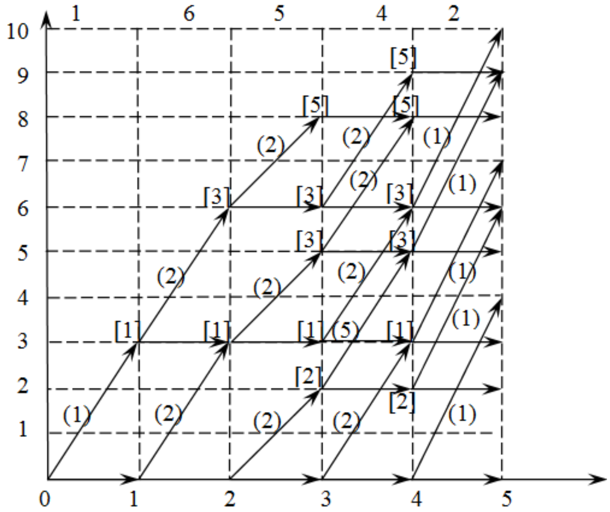

Рис. 4

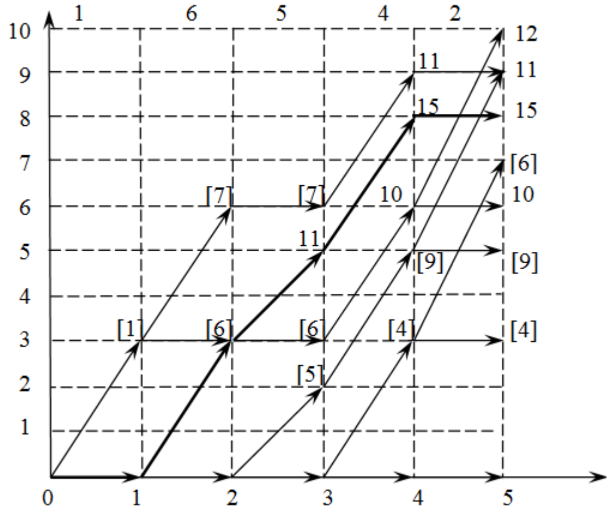

Рис. 5

Оценка первого подмножества.

Исключаем дуги, соответствующие $x_4 = 0$, получаем сеть рис. 5.

Оптимальное решение определяется путем максимальной длины. Этот прежний путь длины 15.

Оценка второго подмножества.

Если $x_4 = 0$, то путь максимальной длины $[(0;0);(2;3);(3;5);(4;5);(5;9)]$ с длиной 13. Выбираем первое подмножество ($x_4 = 1$). Теперь для ветвления берем проблемную вершину (2; 3), то есть переменную x_2.

Оценка первого подмножества ($x_2 = 1$).

Если $x_2 = 1$, то путь кратчайшей длины в вершину (4; 8) будет равен $6 > 5$. Поэтому дугу $[(2;3);(3;5)]$ исключаем. Путь максимальной длины $[(0;0);(1;0);(2;3);(3;3);(4;6);(5;0)]$ с длиной 12.

Оценка второго подмножества ($x_2 = 0$).

Путь максимальной длины $[(0;0);(1;0);(2;0);(3;2);(4;5);(5;9)]$ с длиной 11. Теперь выбираем подмножество ($x_4 = 0$) с максимальной оценкой 13. Соответствующее решение $x = (0, 1, 1, 0, 1)$ удовлетворяет ограничению (2) и поэтому является оптимальным. Дерево ветвлений приведено на рис. 6.

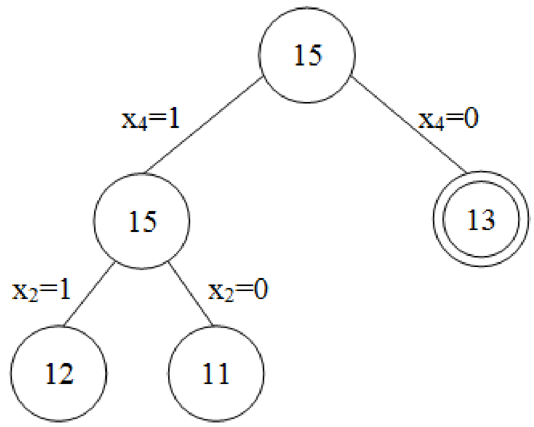

Рис. 6

В данном случае число ветвлений равно 2. В общем случае число ветвлений не превышает числа 2^q, где q – число проблемных вершин.

Получим нижнюю оценку для задачи (1)–(3). Для этого на сети рис. 4 ищем пути не минимальной, а максимальной длины в каждую вершину (рис. 7).

Если длина максимального пути превышает 5, то соответствующая дуга удаляется. В нашем примере это дуга $[(3;5);(4;8)]$.

Эта сеть содержит только допустимые пути, то есть пути, которым соответствуют решения, удовлетворяющие обоим неравенствам. Определяем в этой сети пути максимальной длины, беря в качестве длин дуг коэффициенты целевой функции (5) рис. 8. Определяя пути максимальной длины в этой сети, получаем решение $x = (0, 1, 1, 0, 1)$, которое является оптимальным. Однако это не всегда так, поскольку сеть может содержать не все допустимые пути.

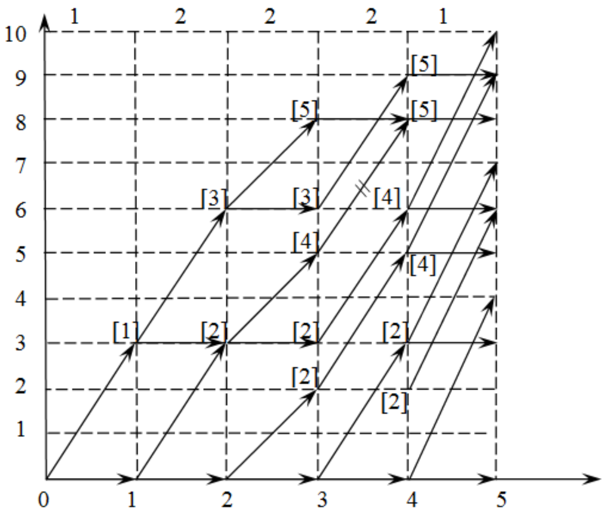

Рис. 7

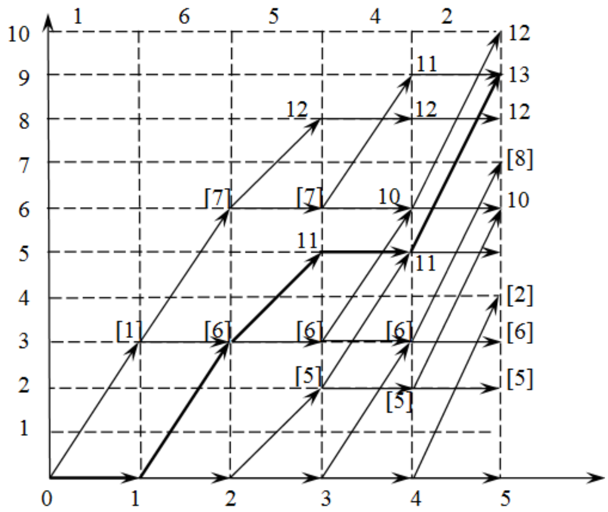

Рис. 8

Рассмотренный алгоритм естественно обобщается на случай, когда x_i принимает значения не только 0 или 1, а любые целочисленные значения на отрезке $\left[0; b_i\right], i = \overline{1, n}$. В этом случае просто несколько усложняется построение сетей всех допустимых решений.

Можно не строить сеть ВДР, а использовать табличный способ вычислений.

Обозначим $y_1 = \left(0; a_{11}; a_{12}; ...; a_{1m_1}\right)$, где $a_{1j} = \left(t_{1j}; c_{1j}; s_{1j}\right)$ варианты первой обобщенной переменной (предположим, что ограничение (3) является основным), $y_2 = \left(0; a_{21}; a_{22}; ...; a_{2m_2}\right)$, где $a_{2j} = \left(t_{2j}; c_{2j}; s_{2j}\right)$ варианты второй обобщенной переменной.

1 шаг. Вычисляем

$$y_{12} = \left(0; a_{1j} + a_{2k}\right),\ j = \overline{1, m_1},\ k = \overline{1, m_2},$$

где

$$a_{1j} + a_{2k} = \left(t_{1j} + t_{2k}; c_{1j} + c_{2k}; s_{1j} + s_{2k}\right).$$

2 шаг. Если существуют (j, k) и (p, r), такие что

$$t_{1j} + t_{2k} = t_{1p} + t_{2r},$$

то определяем

$$c_{1j} + c_{2k} = c_{1p} + c_{2r} = C\left[(j, k), (p, r)\right] = \min\left[c_{1j} + c_{2k}; c_{1p} + c_{2r}\right],$$

$$s_{1j} + s_{2k} = s_{1p} + s_{2r} = S\left[(j, k), (p, r)\right] = \max\left[s_{1j} + s_{2k}; s_{1p} + s_{2r}\right].$$

Соответствующий вариант назовем проблемным.

3 шаг. Все варианты, для которых $T = t_{1j} + t_{2k} > N$, исключаем из рассмотрения. Исключаем из рассмотрения также варианты, для которых $C = c_{1j} + c_{2k} > R$. В результате получаем таблицу вариантов обобщенной переменной $y = \left(y_1; y_2\right)$.

Если число переменных равно n, то потребуется $(n-1)$ основных шагов, чтобы получить все допустимые варианты строительства.

Заметим, что по сути дела мы получаем дерево, содержащее все допустимые (и возможно недопустимые) решения задачи (1)–(3). Поэтому по аналогии с теоремами 1–3 имеет место теорема 4.

Теорема 4. *Вариант j $(n-1)$ основного шага с максимальным третьим числом S_j определяет оценку сверху для исходной задачи, причем, если соответствующее решение удовлетворяет ограничению (2), то оно является оптимальным.*

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теорем 1–3.

На практике учет рисков, как правило, производится на основе качественных шкал. В частности, в Сбербанке России применяется трехбалльная шкала: 1 – низкий риск, 2 – средний риск, 3 – высокий риск. Примем, что каждый тип домов имеет определенную оценку риска r_i, $i=\overline{1,n}$. Для учета рисков введем ограничения на суммарный риск варианта застройки

$$R(x)=\sum_i r_i x_i \le Q\,. \tag{6}$$

Для решения задачи (1)–(3), (6) применим метод дерева допустимых решений, удовлетворяющих неравенствам (2) и (3), и повторим основные шаги алгоритма его построения, заменив параметры c_i (вторые числа каждого варианта) на параметры r_i.

Таким образом, для задачи максимизации жилой площади при ограничениях на стоимость строительства и площадь земельного участка разработан алгоритм сетей допустимых решений для получения верхних оценок. Алгоритм обобщен на случай учета рисков строительства.

Литература

1. Баркалов, С.А. Модели и механизмы управления недвижимостью / С.А. Баркалов, И.В. Буркова, П.Н. Курочка. – М.: Уланов-пресс, 2007. – 309 с.

2. Курочка, П.Н. Модель выбора альтернативных вариантов управления недвижимостью в условиях риска / П.Н. Курочка, М.А. Ефремов, А.М. Дудин // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2007. – № 2. – С. 15–21.

3. Курочка, П.Н. Модель управления объемами незавершенного производства при произвольной связи между проектами / П.Н. Курочка, Г.Г. Сеферов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 178–182.

4. Курочка, П.Н. Алгоритм решения задачи оптимизации программы при условии ее надежности / П.Н. Курочка, В.Л. Порядина // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Управление строительством. – 2013. – № 1 (4). – С. 22–30.

5. Курочка, П.Н. Выбор вариантов выполнения работ по содержанию объектов надежности / П.Н. Курочка, Г.Г. Сеферов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 203–208.

6. Половинкина, А.И. Определение оптимального варианта производства работ при выпуклой функции затрат / П.Н. Курочка, А.И. Половинкина, А.М. Потапенко // Системы управления и информационные технологии. – 2004. – Т. 17, № 5. – С. 23–26.

7. Модели и методы управления проектами при организационно-технологическом проектировании строительства / С.А. Баркалов, П.Н. Курочка, Л.Р. Маилян, И.С. Суровцев. – Воронеж, 2013. – 440 с.

8. Бурков, В.Н. Задачи дихотомической оптимизации / В.Н. Бурков, И.В. Буркова. – М.: Радио и связь, 2003. – 156 с.

Курочка Павел Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры управления строительством, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж; kpn55@rambler.ru.

Половинкина Алла Ивановна, д-р техн. наук, профессор кафедры управления строительством, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж; polovinkina_alla@mail.ru.

Пинаева Марина Александровна, аспирант кафедры управления строительством, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж.

Поступила в редакцию 15 марта 2017 г.

DOI: 10.14529/ctcr170212

OPTIMIZATION METHODS FOR LOCAL BUILDING PLANS OF THE AREA

P.N. Kurochka, *kpn55@rambler.ru*,
A.I. Polovinkina, *polovinkina_alla@mail.ru*,
M.A. Pinaeva
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

It is shown that the problem of maximizing living space with restrictions on the cost of construction and the land plot area is reduced to the problem of integer programming with two restrictions. To solve it, you can apply standard known methods and algorithms. Consider, however, another approach based on the method of networks of admissible solutions, proposed by Burkov V.N. The idea of the method is following. We consider the first the constraints of the problem and construct a network of all admissible solutions for this restriction. On the basis of the introduced notion of a problem vertex, a theorem is proved that the proposed method for constructing a network of all admissible solutions will contain all solutions satisfying the constraints of the original problem, and the length of the maximal path in such a network will determine the upper bound for the original problem. It is shown that if the path of maximum length does not contain problem vertices, then the corresponding solution is optimal. The algorithm is generalized to the case of accounting for construction risks.

Keywords: method of dichotomous programming, network of all feasible solutions, the problem of transport type, concave function construction costs.

References

1. Barkalov S.A., Burkova I.V., Kurochka P.N. *Modeli i mehanizmy upravleniya nedvizhimost'yu* [Models and Mechanisms of Real Estate Management]. Moscow, Lancers Press, 2007. 309 p.
2. Kurochka P.N., Efremov M.A., Dudin A.M. [Model of Choice of Alternative Options for Real Estate Management in Risk Conditions]. *Bulletin of Voronezh Institute of High Technologies*, 2007, no. 2, pp. 15–21. (in Russ.)
3. Kurochka P.N., Seferov G.G. [Model Control Volumes of Uncompleted Production in Arbitrary Communication between Projects]. *Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 178–182. (in Russ.)
4. Kurochka P.N., Poryadina V.L. [The Algorithm for Solving the Optimization Program, Subject to Its Reliability]. *Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Construction. Series: Construction Management*, 2013, no. 1 (4), pp. 22–30. (in Russ.)
5. Kurochka P.N., Seferov G.G. [The Choice of Performance of Works on Maintenance of Reliability]. *Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 203–208. (in Russ.)
6. Kurochka P.N., Polovinkina A.I., Potapenko A.M. [Determination of the Optimal Variant of Work Production at Convex Cost Function]. Control Systems and Information Technology, 2004, vol. 17, no. 5, pp. 23–26. (in Russ.)
7. Barkalov S.A., Kurochka P.N., Mailyan L.R., Surovtsev I.S. *Modeli i metody upravleniya proektami pri organizaisionno-tekhnologicheskom proektirovanii stroitel'stva* [Models and Methods of Project Management in Organizational and Technological Design of Construction]. Voronezh, 2013. 440 p.
8. Burkov V.N., Burkova I.V. *Zadachi dikhotomicheskoy optimizatsii* [Tasks of Dichotomic Optimization]. Moscow, Radio i Svyaz Publ., 2003. 156 p.

Received 15 March 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Курочка, П.Н. Методы оптимизации планов застройки района / П.Н. Курочка, А.И. Половинкина, М.А. Пинаева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 134–140. DOI: 10.14529/ctcr170212

FOR CITATION

Kurochka P.N., Polovinkina A.I., Pinaeva M.A. Optimization Methods for Local Building Plans of the Area. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 134–140. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr170212