УДК 621.372.542

ОБ ОЦЕНКЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ИНФОРМАЦИИ, ПРЕОБРАЗОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕТОДОМ

Т.С. Камалтдинова

ESTIMATION OF INFORMATION ACCURACY TRANSFORMED BY NONLINEAR METHOD

T.S. Kamaltdinova

Методом проекционной регуляризации решена обратная задача для уравнения теплопроводности и получены оценки точности этого решения.

Ключевые слова: операторные уравнения, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

Inverse problem for thermal conductivity equation is solved by projection regularization method; and accuracy estimation of the solution is received.

Keywords: operator equations, regularization, optimal method, accuracy estimation, ill-posed problem.

Введение

В работе решается задача преобразования информации. При этом известной является информация о распределении температуры в момент времени $T > 0$, а требуется определить распределение температуры в начальный момент времени и оценить погрешность этого распределения. Для решения этой задачи использован нелинейный метод проекционной регуляризации, приведенный в [1], и показано, что при решении этим методом оценка погрешности получается гораздо лучше, чем при решении аналогичной задачи оптимальным линейным методом, приведенным в [2].

Постановка задачи

Пусть H – гильбертово пространство, A – инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий H в H и множество значений $R(A)$ оператора A всюду плотно в H.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f; \quad u \in H, f \in H. \tag{1}$$

Предположим, что при $f = f_0$ существует решение $u_0 \in H$ уравнения (1), но точное значение правой части из-за ошибки измерения обычно не известно, а вместо него даны $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \le \delta .$$

Требуется, зная f_δ и δ, определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и в предположении, что u_0 принадлежит классу корректности $M_r = B\overline{S}_r$, найти уклонение приближенного решения от точного $\|u_\delta - u_0\|$, где B – линейный ограниченный оператор, отображающий H в H, удовлетворяет тем же условиям, что и A, $\overline{S}_r = \{v;\, v \in H, \|v\| \le r\}$.

Определение 1. Множество M_r будем называть классом корректности для уравнения (1), если сужение $A_{N_r}^{-1}$ оператора A^{-1} на множество $N_r = AM_r$ равномерно непрерывно.

Лемма 1. Для того, чтобы M_r было классом корректности для уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы сужение $A_{N_r}^{-1}$ оператора A^{-1} было непрерывно в нуле [2].

Определение 2. Семейство операторов $\{T_\delta :\ 0 < \delta < \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M_r, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает H в H и $T_\delta f_\delta \to u_0$ равномерно на множестве M_r при $\delta \to 0$ и $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$.

Камалтдинова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет; KamaltdinovaTS @mail.ru

Tatiana Sergeevna Kamaltdinova – senior lecturer of Computational Mathematics Department of South Ural State University; KamaltdinovaTS@mail.ru

Из условий, наложенных на операторы A и B на основании леммы, доказанной в [3], имеют место полярные разложения этих операторов $A = Q\bar{A}$ и $B = \bar{B}P$, где Q и P – унитарные операторы, $\bar{A} = \sqrt{A^*A}$, $\bar{B} = \sqrt{BB^*}$. Кроме того, предположим, что спектр $Sp(\bar{A})$ оператора $\bar{A}$ совпадает с отрезком $[0, \|A\|]$, а

$$\bar{B} = G(\bar{A}), \tag{2}$$

где $G(\bar{A})$ строго возрастает и является непрерывной на отрезке $[0, \|A\|]$ функцией такой, что $G(0) = 0$.

Из полярного представления оператора A следует, что уравнение (1) можно заменить эквивалентным:

$$\bar{A}u = g, \tag{3}$$

где $g = Q^* f$, а Q^* – оператор, сопряженный Q.

Лемма 2. Пусть $M_r = B\bar{S}_r$, а $\bar{B} = \sqrt{BB^*}$ [2], тогда

$$M_r = \bar{B}\bar{S}_r.$$

Как указывалось выше, при $g_0 = Q^* f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (3), но точное значение g_0 нам не известно, а дано g_δ и δ такие, что

$$\|g_\delta - g_0\| \le \delta.$$

Требуется по g_δ и δ определить u_δ и оценить $\|u_\delta - u_0\|$ при условии, что $u_0 \in M_r$.

Для решения данной задачи применяется нелинейный метод проекционной регуляризации, подробно описанный в следующем пункте, который позволяет при условии, что $u_0 \in M_r$ получить оценку

$$\|u_\delta - u_0\| \le 7rG\left|\bar{\alpha}(\delta)\right|,$$

где $\bar{\alpha}(\delta)$ – значение параметра регуляризации, выбранное из уравнения

$$r\alpha G(\alpha) = \delta.$$

Методика решения задачи

В методе проекционной регуляризации [1] используется регуляризующее семейство операторов $\{P_\alpha : 0 < \alpha < \|A\|\}$, определяемых формулой

$$P_\alpha g = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma g, \quad \alpha \in (0, \|A\|], \tag{4}$$

где $\{E_\sigma : 0 \le \sigma \le \|A\|\}$ – спектральное разложение единицы E, порожденное оператором $\bar{A}$.

Приближенное решение уравнения (3) определим формулой

$$u_\delta^\alpha = P_\alpha g_\delta. \tag{5}$$

Для выбора параметра регуляризации $\hat{\alpha}$ по исходным данным (g_δ, δ) в формуле (5) используем уравнение

$$\left\|\bar{A}u_\delta^\alpha - g_\delta\right\|^2 = 16\delta^2. \tag{6}$$

Лемма 3. Если $\|g_\delta\| > 4\delta$,то существует значение $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$, удовлетворяющее уравнению (6) [2].

В дальнейшем приближенное решение определим формулой

$$u_\delta = T_\delta g_\delta = \begin{cases} P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} g_\delta & \text{при } \|g_\delta\| > 4\delta, \\ 0, & \text{при } \|g_\delta\| \le 4\delta. \end{cases} \tag{7}$$

Из (4), (6) и (7) следует, что для любого значения $g_\delta \in H$ приближенное решение u_δ уравнения (3) определено однозначно.

Лемма 4. Оператор T_δ, определяемый формулой (7), непрерывен на пространстве H [2].

Обозначим через $\bar{\alpha}(\delta)$ значение параметра регуляризации, выбранное из уравнения

$$r\alpha G(\alpha) = \delta. \tag{8}$$

Лемма 5. Пусть оператор P_α, определен формулой (4), тогда [1, с. 42]

$$\|P_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}.$$

Лемма 6. Если $\|g_\delta\| > 4\delta$ и $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$ определено (6), то для любого $\alpha > 0$ из того, что

$$\left\|\bar{A}P_\alpha g_\delta - g_\delta\right\| < 4\delta \tag{9}$$

следует [2]

$$\|P_\alpha\| \ge \left\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}\right\|.$$

Лемма 7. Пусть $u_0 \in M_r, \|g_\delta\| > 4\delta$, тогда для значений $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$ и $\bar{\alpha}(\delta)$ выполняются следующие соотношения [2]

$$\left\|\bar{A}u_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - g_\delta\right\| \le 3\delta, \quad \hat{\alpha}(g_\delta, \delta) \ge \bar{\alpha}(\delta)$$

и

$$\left\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} g_0\right\| \le rG\left[\bar{\alpha}(\delta)\right].$$

Следуя [5], определим функции $\omega_1(\tau, r)$ и $\omega(\tau, r)$:

$$\omega_1(\tau, r) = \sup\left\{\|u_1 - u_2\| : u_1, u_2 \in M_r, \|Au_1 - Au_2\| \le \tau\right\},$$

$$\omega(\tau, r) = \sup\left\{\|u\| : u \in M_r, \|Au\| \le \tau\right\}, \quad \tau, r > 0, \tag{10}$$

которые связаны друг с другом формулой [1]

$$\omega_1(\tau, r) = \omega(\tau, 2r).$$

Пусть $\bar{\sigma}_\tau$ – решение уравнения

$$rG(\sigma)\sigma = \tau.$$

Лемма 8. Если выполнены все условия на операторы A и B, сформулированные выше, а $\tau < r\|\bar{A}\bar{B}\|$, то справедлива формула [2].

$$\omega(\tau,r) \le rG(\bar{\sigma}(\tau)).$$

Теорема 1. Пусть $u_0 \in M_r, \|g\| > 4\delta, u_\delta$ определен формулой (7), и $\bar{\alpha}(\delta)$ – формулой (8), тогда справедлива оценка

$$\|u_\delta - u_0\| \le 7rG|\bar{\alpha}(\delta)|.$$

Доказательство. Из равенства $u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0$ и формулы (4) получаем

$$u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = \int_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}^{\|A\|} \frac{1}{\sigma}\, dE_\sigma g_0. \tag{11}$$

Обозначим через H_3 подпространство, определяемое формулой

$$H_3 = \left(E - E_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}\right)H.$$

Тогда из равенства $u_0 = \bar{B}v_0$ следует

$$u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = \bar{B}v_3, \tag{12}$$

где v_3 – метрическая проекция элемента v_0 на подпространство H_3.

Из (4), (7), леммы 6 и (11) получаем

$$\left\|\bar{A}u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - \bar{A}u_\delta\right\|^2 =$$

$$= \int_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}^{\|A\|} d\left(E_\sigma(g_\delta - g_0), g_\delta - g_0\right) \le \tag{13}$$

$$\le \|g_\delta - g_0\|^2 \le \delta^2,$$

а из равенства $\|\bar{A}u_\delta - g_\delta\| = 4\delta$ и соотношения (13) следует

$$\left\|\bar{A}u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - g_\delta\right\| \le 5\delta, \tag{14}$$

а значит

$$\left\|\bar{A}u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - \bar{A}u_0\right\| \le 6\delta. \tag{15}$$

Так как из (12) следует, что $u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = \bar{B}v_3$, где $\|v_3\| \le r$, то из (15) следует

$$\left\|u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - u_0\right\| \le \omega_1(6\delta, r). \tag{16}$$

Из леммы 8 , соотношения (16) и того, что $\omega_1(6\delta,r) = \omega(6\delta,2r)$ следует

$$\left\|u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - u_0\right\| \le 6rG\left[\bar{\alpha}(\delta)\right]. \tag{17}$$

Так как из леммы 7 $\hat{\alpha}(g_\delta,\delta) \ge \bar{\alpha}(\delta)$, то

$$\frac{1}{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} \le \frac{1}{\bar{\alpha}(\delta)}, \tag{18}$$

а значит

$$\left\|u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - u_\delta\right\| \le \frac{\delta}{\bar{\alpha}(\delta)}. \tag{19}$$

Из (8) и (19) следует

$$\left\|u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - u_\delta\right\| \le rG\left[\bar{\alpha}(\delta)\right]. \tag{20}$$

Из (17) и (20) следует утверждение теоремы.

Результаты

Покажем нахождение оценки погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации на примере решения обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Для этого рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty, \qquad t \in (0,T],\ T > 1, \tag{21}$$

где

$$u(x,t) \in C\{(-\infty,\infty)\times[0,T]\} \cap C^{2,1}\{(-\infty,\infty)\times(0,T]\}$$

для любого $t \in (0,T]$,

$u(x,t), u'_x(x,t), u''_{xx}(x,t) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ и существует функция $\chi(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что для любого $t \in (0,T]$

$$|u(x,t)| + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \le \chi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{22}$$

Пусть дано распределение температуры $f(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ в момент времени $T > 0$

$$u(x,T) = f(x); \quad -\infty < x < \infty, \tag{23}$$

а начальное распределение $u_0(x)$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{24}$$

требуется определить.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ существует $u_0(x)$ такое, что производная $u'_0(x)$ является четной, кусочно-непрерывной функцией и $u_0(x), u'_0(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$, а также решение задачи (21), (23) при нем удовлетворяет условию $u(x,T) = f_0(x)$, но точное значение $f_0(x)$ нам не известно, а вместо него даны некоторые приближения $f_\delta(x) \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_2(-\infty,\infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(x) - f_0(x)\|_{L_2} \le \delta. \tag{25}$$

Требуется, используя исходные данные (f_δ, δ) задачи (21), (22), (24), определить приближенное решение $u_\delta(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ и оценить величину $\|u_\delta(x) - u_0(x)\|_{L_2}$.

Для решения задачи (21), (22), (24) используем преобразование Фурье F, тогда получим

$$\hat{u}_t'(\lambda,t) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda,t); \quad \lambda \in (-\infty,\infty), \quad t \in (0,T] \tag{26}$$

и

$$\hat{u}(\lambda,T) = \hat{f}(\lambda); \quad \lambda \in (-\infty,\infty), \tag{27}$$

где $\hat{u}(\lambda,t) = F[u(x,t)]$, а $\hat{f}(x) = F[f(x)]$.

Решая задачу (26), (27), сведем ее к операторному уравнению

$$A\hat{u}(\lambda) = e^{-\lambda^2 T}\hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda); \quad \hat{u}(\lambda), \hat{f}(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty). \tag{28}$$

Из условий четности и кусочной непрерывности производной $u_0'(x)$ следует, что

$$u_0'(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + \psi(x), \tag{29}$$

где для любого $i \in \overline{1,n}$ существуют числа $a_i \neq 0$ и $x_i > 0$ такие, что

$$\varphi_i = \begin{cases} a_i; & -x_i \le x \le x_i, \\ 0; & x < -x_i,\, x > x_i, \end{cases} \tag{30}$$

а

$$\psi(x) \in W_2^{\frac{1}{2}}(-\infty,\infty). \tag{31}$$

Таким образом, из (30) следует

$$\hat{\varphi}_i(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} a_i \dfrac{\sin x_i \lambda}{\lambda}; & -\infty < \lambda < 0,\, 0 < \lambda < \infty, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} a_i x_i; & \lambda = 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $\hat{\varphi}_i(\lambda) = F[\varphi_i(x)]$.

Лемма 9. Пусть $\varphi(x) \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_2(-\infty,\infty)$ и $\hat{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)]$, тогда из того, что $\varphi(x) \in W_2^p(-\infty,\infty)$, $p \in (0,\infty)$ следует

$$\|\varphi(x)\|_{W_2^p}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|1+\lambda^{2p}\right| |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty.,$$

Доказательство приведено в [8, с. 212].

Из (32) следует, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$

$$\varphi_i(x) \in W_2^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}(-\infty,\infty), \qquad i \in \overline{1,n}. \tag{33}$$

Значит для любого $i \in \overline{1,n}$ существует c_i такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[1+|\lambda|^{1-\varepsilon}\right] |\hat{\varphi}_i(\lambda)|^2 \, d\lambda < \frac{4a_i^2}{\pi\varepsilon} + c_i. \tag{34}$$

Из условий, которым удовлетворяет функция $u_0(x)$, будет следовать существование числа $a > 0$ такого, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[1+|\lambda|^{3(1-\varepsilon)}\right] |\hat{u}_0(\lambda)|^2 \, d\lambda \le \frac{a}{\varepsilon}, \tag{35}$$

а из (25) и теоремы Планшереля [7, с. 411], что

$$\left\| A\hat{u}_0(\lambda) - \hat{f}_\delta(\lambda) \right\| \le \delta, \tag{36}$$

где $\hat{u}_0(\lambda) = F[u_0(x)]$, а $\hat{f}_\delta(\lambda) = F[f_\delta(x)]$.

Применяя к решению задачи (28) метод проекционной регуляризации [1], введем регуляризующее семейство операторов $\{P_\alpha : \alpha > 0\}$, определяемых формулой

$$P_\alpha \hat{f}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda^2 T}\hat{f}(\lambda); & |\lambda| \le \alpha \\ 0; & |\lambda| > \alpha. \end{cases}$$

Таким образом, приближенное решение $\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda)$ в уравнении (28) определим формулой

$$\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) = P_\alpha \hat{f}_\delta(\lambda), \tag{37}$$

а для выбора параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\hat{f}_\delta, \delta)$ в формуле (37) используем уравнение

$$\left\| A\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) - \hat{f}_\delta(\lambda) \right\|_{L_2}^2 = 16\delta^2. \tag{38}$$

Из (37) и (38) определим приближенное решение $\hat{u}_\delta(\lambda)$ уравнения (28) формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda) = \hat{u}_\delta^{\alpha(g_\delta,\delta)}(\lambda).$$

Из теоремы 1 и формул (35)–(38) следует оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G[\bar{\alpha}(\delta)], \tag{39}$$

в которой функция $G_\varepsilon(\sigma)$, следуя (35) и (28), определяется параметрически:

$$\begin{cases} \sigma = e^{-\lambda^2 \mathrm{T}} & \lambda \in (-\infty,\infty) \\ G_\varepsilon(\sigma) = \left[1+|\lambda|^{3(1-\varepsilon)}\right]^{-\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{40}$$

а $\bar{\alpha}(\delta)$ – уравнением

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\alpha)\alpha = \delta. \tag{41}$$

Так как оценка (39) выполняется при любом $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, то выберем значение $\varepsilon(\delta)$, минимизирующее эту оценку. Ввиду непрерывности функции $7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon))$ по ε на полуотрезке $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

и стремление ее к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, следует существование $\varepsilon(\delta) \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ такого, что

$$7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}}G_{\varepsilon(\delta)}\left(\bar{\alpha}\left(\delta, \varepsilon(\delta)\right)\right) = \\ = \min_{\varepsilon \in (0,1]} 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}G_{\varepsilon}\left(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)\right). \tag{42}$$

Тогда из (39)–(42) для $\hat{u}_\delta(\lambda)$ будет справедлива оценка

$$\left\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\right\| \le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}}G_{\varepsilon(\delta)}\left[\bar{\alpha}\left(\delta, \varepsilon(\delta)\right)\right]. \tag{43}$$

Применяя к $\hat{u}_\delta(\lambda)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и беря действительную часть, получим приближенное решение $u_\delta(x) = \mathrm{Re}\left[F^{-1}\left(\hat{u}_\delta(\lambda)\right)\right]$ обратной задачи (21), (23), (25). Для этого решения по теореме Планшереля ([7, с. 411] будет справедлива оценка (43).

Упрощая оценку (43), получаем

$$\left\|u_\delta(x) - u_0(x)\right\| \le 7\sqrt[4]{2}e^{\frac{3a}{2}}T^{\frac{3}{4}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Литература

1. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2006. – Т. 9. – № 4. – С. 154–168.

3. Менихес, Л.Д. Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева / Л.Д. Менихес, В.П. Танана // Сиб. журн. вычисл. математики. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 416–423.

4. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965.

5. Иванов, В.К. Об оценке погрешности при решении некорректных задач / В.К. Иванов, Т.И. Королюк // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. – 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 30–41.

6. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981.

7. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.

8. Крейн, С.Г. Функциональный анализ / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 17 декабря 2012 г.