УДК 517.968 DOI: 10.14529/ctcr170401

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

И.В. Сидлер, Е.В. Маркова

Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Россия

Представлен программный комплекс для исследования области устойчивости численного решения тестового неклассического интегрального уравнения типа Вольтерра, возникающего при моделировании развивающихся систем. Предполагается, что элементы системы разбиты на несколько возрастных групп, каждая из которых действует с определенной эффективностью. Баланс между задаваемым уровнем развития системы и количеством осуществляющих его элементов, описывается неклассическим уравнением Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования. Первая часть программы содержит численное решение тестового уравнения модифицированными методами левых и средних прямоугольников. Во второй части ведется поиск величины априорной оценки границы временного отрезка, на котором погрешность численного решения не превосходит заданный порог.

Ключевые слова: развивающаяся система, тестовое уравнение Вольтерра I рода, численное решение, неустойчивость, погрешность начальных данных.

Введение

В основе интегральных моделей развивающихся систем [1] лежат операторы Вольтерра I рода с переменными верхними и нижними пределами интегрирования, которые описывают динамику замены устаревших элементов системы новыми. Модели типа В.М. Глушкова обстоятельно исследованы и нашли применение в работах [2–4]. Простейшая односекторная модель развивающейся системы включает уравнение

$$\int_{a(t)}^{t} K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t\in[0,T], \tag{1}$$

ядро которого $K(t,s)$ – показатель эффективности функционирования элементов $x(s)$, их возраст в момент t равен $t-s$. Неубывающая функция $a(t)<t$ описывает динамику замены устаревших элементов новыми, а функция $y(t)$ задает интегральный показатель развития системы. Например, применительно к электроэнергетической системе в качестве $y(t)$ в работах [5, 6] принята располагаемая мощность электростанций. Теория и численные методы уравнений типа (1) для случаев $a(0)=0$ и $a(0)<0$ имеют существенные различия и детально исследованы в монографии [7].

Если элементы системы разделены на n возрастных групп G_i, так что $x(s)\in G_i$, если $t-s\in\left[t-a_{i-1}(t), t-a_i(t)\right)$, $a_0(t)\equiv t>a_1(t)>\ldots>a_n(t)\geq 0\ \forall t>0$; $a_i(0)=0$, $i=\overline{1,n}$, $a_1'(0)<1$, то вместо (1) рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t),\ t\in[0,T], \tag{2}$$

левая часть которого учитывает вклад в $y(t)$ каждой возрастной группы. Другими словами, в развивающейся системе балансовое уравнение (2) описывает количество элементов $x(t)$, необходимое для достижения заданного уровня $y(t)$. При этом момент зарождения системы и момент начала моделирования совпадают, так что предыстория отсутствует. В работе [8] получены достаточные условия корректности по Адамару уравнения (2) на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$.

В развивающейся системе важным является учет того факта, что эффективность работы элементов представляет собой убывающую функцию времени, при этом для достаточно большого T наблюдается эффект неустойчивости непрерывного решения (2) к погрешностям исходных данных. Исследованию этого феномена посвящены работы [9, 10]. В них для тестовых уравнений (при $n = 2, 3$) с помощью эквивалентного функционального уравнения получены априорные оценки величины узла сетки, в котором погрешность численного решения тестового уравнения впервые превысит заданный порог.

Применение стандартных квадратурных методов для численного решения уравнений с переменными пределами вида (2) приводит к проблеме, связанной с несовпадением узлов равномерной сетки со значениями переменных пределов интегрирования. В работах [11, 12] разработан подход, позволяющий применять для решения неклассических уравнений Вольтерра квадратуры левых и средних прямоугольников без потери порядка сходимости.

Представленный программный комплекс включает численное решение тестового уравнения развивающейся системы, состоящей из трех возрастных групп модифицированными методами левых и средних прямоугольников (ЛП и СП); поиск величины априорной оценки границы отрезка, на котором погрешность численного решения не больше наперед заданного числа. Приведены результаты численных расчетов тестового примера.

1. Численные методы

Хорошо известно, что в случае классического уравнения Вольтерра I рода (в (2) $n = 1$) при достаточной гладкости ядра и искомого решения порядок сходимости численного метода равен порядку аппроксимации квадратуры, таким образом, квадратура ЛП дает первый порядок сходимости, а квадратура СП – второй порядок. В работах [11, 12] предложен метод численного решения (2), основанный на представлении (2) в виде

$$Vx \equiv \int_0^t K_1(t,s)x(s)ds + \sum_{i=2}^{n} \int_0^{a_{i-1}(t)} \hat{K}_i(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

где $\hat{K}_i(t,s) \equiv K_i(t,s) - K_{i-1}(t,s),\ i = \overline{2,n}$.

Редукция (3) возможна при дополнительном предположении, что ядро $K_i(t,s)$ определено в области

$$\bar{\Delta}_i = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j,\ \Delta_j = \{(t,s) : a_j(t) \le s \le a_{j-1}(t),\ t \in [0,T\}].$$

В [11] показано, что сеточный аналог (3)

$$h\sum_{j=0}^{k-1} K_1(t_k,t_j)x_j^h + \sum_{i=2}^{n}\Big(h\sum_{j=0}^{l_{k,i-1}-1} \hat{K}_i(t_k,t_j)x_j^h + (a_{i-1}(t_k) - l_{k,i-1}h)\hat{K}_i(t_k,t_{l_{k,i-1}})x_{l_{k,i-1}}^h\Big) = y(t_k),\ k = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$t_k = kh,\ k = \overline{0,m},\ mh = T,\ l_{k,i} = \left[\frac{a_i(t_k)}{h}\right], \tag{5}$$

использующий квадратуру ЛП, при выполнении достаточных условий существования единственности и устойчивости решения [8] и стандартных условий на гладкость ядра и искомого решения $\bar{x}(t)$ дает первый порядок сходимости по шагу h в равномерной сеточной норме. Метод (4), (5) назван модифицированным методом ЛП (ММЛП).

В работе [12] построен модифицированный метод СП (ММСП), также использующий преобразование (3). Аппроксимация в (3) интегралов квадратурой СП на сетке $t_{j-1/2} = (j - 1/2)h$, $j = \overline{1, l_{k,i-1}}$, $k = \overline{1,m}$, $mh = T$, содержит значение подынтегральной функции в точке, не совпадающей с узлом регулярной сетки. Поэтому уже на первой итерации ($k = 1$) сеточный аналог (3) может дать одно уравнение с n неизвестными. Преодолеть это препятствие позволяет процедура линейной интерполяции по ближайшим слева и справа значениям в узлах регулярной сетки. Сеточный аналог (3) имеет следующий вид:

$$V_h x^h \equiv h\sum_{j=1}^{k} K_1(t_k, t_{j-1/2}) x^h_{j-1/2} + \sum_{i=2}^{n}\left(h\sum_{j=1}^{l_{k,i-1}} \hat{K}_i(t_k, t_{j-1/2}) x^h_{j-1/2} + \right.$$

$$\left. +(a_{i-1}(t_k) - l_{k,i-1}h)\hat{K}_i(t_k, \frac{l_{k,i-1}h + a_{i-1}(t_k)}{2})\tilde{x}^h_{l_{k,i-1}} \right) = y(t_k),\ k = \overline{1,m}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{x}^h_{l_{k,i-1}} = (1 - \frac{a_{i-1}(t_k)}{h})x_0 + \frac{a_{i-1}(t_k)}{h}x_{1/2},$$

если $l_{k,i-1} = 0$, и

$$\tilde{x}^h_{l_{k,i-1}} = \gamma^{(1)}_{k,i-1} x^h_{l_{k,i-1}-1/2} + \gamma^{(2)}_{k,i-1} x^h_{l_{k,i-1}+1/2},$$

$$\gamma^{(1)}_{k,i-1} = \frac{l_{k,i-1} + 1 - a_{i-1}(t_k)/h}{2}, \quad \gamma^{(2)}_{k,i-1} = \frac{a_{i-1}(t_k)/h - l_{k,i-1} + 1}{2},$$

если $l_{k,i-1} \ge 1$.

При этом стартовое значение

$$x_0 = \frac{y'(0)}{K_1(0,0) - \sum_{i=2}^{n} a_i'(0)\hat{K}_i(0,0)}. \quad (7)$$

Знаменатель (7) в ноль никогда не обращается при условиях корректной постановки [8]. В [12] приводятся результаты, доказывающие, что метод (6), (7) имеет второй порядок точности. На программную реализацию ММЛП и ММСП получены авторские свидетельства [13, 14].

2. Априорная оценка границы отрезка устойчивости численного решения тестового уравнения ($n = 3$)

В работе [10] рассмотрено тестовое уравнение

$$\int_{\alpha_1 t}^{t} x(s)ds + \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} (1 - \delta_1 s)x(s)ds + \int_{0}^{\alpha_2 t} (1 - \delta_2 s)x(s)ds = y(t), \quad (8)$$

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0;\ \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,\ t \in [0,T],$$

которое представляет собой модель развивающейся системы, состоящей из трех возрастных групп, младшая из них (первое слагаемое) действует со стопроцентной эффективностью. Пусть $\delta_2 > \delta_1$ – это означает, что эффективность работы старшей группы, которую описывает третье слагаемое, убывает с большей скоростью, чем эффективность средней группы (второе слагаемое). Уравнение (8) описывает вклад каждой из групп в задаваемый суммарный показатель развития системы $y(t)$.

Пусть $y'(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}$, тогда дифференцированием (8) переходим к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \alpha_1^2\delta_1 t\, x(\alpha_1 t) + \alpha_2^2(\delta_2 - \delta_1) t\, x(\alpha_2 t) + y'(t),\ t \in [0,T], \quad (9)$$

для которого определена величина $T^* = 1 \big/ \alpha_1^2\delta_1 + \alpha_2^2(\delta_2 - \delta_1)$ – границы отрезка существования непрерывного решения уравнения (8). Для исследования характера неустойчивости при $t > T^*$ приближенного решения (8) выпишем однородное уравнение относительно ошибки $\varepsilon(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$

$$\varepsilon(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t\, \varepsilon(\alpha_1 t) + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) t \varepsilon(\alpha_2 t),\ t \ge T^*, \tag{10}$$

где $\bar{x}(t)$ – точное решение уравнения (9) ((8)), $\tilde{x}(t)$ – любое приближенное решение (9) ((8)), такое что $\tilde{x}(T^*) \ne \bar{x}(T^*)$. Пусть также $\varepsilon(\alpha_1 T^*) \cup \varepsilon(\alpha_2 T^*) \ne 0$ и $\operatorname{sign} \varepsilon(\alpha_1 T^*) = \operatorname{sign} \varepsilon(\alpha_2 T^*)$.

Зададим в (10) $t = T_i = T^* / \alpha_1^i$, $i = 0,1,2,\ldots$ Тогда переход в (10) при $t = T_i$ к оценке по модулю дает

$$|\varepsilon(T_i)| = \alpha_1^2 \delta_1 T_i |\varepsilon(\alpha_1 T_i)| + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) T_i |\varepsilon(\alpha_2 T_i)|,\ i = 0,1,2\ldots, \tag{11}$$

откуда следует, что с увеличением i показательный рост T_i гарантирует существование такого $i = i_M^*$, для которого

$$|\varepsilon(T_i)| < M,\ i = \overline{0, i_M^* - 1};\ |\varepsilon(T_{i_M^*})| \ge M,$$

каково бы ни было сколь угодно большое $M < \infty$.

Для численного решения (8) применим какой-либо сходящийся на $[0, T^*]$ метод квадратур, погрешность которого в точках $\alpha_i T^*$ равна $\varepsilon^h(\alpha_i T^*)$, $i = 1, 2$ (h – шаг сетки). Назовем $T_{i_M^*}^h$ такую точку временной оси, для которой

$$|\varepsilon(T_i^h)| < M,\ i = \overline{0, i_M^* - 1};\ |\varepsilon(T_{i_M^*}^h)| \ge M. \tag{12}$$

В силу погрешности аппроксимации интеграла квадратурой, а также неизбежной погрешности округлений при компьютерных вычислениях, которые не учитывались при анализе погрешности приближенного решения (9), заведомо имеет место неравенство

$$|\varepsilon_{k_{i_M^*}}^h| \equiv |\bar{x}(T_{i_M^*}^h) - x_{k_{i_M^*}}^h| > |\varepsilon(T_{i_M^*}^h)|, \tag{13}$$

где $x_{k_{i_M^*}}^h$ – сеточное решение уравнения (8) в узле $k_{i_M^*} h = T_{i_M^*}^h$. Поэтому существует такой узел $k_M h = T_{k_M^*}^h$ равномерной сетки $t_k = kh,\ k = 0,1,2,\ldots$, такой что

$$|\varepsilon_k^h| < M,\ i = \overline{0, k_M^* - 1};\ |\varepsilon_{k_M^*}^h| \ge M. \tag{14}$$

Из (12)–(14) следует неравенство

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*}^h. \tag{15}$$

3. Описание программного комплекса

Программа реализована в среде MATLAB и состоит из следующих частей.

1. Задание параметров тестового уравнения развивающейся системы из трех возрастных групп (8) α_1, α_2, δ_1, δ_2. Задание величины M.
2. Вычисление численного решения уравнения (8) с помощью ММЛП (4), (5).
3. Из условия (14) ведется поиск k_M^* и соответствующей величины $T_{k_M^*}^h$.
4. В правую часть рекурсии (11) вместо $\varepsilon(\alpha_1 T_i)$, $\varepsilon(\alpha_2 T_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, подставляются полученные численно значения $\varepsilon^h(\alpha_1 T_i)$, $\varepsilon^h(\alpha_2 T_i)$. По условию (12) ведется поиск значений i_M^* и $T_{i_M^*}^h$.
5. Вычисление численного решения уравнения (8) с помощью ММСП (6), (7).
6. Выполнение пунктов 3 и 4 для результатов ММСП.

Пример выполнения программы содержится в следующем пункте.

4. Результаты численных расчетов

Зададим параметры тестового уравнения (8): $\delta_1 = 10^2$, $\delta_2 = 2 \cdot 10^2$, точное решение $\bar{x}(t) = t$, при этом правая часть $y(t) = t + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3}(\delta_1 \alpha_1^3 - \delta_1 \alpha_2^3 - \delta_2 \alpha_2^3) t^3$. Результаты численных расчетов

ММЛП приведены в табл. 1. Сравнение колонок 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12 показывает справедливость неравенства (15). Видно, что для фиксированных значений δ_i, α_i, M с уменьшением шага решение уточняется и удается продвинуться правее по отрезку.

В табл. 2 приведены результаты ММСП. Сравнение колонок 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12 также показывает справедливость неравенства (15). При этом уменьшение шага приводит к уточнению решения и отрезок устойчивости увеличивается.

Таблица 1

Результаты расчетов ММЛП для вариантов $M = 10^1;\ 10^2;\ 10^3$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	α_2	T^*	h	$\varepsilon^h(\alpha_2 T^*)$	$\varepsilon^h(\alpha_1 T^*)$	$T^h_{k^*_{10}}$	$T^h_{i^*_{10}}$	$T^h_{k^*_{10^2}}$	$T^h_{i^*_{10^2}}$	$T^h_{k^*_{10^3}}$	$T^h_{i^*_{10^3}}$
$2/3$	$1/3$	0,018	0,004500	–0,001985	0,001191	0,1935	0,2050	0,2745	0,3075	0,3870	0,4613
			0,001125	0,000448	–0,000336	0,2261	0,3075	0,3263	0,4613	0,4455	0,6920
			0,000281	0,000082	–0,000017	0,2846	0,4613	0,3828	0,4613	0,5138	0,6920
$8/9$	$4/9$	0,010	0,001270	0,000136	–0,001491	0,0456	0,0468	0,0544	0,0592	0,0645	0,0667
			0,000316	0,000030	–0,000204	0,0500	0,0527	0,0598	0,0667	0,0699	0,0750
			0,000079	0,000013	–0,000063	0,0552	0,0592	0,0654	0,0667	0,0765	0,0844
			0,000020	0,000003	–0,000011	0,0614	0,0667	0,0719	0,0750	0,0829	0,0844

Таблица 2

Результаты расчетов ММСП для вариантов $M = 10^1;\ 10^2;\ 10^3$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	α_2	T^*	h	$\varepsilon^h(\alpha_2 T^*)$	$\varepsilon^h(\alpha_1 T^*)$	$T^h_{k^*_{10}}$	$T^h_{i^*_{10}}$	$T^h_{k^*_{10^2}}$	$T^h_{i^*_{10^2}}$	$T^h_{k^*_{10^3}}$	$T^h_{i^*_{10^3}}$
$2/3$	$1/3$	0,018	0,005143	–0,000283	–0,000557	0,2751	0,3076	0,3831	0,4613	0,5066	0,6920
			0,001161	–0,000021	–0,000019	0,4094	0,4613	0,5255	0,6920	0,7032	1,0380
			0,000141	$-1{,}2\cdot 10^{-7}$	$-3{,}6\cdot 10^{-7}$	0,6499	0,6920	0,8646	1,0380	1,0895	1,5570
$8/9$	$4/9$	0,010	0,000321	$-1{,}9\cdot 10^{-6}$	$-3{,}9\cdot 10^{-6}$	0,0712	0,0750	0,0824	0,0844	0,0824	0,0844
			0,000160	$-4{,}8\cdot 10^{-7}$	$-9{,}1\cdot 10^{-7}$	0,0781	0,0844	0,0895	0,0949	0,0895	0,0949
			0,000079	$-1{,}2\cdot 10^{-7}$	$-2{,}3\cdot 10^{-7}$	0,0848	0,0949	0,0972	0,1068	0,0972	0,1068
			0,000040	$-3{,}3\cdot 10^{-8}$	$-5{,}7\cdot 10^{-8}$	0,0919	0,0949	0,1047	0,1068	0,1047	0,1068

Рисунок иллюстрирует характер неустойчивости численного решения уравнения (8) с помощью ММСП.

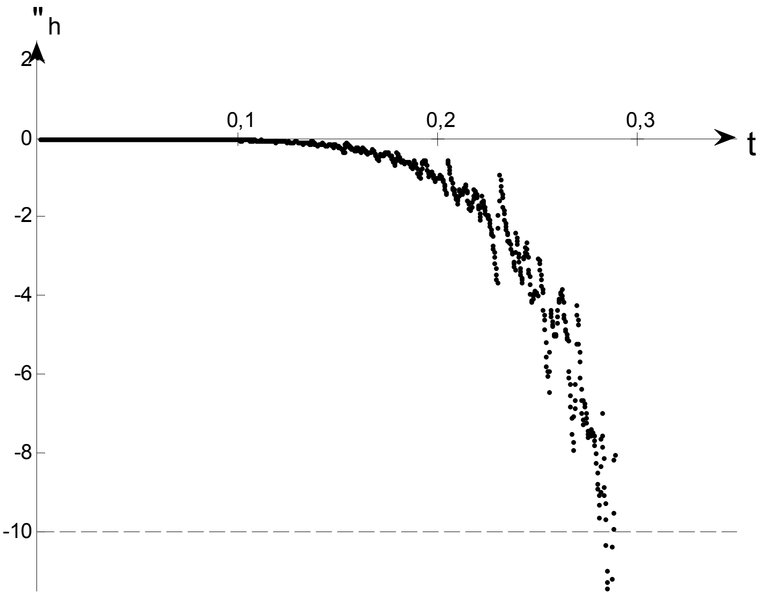

График погрешности численного решения (8) при $\delta_1 = 10^2$, $\delta_2 = 2\cdot 10^2$, $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = 1/3$, $\bar{x}(t) = t$, $M = 10^1$, $h = 0{,}000281$, $T^* = 0{,}018$, $T^h_{i^*_M} = 0{,}461$, $T^h_{k^*_M} = 0{,}285$

Заключение

В работе описан программный комплекс для исследования численного решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода, представляющего развивающуюся систему, которая состоит из трех возрастных групп. Расчеты показывают, что при росте модуля коэффициента эффективности старших групп по сравнению с коэффициентом молодой группы система с течением времени ведет себя неустойчиво к возмущению начальных данных. Показано, что граница временного отрезка устойчивости численного решения не превосходит априорную оценку этой границы, полученную теоретически.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №15-01-01425-а.

Литература

1. *Глушков, В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей / В.М. Глушков // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 2. – С. 3–6.*
2. *Глушков, В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – М.: Наука, 1983. – 350 с.*
3. *Яценко, Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю.П. Яценко. – Киев: Наукова думка, 1991. – 217 с.*
4. *Hritonenko, N. Applied Mathematical Modelling of Engineering Problems / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko. – Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 286 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-9160-7*
5. *Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики / А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В. Труфанов // Электричество. – 2005. – № 10. – С. 64–75.*
6. *Apartsyn, A.S. Using the Nonclassical Volterra Equations of the First Kind to Model the Developing Systems / A.S. Apartsyn, I.V. Sidler // Automat. Remote Control. – 2013. – Vol. 74, no. 6. – P. 899–910. DOI: 10.1134/S0005117913060015*
7. *Apartsyn, A.S. Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind / A.S. Apartsyn. – VSP, Utrecht-Boston, 2003. – 168 p. DOI: 10.1515/9783110944976*
8. *Apartsyn, A.S. On the theory of nonclassical Volterra equations of the first kind / A.S. Apartsyn // Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013), Albi, France, June 26–28, 2013. – A6353AA.*
9. *Апарцин, А.С. К исследованию устойчивости решений тестовых неклассических уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12, № S. – С. 15–20.*
10. *Apartsyn, A.S. A priori estimates of the test volterra equations of the first kind solutions stability in integral models of developing systems / A.S. Apartsyn, I.V. Sidler // Abstracts of the Second Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations (NSIDE 2017). – Irkutsk: Irkutsk State University, 2017. – P. 13.*
11. *Апарцин, А.С. Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем / А.С. Апарцин, И.В. Сидлер // Сборник трудов VII Международного симпозиума «Обобщенные постановки и решения задач управления». – М.: АНО «Издательство физико-математической литературы», 2014. – С. 21–25.*
12. *Апарцин, А.С. О численном решении неклассических уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин, И.В. Сидлер // Сборник статей IX Международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем». – Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. – С. 59–64.*
13. *Свидетельство о госрегистрации программы для ЭВМ 2015612206. Рос. Федерация. Программное средство для численного решения неклассических уравнений Вольтерра I рода модифицированным методом левых прямоугольников / И.В. Сидлер; правообладатель ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2014664105; заявл. 26.12.2014; зарегистр. 13.02.2015; опубл. 20.03.2015, Бюл. № 3. – 1 с.*
14. *Свидетельство о госрегистрации программы для ЭВМ 2015612208. Рос. Федерация. Программное средство для численного решения неклассических уравнений Вольтерра I рода мо-*

дифицированным методом средних прямоугольников / И.В. Сидлер; правообладатель ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2014664106 ; заявл. 26.12.2014; зарегистр. 13.02.2015; опубл. 20.03.2015, Бюл. № 3. – 1 с.

Сидлер Инна Владимировна, канд. техн. наук, старший научный сотрудник лаборатории неустойчивых задач вычислительной математики, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск; inna.sidler@mail.ru.

Маркова Евгения Владимировна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории неустойчивых задач вычислительной математики, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, markova@isem.irk.ru.

Поступила в редакцию 5 сентября 2017 г.

DOI: 10.14529/ctcr170401

SOFTWARE PACKAGE TO RESEARCH THE STABILITY REGION OF THE SOLUTION OF THE ONE NONCLASSICAL VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND

I.V. Sidler, *inna.sidler@mail.ru,*
E.V. Markova, *markova@isem.irk.ru*
Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation

This paper presents the software package for investigation of the stability region of a numerical solution of the test nonclassical integral Volterra equation of the first kind arising in the modeling of developing systems. We assume that the elements of the system are divided into several age groups. Each of groups operates with a certain efficiency. The nonclassical Volterra equation of the first kind with variable limits of integration describes the balance between the given level of system development and the number of its elements. The first part of the program contains a numerical solution of the test equation. This solution obtained by modified methods of left and middle rectangles. In the second part, we search the value of the a priori estimate of the time interval boundary. In this inerval the error in the numerical solution does not exceed a given value.

Keywords: developing system, three age groups, test Volterra equations of the first kind, numerical solution, instability, initial data error.

References

1. Glushkov V.M. [On One Class of Dynamic Macroeconomic Models]. *Controlling Systems and Machines*, 1977, no. 2, pp. 3–6. (in Russ.)

2. Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem* [Modeling of Developing Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 350 p.

3. Yatsenko Yu.P. *Integral'nye modeli sistem s upravlyaemoy pamya'yu* [Integral Models of Systems with Controlled Memory]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1991. 217 p.

4. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Applied Mathematical Modelling of Engineering Problems. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 286 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-9160-7

5. Apartsyn A.S., MarkovaE.V., Sidler I.V., Trufanov V.V. [Application of the Volterra Integral Equations for the Modeling of Strategies of Technical Re-equipment in the Electric Power Industry]. *Elektricity*, 2005, no. 10, pp. 64–75. (in Russ.)

6. Apartsyn A.S., Sidler I.V. Using the Nonclassical Volterra Equations of the First Kind to Model the Developing Systems. *Automat. Remote Control*, 2013, V. 74, No. 6, pp. 899–910. DOI: 10.1134/S0005117913060015

7. Apartsyn A.S. *Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind*. VSP, Utrecht-Boston, 2003. 168 p. DOI: 10.1515/9783110944976

8. Apartsyn A.S. On the Theory of Nonclassical Volterra Equations of the First Kind, *Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013)*, Albi, France, June 26–28, 2013. A6353AA.

9. Apartsyn A.S. [To Study the Stability of Solutions of Test Nonclassical Volterra Equations of the First Kind]. *Siberian Electronic Mathematical News*, 2015, vol. 12, no. S. pp. 15–20. (in Russ.)

10. Apartsyn A.S., Sidler I.V. A Priori Estimates of the Test Volterra Equations of the First Kind Solutions Stability in Integral Models of Developing Systems. *Abstracts of the Second Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations (NSIDE 2017)*, Irkutsk, Irkutsk State University, 2017, p. 13.

11. Apartsyn A.S., Sidler I.V. [Numerical Solution of the Volterra Equations of the First Kind in Integral Models of Developing Systems]. *Sbornik trudov VII Mezhdunarodnogo simpoziuma "Obobshchennye postanovki i resheniya zadach upravleniya"* [Proc. of Materials of VII International Symposium "Generalized Definitions and Decisions of Tasks of Control"]. Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, 2014, pp. 21–25. (in Russ.)

12. Apartsyn A.S., Sidler I.V. On the Numerical Solution of the Nonclassical Volterra Equations of the First Kind. *Sbornik stateH nauch.-tehn. konf. "Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem"* [Proc. of IX International Scient.-Techn. Conference "Analytical and Numerical Methods of Simulation of Natural-Science and Social Problems"], Penza, Penzenskiy Gos. Univ., 2014, pp. 59–64.

13. Sidler I.V. Certificate of State Registration of the Computer Program 2015612206. Russian Federation. *Programmnoe sredstvo dlya chislennogo resheniya neklassicheskikh uravneniy Volterra I roda modifitsirovannym metodom levykh pryamougol'nikov* [Software Package for Mumerical Solution of Nonclassical Volterra Equations of the First Kind by Modified Left Rectangle Method]. Rightsholder – ESI SB RAS. No. 2014664105; application date 26.12.2014, registration date 13.02.2015, published 20.03.2015, Bul. No. 3, 1 p.

14. Sidler, I.V. Certificate of State Registration of the Computer Program 2015612208. Russian Federation. *Programmnoe sredstvo dlya chislennogo resheniya neklassicheskikh uravneniy Volterra I roda modifitsirovannym metodom srednikh pryamougol'nikov* [Software Package to Numerical Solution of Nonclassical Volterra Equations of the First Kind by Modified Middle Rectangles Method]. Rightsholder – ESI SB RAS. No. 2014664106; application date 26.12.2014, registration date 13.02.2015, published 20.03.2015, Bul. No. 3, 1 p.

Received 5 September 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Сидлер, И.В. Программный комплекс для исследования области устойчивости решения одного неклассического уравнения Вольтерра I рода / И.В. Сидлер, Е.В. Маркова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 5–12. DOI: 10.14529/ctcr170401

FOR CITATION

Sidler I.V., Markova E.V. Software Package to Research the Stability Region of the Solution of the One Nonclassical Volterra Equation of the First Kind. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 5–12. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr170401