Управление в технических системах

УДК 681.511 DOI: 10.14529/ctcr170403

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В.В. Булаев, А.Ю. Горанов, В.И. Калёв

АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург, Россия,
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия

Предлагается способ построения множества программных управлений сложным механическим объектом, динамика которого описывается линейной дискретной динамической системой рекуррентных векторно-матричных уравнений. Предполагается, что векторы состояния и управления в каждый момент времени ограничены некоторыми известными выпуклыми компактными множествами. Для решения основной задачи используется аппарат построения и анализа областей достижимости линейных дискретных динамических систем.

Ключевые слова: оптимальное программное управление, терминальное управление, линейная дискретная динамическая система, область достижимости.

Введение

При решении задач управления движением сложных механических объектов (например, ракет-носителей) очень часто рассматриваются математические модели, в которых имеет место неопределенность начального фазового вектора управляемого объекта. Это может быть обусловлено тем, что для определения его точных значений требуется проведение значительного числа измерений, либо проводимые измерения основных параметров объекта являются достаточно грубыми. В подобных случаях [1–3] принято рассматривать неопределенные параметры системы принимающими свои значения из некоторого известного ограниченного и замкнутого множества.

Организации управления в подобных системах посвящено большое количество публикаций [1, 4]. Данная статья использует результаты исследований [5] для решения прикладных задач управления (стабилизация движения, терминальное управление) сложными механическими объектами ракетно-космической техники [6–8]. В работе предлагается способ построения множества всех оптимальных управлений в классе программных стратегий для многомерных линейных дискретных динамических систем с выпуклым терминальным функционалом. Также данная статья завершает первый этап исследования, на котором движение динамической системы рассматривается в условиях отсутствия внешних возмущений и полной информации о векторе состояния, и подготавливает базу для решения задачи позиционного управления (с обратной связью) при наличии неопределенности начального состояния, внешних возмущений и ошибок измерения.

1. Постановка задачи

На целочисленном промежутке времени $t \in \overline{0,T} = \{0, 1, \dots, T\}$, $T > 0, T \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел) рассматривается линейная управляемая система, динамика которой описывается дискретным векторно-матричным рекуррентным соотношением вида:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \ t \in \overline{0,T-1}, \quad (1)$$

где $x(t)$ – вектор состояния (фазовый вектор), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство векторов-столбцов, $n \in \mathbb{N}$); $u(t)$ – вектор управления, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$; $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

В данной работе вводятся следующие предположения.

Предположение 1. Начальные значения фазового вектора системы (1) удовлетворяют заданному геометрическому ограничению:

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\mathbf{X}(0)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин.

Предположение 2. Ограничения фазового вектора системы (1) в каждый момент времени, обусловленные условиями работы управляемого объекта, имеют вид:

$$x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n,\ t \in \overline{1, T}, \tag{3}$$

где $\mathbf{X}(t)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин.

Предположение 3. Значения вектора управления удовлетворяют заданному геометрическому ограничению:

$$u(t) \in \mathbf{P}(t) \subset \mathbb{R}^p,\ t \in \overline{0, T-1}, \tag{4}$$

где $\mathbf{P}(t)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин.

Ограничения из предположений 1 и 2, не умаляя общности, можно объединить, то есть

$$x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n,\ t \in \overline{0, T}.$$

Предположение 4. В связи с использованием общего алгебраического рекуррентного метода [5] построения попятных областей достижимости, предполагается, что матрица $A(t)$ – невырожденная, то есть

$$\det\left(A(t)\right) \neq 0\ \forall t \in \overline{0, T-1}.$$

Следуя работе [5], введем ряд определений.

Определение 1. Множеством допустимых программных управлений на промежутке $\overline{0, T-1}$ называется множество, определяемое соотношением

$$\mathbf{U}_{\text{п}}(\cdot) = \left\{ u(\cdot) \mid u(\cdot) = \left\{u(t)\right\}_{t \in \overline{0, T-1}}\ \forall t \in \overline{0, T-1},\ u(t) \in \mathbf{P}(t) \right\}.$$

Определение 2. Движением управляемой системы (1)–(4), порожденным из начальной позиции $\left(0, x_0\right) \in \{0\} \times \mathbf{X}(0)$ программным управлением $u_*(\cdot) = \left\{u_*(t)\right\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbf{U}_{\text{п}}(\cdot)$, называется множество

$$\tilde{x}\left(\cdot; 0, x_0; u_*(\cdot)\right) = \Big\{ x_*(\cdot) \mid x_*(\cdot) = \left\{x_*(t)\right\}_{t \in \overline{0, T}}\ \forall t \in \overline{0, T-1},$$
$$x_*(t+1) = A(t) x_*(t) + B(t) u_*(t),\ \ x_*(t) \in \mathbf{X}(t) \Big\}.$$

Качество управления в системе (1)–(4) оценивается выпуклым терминальным функционалом $\mathbf{\Phi}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p \times (T-1)} \to \mathbb{R}$, задаваемым соотношением

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\left(x_0, u(\cdot)\right) = \left\| c, \left(x(T) - x_d\right) \right\|_2 = \mathbf{\Phi}\left(x(T)\right), \tag{5}$$

где $c = \left\{c_1, c_2, \ldots, c_n\right\} \in \mathbb{R}^n$ – вектор масштабных коэффициентов; $x(T) = \left\{x_1(T), \ldots, x_n(T)\right\} = \tilde{x}\left(T; x_0, u(\cdot)\right) \in \mathbf{X}(T) \subset \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор в финальный момент времени, $\left\{x_0, u(\cdot)\right\} \in \mathbf{X}(0) \times \mathbf{U}_{\text{п}}(\cdot)$; $x_d = \left\{x_{d1}, \ldots, x_{dn}\right\} \in \mathbb{R}^n$ – вектор желаемых финальных значений фазовых координат.

Теперь мы готовы сформулировать задачу оптимального программного управления для системы (1)–(4).

Задача 1. Для фиксированной пары $\left\{0, \mathbf{X}(0)\right\}$ управляемой многошаговой системы (1)–(4), определенной на промежутке $\overline{0, T}$, необходимо найти множество $L^{(e)}\left(\mathbf{X}(0), \mathbf{P}(t)\right)$ пар $\left\{x^{(e)}(0), u^{(e)}(\cdot)\right\} \in \mathbf{X}(0) \times \mathbf{U}_{\text{п}}(\cdot)$, таких, что векторы $x^{(e)}(T) = \tilde{x}\left(T; x^{(e)}(0), u^{(e)}(\cdot)\right)$ доставляют минимум функционалу (5), то есть

$$L^{(e)}\left(\mathbf{X}(0), \mathbf{P}(t)\right) = \left\{\{x^{(e)}(0), u^{(e)}(\cdot)\} \mid \{x^{(e)}(0), u^{(e)}(\cdot)\} \in \mathbf{X}(0) \times \mathbf{U}_{\text{п}}(\cdot),\right.$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\left(x^{(e)}(0), u^{(e)}(\cdot)\right) = \min_{\{x(0), u(\cdot)\} \in \mathbf{X}(0) \times \mathbf{U}_{\text{п}}(\cdot)} \left\| c, \left(\tilde{x}\left(T; x_0, u(\cdot)\right) - x_d\right) \right\|_2 = \tag{6}$$

$$\left. = \left\| c, \left(x^{(e)}(T) - x_d\right) \right\|_2 = \mathbf{\Phi}\left(x^{(e)}(T)\right) = \mathbf{\Phi}^{(e)},\ x^{(e)}(T) = \tilde{x}\left(T; x^{(e)}, u^{(e)}(\cdot)\right)\right\}.$$

В следующей главе данной работы мы кратко опишем основные определения и свойства областей достижимости, используемые нами для решения поставленной Задачи 1.

2. Области достижимости: определения и свойства

Использование аппарата построения и анализа областей достижимости при решении задач управления имеет очень широкое распространение [1, 9–15]. В данном разделе работы мы коротко введем определения и свойства областей достижимости, которые потребуются при описании алгоритма решения Задачи 1 для линейной дискретной динамической системы вида (1)–(4).

Введем в рассмотрение следующие определения прямых и попятных областей достижимости системы (1)–(4).

Определение 3. Прямой областью достижимости фазовых состояний управляемой системы (1)–(4) на момент времени ϑ, соответствующей паре $\left(\tau, \mathbf{\Gamma}(\tau)\right) \in \overline{0, T-1} \times 2^{\mathbb{R}^n}$, называется множество, определяемое соотношением:

$$\mathbf{G}_+\left(\tau, \mathbf{\Gamma}(\tau); \vartheta\right) = \left\{x(\vartheta) \mid x(\vartheta) \in \mathbb{R}^n,\ t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\right.$$

$$\left. x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(\tau) \in \mathbf{\Gamma}(\tau),\ u(t) \in \mathbf{P}(t)\right\}.$$

Определение 4. Попятной областью достижимости фазовых состояний управляемой системы (1)–(4) на момент времени τ, соответствующей паре $\left(\vartheta, \mathbf{\Gamma}(\vartheta)\right) \in \overline{0, T-1} \times 2^{\mathbb{R}^n}$, называется множество, определяемое соотношением:

$$\mathbf{G}_-\left(\vartheta, \mathbf{\Gamma}(\vartheta); \tau\right) = \left\{x(\tau) \mid x(\tau) \in \mathbb{R}^n,\ t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\right.$$

$$\left. x(t) = A^{-1}(t)\left[x(t+1) - B(t)u(t)\right],\ x(\vartheta) \in \mathbf{\Gamma}(\vartheta),\ u(t) \in \mathbf{P}(t)\right\}.$$

Отметим, что попятная область достижимости может быть вычислена, поскольку по предположению 4 матрица $A(t)$ считается невырожденной для всех $t \in \overline{0, T-1}$. Отметим также, что в силу принятых предположений 1–3 прямые и попятные множества достижимости $\mathbf{G}_+\left(\tau, \mathbf{\Gamma}(\tau); \vartheta\right)$ и $\mathbf{G}_-\left(\vartheta, \mathbf{\Gamma}(\vartheta); \tau\right)$ являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными многогранниками для всех $t \in \overline{0, T-1}$.

Применяемый в данной работе общий алгебраический рекуррентный метод построения областей достижимости [5] использует рекуррентное (полугрупповое) свойство областей достижимости:

$$\mathbf{G}\left(0, \mathbf{\Gamma}(0); t+1\right) = \mathbf{G}\left(t, \mathbf{\Gamma}(t); t+1\right),$$

где $\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{G}\left(0, \mathbf{\Gamma}(0); t\right), \forall t \in \overline{1, T-1}$. Из данного свойства необходимо следует рекуррентная конструкция алгоритма, состоящая в решении последовательности одношаговых задач по вычислению областей достижимости.

Каждая область достижимости, являющаяся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$, может быть представлена двумя способами [1, 16–18]: как множество решений системы линейных неравенств и как выпуклая оболочка системы векторов.

Определение 5. Система из $m \in \mathbb{N}$ линейных неравенств, определяющая многогранник $P \in \mathbb{R}^n$, называется его фасетным описанием:

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geqslant b\right\},\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Определение 6. Множество из $k \in \mathbb{N}$ крайних точек, определяемых набором векторов $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,k}$, выпуклая оболочка которых является многогранником $P \in \mathbb{R}^n$, называется вершинным описанием этого многогранника:

$$P = \operatorname{conv}\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right),\ v_i \in \mathbb{R}^n,\ i=\overline{1,k}. \tag{8}$$

Далее рассмотрим алгоритм решения Задачи 1 (оптимального программного терминального управления), использующий аппарат построения и анализа областей достижимости.

3. Оптимизация программного терминального управления

Используя введенные определения и результаты работ [1, 5], можно показать, что решение сформулированной Задачи 1 оптимального программного терминального управления линейной дискретной динамической системой можно свести к решению следующей последовательности подзадач:

1) построение последовательности прямых областей достижимости $\mathbf{G}_+\left(0, x(0); t\right)$, $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, $x(0) \in \mathbf{X}(0)$ (решается с помощью общего алгебраического рекуррентного алгоритма [5]);

2) оптимизация выпуклого функционала (5) на множестве $\mathbf{G}_+\left(0, x(0); T\right)$, то есть определение множества $\mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}\left(T\right) \subset \mathbb{R}^n$ финальных фазовых состояний системы (1)–(4) из решения следующей задачи выпуклого математического программирования:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}\left(T\right) = \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}\left(0, x(0); T\right) = \Bigg\{ x^{(e)}(T) \ \ | \ \ x^{(e)}(T) \in \mathbf{G}_+\left(0, x(0); T\right),$$

$$\mathbf{\Phi}^{(e)} = \mathbf{\Phi}\left(x^{(e)}(T)\right) = \left\| c, \left(x^{(e)}(T) - x_d\right)\right\|_2 = \min_{x(T) \in \mathbf{G}_+\left(0, x(0); T\right)} \left\| c, \left(x^{(e)}(T) - x_d\right)\right\|_2 \Bigg\}$$

(решается, например, с помощью метода Зойтендейка [19]);

3) построение последовательности попятных областей достижимости $\mathbf{G}_-\left(T, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}\left(T\right); t\right)$, $t \in \{T-1, T-2, \ldots, 0\}$ (решается с помощью общего алгебраического рекуррентного алгоритма [5]);

4) построение следующей последовательности множеств:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T); t\right) = \mathbf{G}_+\left(0, x(0); t\right) \cap \mathbf{G}_-\left(T, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T); t\right),\ t \in \overline{1, T-1},$$

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T); 0\right) = \{x(0)\},\ \widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T); T\right) = \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)$$

(решается с помощью модификации общего алгебраического рекуррентного метода [1]);

5) нахождение множества пар (6), то есть определение следующего множества оптимальных программных управлений:

$$\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{0,T}, x(0), \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)\right) = \Big\{ u^{(e)}(\cdot) \,|\, \forall t \in \overline{0, T-1}, u^{(e)}(t) \in \mathbf{P}(t),$$

$$x^{(e)}(t+1) = A(t)x^{(e)}(t) + B(t)u^{(e)}(t) \in \widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T); t+1\right), x^{(e)}(0) \in \mathbf{X}(0) \Big\}$$

(сводится к решению задачи линейного программирования [20]).

Из результатов работ [1, 5] следует, что множество допустимых программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{0,T}, x(0), \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)\right)$ является множеством всех допустимых программных управлений, решающих Задачу 1.

Замечание. Для решения задачи перехода от вершинного описания области достижимости к фасетному описанию и наоборот мы используем, в соответствии с [1], вычислительную схему Н.В. Черниковой, предложенную в работе [21].

В таблицу сведено применение двух видов описания областей достижимости в зависимости от конкретной задачи.

Применение видов описания областей достижимости

Операция	Описание	№ подзадачи
Линейное преобразование	Вершинное	1, 3
Сумма Минковского	Вершинное	1, 3
Выпуклая оболочка множества	Вершинное	1, 3
Пересечение множеств	Фасетное	1, 3, 4
Поиск экстремума на множестве	Фасетное	2
Поиск множества управлений	Вершинное	5

Продемонстрируем эффективность предложенной схемы решения задачи оптимального программного терминального управления линейной дискретной динамической системой на численном примере.

4. Численный пример

Рассмотрим задачу терминального управления расходованием топлива третьей ступени ракеты-носителя. Система векторно-матричных линейных рекуррентных соотношений, описывающая динамику системы имеет вид:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in \overline{0,9},$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^4$, $x_1(t)$ – массовый расход окислителя, $x_2(t)$ – масса окислителя в баке, $x_3(t)$ – массовый расход горючего, $x_4(t)$ – масса горючего в баке; $u(t) \in [-1; 1]$ – допустимое управляющее воздействие; $x(0) = (25{,}14 \quad 247 \quad 19{,}915 \quad 199{,}92)^T$ – начальное фазовое состояние; $x_1(t) \in [24{,}167; 25{,}833]$, $x_3(t) \in [19{,}33; 20{,}66]$ – условия безотказной работы двигательной установки ракеты-носителя; матрицы $A(t)$ и $B(t)$ равны:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 5/12 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \forall t \in \overline{0,9}.$$

Качество работы системы оценивается значением выпуклого терминального функционала в финальный момент времени $T = 10$:

$$\mathbf{\Phi}(T) = \left(25 - x_1(T)\right)^2 + x_2(T)^2 + \left(20 - x_3(T)\right)^2 + x_4(T)^2 + \left(x_2(T) - x_4(T)\right)^2,$$

в котором первое и третье слагаемые отражают отклонение расходов окислителя и горючего от своих расчетных значений в финальный момент времени; второе и четвертое слагаемые отражают величину полного израсходования рабочих запасов окислителя и горючего в финальный момент времени; пятое слагаемое отражает величину несинхронности расходования компонентов топлива.

Подробное формирование математической модели объекта изложено в работе [8], здесь же мы ограничились некоторыми масштабированными значениями основных параметров, что позволяет лучше визуально воспринимать результаты работы предлагаемой общей схемы решения задачи оптимального программного управления, не умаляя при этом ее сложности.

На рис. 1 изображены проекции прямых областей достижимости, попятных областей достижимости, а также их пересечений из пространства $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^2$ (в координатные плоскости x_1x_2 и x_3x_4, соответственно). Минимальное значение функционала $\mathbf{\Phi}(T) = 4{,}6608$ на финальном множестве достижимости $\mathbf{G}_+\left(0, x(0); T\right)$ достигается в точке $\mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}\left(T\right) = (25{,}013 \quad -1{,}4669 \quad 20{,}016 \quad -1{,}5798)^T$.

На рис. 2 изображен пучок траекторий $\tilde{x}\left(\cdot; 0, x(0); u_*(\cdot)\right)$, проходящих через вершины пересечений прямых и попятных областей достижимости. Управления $u_*(\cdot)$, порождающие эти траектории, являются оптимальными с точки зрения функционала $\mathbf{\Phi}(T)$.

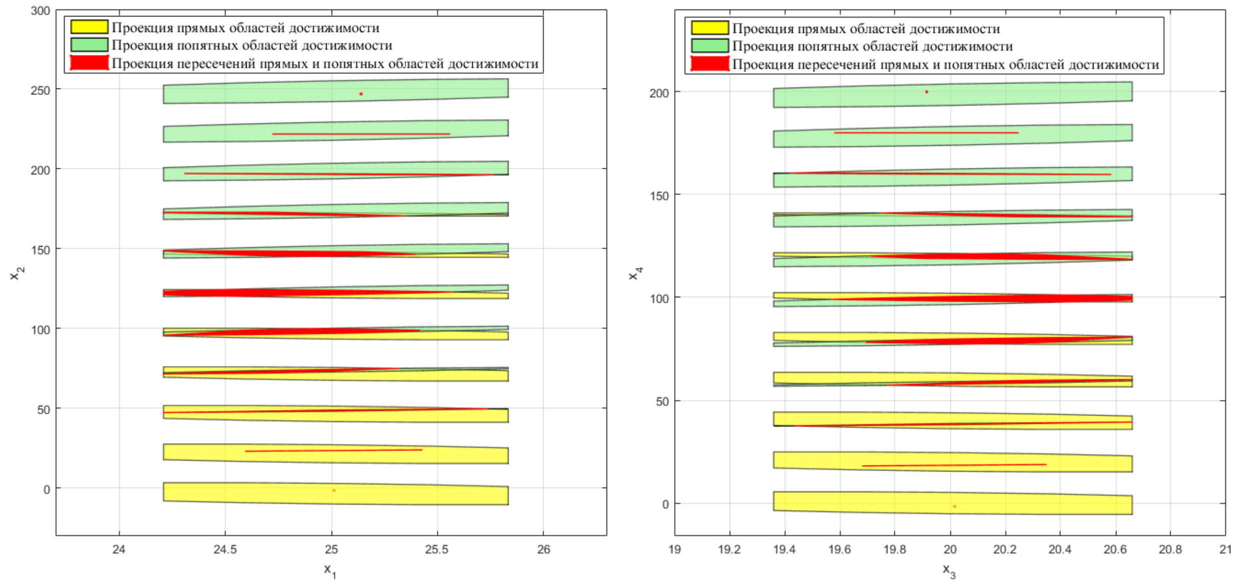

Рис. 1. Проекции областей достижимости системы

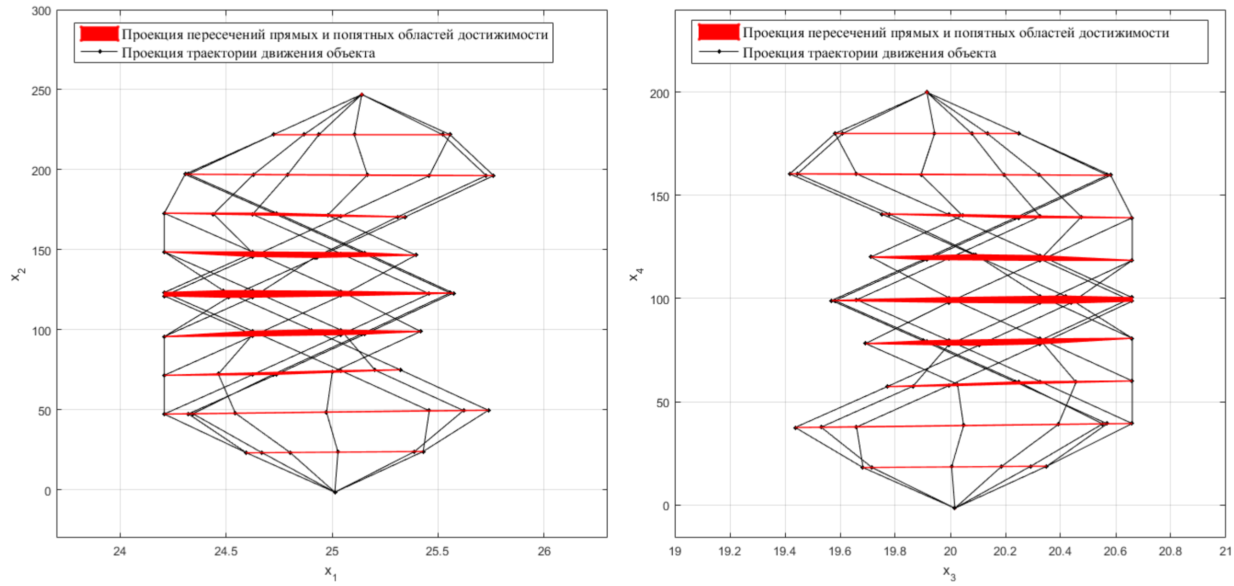

Рис. 2. Оптимальное движение системы

Необходимо отметить, что линейная комбинация управлений, порождающих траектории $\tilde{x}\left(\cdot;0,x(0);u_*(\cdot)\right)$, будет также являться оптимальным, с точки зрения функционала $\Phi(T)$, управлением.

Заключение

В работе описан метод решения задачи оптимального терминального программного управления линейной дискретной динамической системой. Теоретические результаты работ [1, 5] послужили основой для разработки изложенного здесь метода.

Однако следует отметить относительную сложность предложенного алгоритма, связанную с применением общего рекуррентного алгебраического метода [5] построения точных областей достижимости. Построение точных областей достижимости ведет, как правило, к значительному увеличению количества вершин, описывающих область достижимости, что накладывает определенные ограничения на размерность динамических систем и отрезок времени, на котором решается задача управления.

С другой стороны, предложенный алгоритм может быть реализован с использованием параллельных вычислений, а точное описание областей достижимости может быть заменено их полиэдральной аппроксимацией. С помощью вышеуказанного может оказаться возможным использование предложенного алгоритма в режиме реального времени.

Дальнейшее исследование будет направлено на решение задачи оптимального позиционного управления движением сложного механического объекта.

Литература

1. Шориков, А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах / А.Ф. Шориков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1997. – 242 с.

2. Ширяев, В.И. Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, Е.О. Подивилова // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 7. – С. 10–16.

3. Ширяев, В.И. О решении задач позиционного управления в условиях неполной информации / В.И. Ширяев // Системы автоматизации в образовании, науке и производстве: тр. IX Всерос. науч.-практ. конф. – Новокузнецк: Изд-во СибГИУ, 2013. – С. 85–90.

4. Красовский, Н.Н. Теория управления движением (линейные системы) / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

5. Тюлюкин, В.А. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной динамической системы / В.А. Тюлюкин, А.Ф. Шориков // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 4. – С. 115–127.

6. Булаев, В.В. Математическая формализация задачи оптимальной стабилизации упругого механического объекта / В.В. Булаев, А.Ф. Шориков // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 8-2. – С. 15–18.

7. Горанов, А.Ю. Формирование линейной динамической модели летательного аппарата / А.Ю. Горанов, А.Ф. Шориков // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 8-2. – С. 22–25.

8. Калёв, В.И. Моделирование задачи терминального управления расходом топлива жидкостных ракет / В.И. Калёв, А.Ф. Шориков // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 8-2. – С. 45–48.

9. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.

10. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

11. Guaranteeing safety for heavy duty vehicle platooning: Safe set computations and experimental evaluations / A. Alam, A. Gattami, K.H. Johansson, C.J. Tomlin // Control Engineering Practice. – 2014. – Vol. 24. – P. 33–41. DOI: 10.1016/j.conengprac.2013.11.003

12. Kostousova, E.K. Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations / E.K. Kostousova // Optimization Methods and Software. – 2001. – Vol. 14. – P. 267–310. DOI: 10.1080/10556780108805805

13. Kurzhanski, A.B. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control / A.B. Kurzhanski, I. Valyi. – Birkhäuser, Boston, 1997. – 320 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0277-6

14. Kurzhanski, A.B. On ellipsoidal techniques for reachability analysis / A.B. Kurzhanski, P. Varaiya // Optimization Methods and Software. – 2002. – Vol. 17. – P. 177–207. DOI: 10.1080/1055678021000012426

15. Kurzhanskiy, A.A. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances / A.A. Kurzhanskiy, P. Varaiya // Automatica. – 2011. – No. 47. – P. 1414–1426. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.02.009

16. Бастраков, С.И. Удаление неравенств из фасетного описания многогранника / С.И. Бастраков, Н.Ю. Золотых // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 37–45.

17. Циглер, Г. Теория многогранников / Г. Циглер. – М.: МЦНМО, 2014. – 586 с.

18. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

19. Зойтендейк, Г. Методы возможных направлений / Г. Зойтендейк. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 176 с.

20. Юдин, Д.Б. Линейное программирование (теория, методы и приложения) / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

21. Черникова, Н.В. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений / Н.В. Черникова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1964. – Т. 4, № 4. – С. 733–738.

Булаев Владимир Владимирович, инженер-конструктор, АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова»; аспирант кафедры прикладной математики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; bulaev1991@mail.ru.

Горанов Александр Юрьевич, инженер-конструктор, АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова»; аспирант кафедры прикладной математики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; goranovayu@mail.ru.

Калёв Виталий Игоревич, инженер-конструктор, АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова»; аспирант кафедры прикладной математики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; v.i.kalev@urfu.ru.

Поступила в редакцию 27 июня 2017 г.

DOI: 10.14529/ctcr170403

THE OPTIMAL OPEN-LOOP CONTROL CONSTRUCTION OF COMPLEX MECHANICAL PLANTS MOTION

V.V. Bulaev, *bulaev1991@mail.ru,*
A.Yu. Goranov, *goranovayu@mail.ru,*
V.I. Kalev, *v.i.kalev@urfu.ru*
JSC "Scientific and Production Association of automatics named after academician N.A. Semikhatov", Ekaterinburg, Russian Federation,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation

This paper considers the method of open-loop control set construction for complex mechanical plant, which is described by linear discrete-time dynamical system of recurrent vector-matrix equation. It is assumed that state and control vectors are bounded by certain convex compact sets at any time step. To solve the main problem the instrument of linear discrete-time system reachable set construction and analysis is used.

Keywords: optimal open-loop control, terminal quality functional, linear discrete-time dynamical system, reachable set.

References

1. Shorikov A.F. *Minimaksnoe otsenivanie I upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* [Minimax Estimation and Control in Discrete-Time Dynamical Systems]. Ekaterinburg, Ural State University Publ., 1997. 242 p.

2. Shiryaev V.I., Podivilova E.O. [Feasible Set Approximation in Dynamic System State Guaranteed Estimation Problem under Condition of Uncertainty]. *Mechatronics, Automation, Control*, 2014. no. 7, pp.10–16. (in Russ.)

3. Shiryaev V.I. [On the Solving of Closed-Loop Control Problems under Condition of Uncertainty]. *Sistemy avtomatizatsii v obrazovanii, nauke i proizvodstve: Trudy IX Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Systems of Automation in Education, Science and Production: Proc. of IX All-Russian Scientific and Practical Conference]. Novokuznetsk, 2013, pp. 85–90. (in Russ.)

4. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem (Lineynie sistemi)* [Theory of Control of Motion (Linear Systems)]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p.

5. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. [The Solution Algorithm of Terminal Control Problem for Linear Discrete-Time System]. *Automatics and Telemechanics*, 1993, no. 4, pp. 115–127. (in Russ.)

6. Bulaev V.V., Shorikov A.F. [Mathematical Formalization of Optimal Stabilization Problem Formulation of the Flexible Mechanical Plant]. *Russian Physics Journal*, 2016, vol. 59, no. 8-2, pp. 15–18. (in Russ.)

7. Goranov A.Y., Shorikov A.F. [Formation of Aircraft Linear Dynamical Model]. *Russian Physics Journal*, 2016. vol. 59, no. 8-2, pp. 22–25. (in Russ.)

8. Kalev V.I., Shorikov A.F. [Fuel Consumption Terminal Control Problem Statement For Liquid-Propellant Rockets]. *Russian Physics Journal*, 2016. vol. 59, no. 8-2, pp. 45–48. (in Russ.)

9. Bryson A.E., Yu-Chi Ho. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* [Applied Optimal Control]. Moscow. Mir Publ., 1972. 544 p.

10. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnie differencial'nie igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p.

11. Alam A., Gattami A., Johansson K.H., Tomlin C.J. Guaranteeing Safety for Heavy Duty Vehicle Platooning: Safe Set Computations and Experimental Evaluations. *Control Engineering Practice*, 2014. vol. 24. pp. 33–41. DOI: 10.1016/j.conengprac.2013.11.003

12. Kostousova E.K. Control Synthesis via Parallelotopes: Optimization and Parallel Computations. *Optimization Methods and Software*, 2001. vol. 14. pp. 267–310. DOI: 10.1080/10556780108805805

13. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. *Birkhäuser*, Boston, 1997. 320 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0277-6

14. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. *Optimization Methods and Software*, 2002, vol. 17, pp. 177–207. DOI: 10.1080/1055678021000012426

15. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach Set Computation and Control Synthesis for Discrete-Time Dynamical Systems with Disturbances. *Automatica*, 2011. no. 47. pp. 1414–1426. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.02.009

16. Bastrakov S.I., Zolotykh N.Yu. [Elimination of Inequalities from a Facet Description of a Polyhedron]. *Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2015, vol. 21, no. 3. pp. 37–45. (in Russ.)

17. Ziegler G.M. *Teoriya mnogogrannikov* [Lectures on Polytopes]. Moscow, 2014. 586 p.

18. Chernikov S.N. *Lineynie neravenstva* [Linear Inequalities]. Moscow. Nauka Publ., 1968. 488 p.

19. Zoutendijk, G. *Metody vozmojnykh napravleniy* [Methods of Feasible Directions]. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1963. 176 p.

20. Yudin D.B., Golshtein E.G. *Lineynoe programmirovanie (teoriya, metody i prilozheniya)* [Linear Programming (Theory, Methods and Applications)]. Moscow. Nauka Publ., 1969. 424 p.

21. Chernikova N.V. [Algorithm for Finding a General Formula for the Non-Negative Solutions of a System of Linear Equations]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, no. 4, pp. 733–738. (in Russ.)

Received 27 June 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Булаев, В.В. Построение оптимального программного управления движением сложных механических объектов / В.В. Булаев, А.Ю. Горанов, В.И. Калёв // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 20–28. DOI: 10.14529/ctcr170403

FOR CITATION

Bulaev V.V., Goranov A.Yu., Kalev V.I. The Optimal Open-Loop Control Construction of Complex Mechanical Plants Motion. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 20–28. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr170403