

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИУСА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

**Б.М. Суховилов**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия*

Разработаны теоретические положения метода парных расстояний применительно к определению радиуса сферической поверхности. Для реализации метода на исследуемых поверхностях размещают реперные точки и измеряют между ними линейные расстояния.

Представлена реализация метода для определения радиуса сферической поверхности по расстояниям, измеренным между 4 расположенными на поверхности точками. Указанное количество точек является минимально необходимым для решения задачи.

Получено аналитическое выражение радиуса сферической поверхности через расстояния между парами точек. Вычислено среднеквадратическое отклонение погрешности оценки радиуса, вызванное погрешностями измерения расстояний. Определены оптимальные конфигурации 4 точек на сфере, обеспечивающие минимальную дисперсию оценки радиуса. Для этих оптимальных конфигураций противолежащие ребра тетраэдров, образуемых соответствующими точками, равны между собой.

Метод нашел приложение в комплексе работ по оценке параметров юстировки телевизионной системы измерения углового положения динамического стенда с газовой опорой, оснащенного реперами-излучателями, размещенными вдоль огибающей сферической поверхности. Определение радиуса такой сферической поверхности осложняется тем, что она является прерывистой, охватывает часть, которая меньше половины сферы, отсутствует доступ к центру сферы, которым является центр вращения шаровой опоры динамического стенда. Известные косвенные методы определения радиуса сферической поверхности, основанные на результатах линейных или угловых измерений с помощью специальных накладных измерительных устройств, базирующихся при измерениях непосредственно на поверхности, радиус кривизны которой определяется, также оказываются неприемлемыми из-за отсутствия в данном случае установочной измерительной базы для накладного измерительного прибора. Метод позволяет исключить применение дорогостоящих координатно-измерительных машин для получения оценки радиуса, так как для измерения парных расстояний можно использовать простой серийный измерительный инструмент.

*Ключевые слова: сферическая поверхность, определение радиуса методом парных расстояний, оценка погрешностей, оптимальное расположение точек на сфере.*

### Введение

Сферические поверхности широко используются в различных областях общего и специального машиностроения. Например, в комплексе работ по оценке параметров юстировки телевизионной системы измерения углового положения (ТСИУП) динамического стенда (ДС) с газовой опорой важное место занимает вопрос определения радиуса сферической поверхности, огибающей центры диафрагм реперов-излучателей (РИ) [1–4]. РИ размещают на сфере с центром, совпадающим с центром вращения ДС, для исключения неопределенности положения РИ вдоль оси визирования ТСИУП. Выставка координат центров диафрагм РИ на сферической поверхности осуществляется при их сборке и установке на специальной платформе, крепящейся на шаровой опоре ДС. При этом множество центров диафрагм РИ образует прерывистую сферическую поверхность, в общем случае имеющую отклонения от формы сферы из-за ошибок выставки.

Определение радиуса такой сферической поверхности осложняется в данном случае тем, что она является прерывистой, охватывает часть, которая меньше половины сферы, отсутствует доступ к центру сферы, которым является центр вращения шаровой опоры ДС, радиус сферы порядка 1500 мм. Это практически исключает возможность прямых измерений радиуса сферы.

Известные косвенные методы определения радиуса сферической поверхности, основанные на результатах линейных или угловых измерений с помощью специальных накладных измерительных устройств, базирующихся при измерениях непосредственно на поверхности, радиус

кривизны которой определяется, также оказываются неприемлемыми из-за отсутствия в данном случае установочной измерительной базы для накладного измерительного прибора. Необходимо отметить, что подобные ограничения часто возникают на практике при косвенных измерениях геометрических параметров цилиндрических, параболических и других типов поверхностей [5, 6].

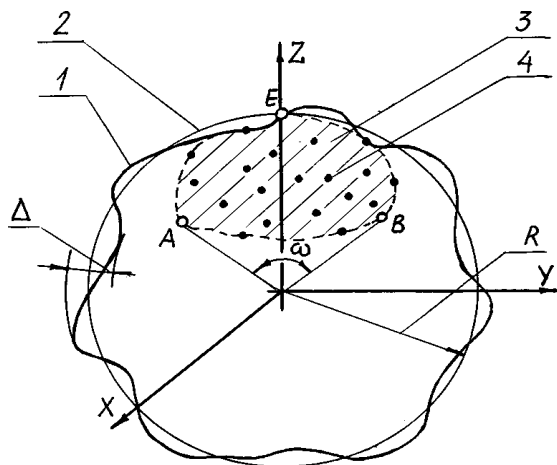
Известны методы получения геометрических параметров поверхностей, основанные на измерении пространственных координат точек, расположенных на этих поверхностях [7–9]. Для их реализации необходимы дорогостоящие системы измерения, такие как координатно-измерительные машины [10, 11] или лазерные трекеры [12].

Снизить затраты и выполнить оценку радиуса сферической поверхности предлагается на основе разработанного автором метода, использующего измерения расстояний между парами точек, принадлежащих поверхности [13, 14]. Метод позволяет исключить применение дорогостоящих координатно-измерительных машин для получения оценки радиуса, так как для измерения парных расстояний можно использовать простой серийный измерительный инструмент.

В следующих разделах получено аналитическое выражение радиуса сферической поверхности через расстояния между парами точек. Вычислено среднеквадратическое отклонение погрешности оценки радиуса, вызванное погрешностями измерения расстояний. Определены оптимальные конфигурации 4 точек на сфере, обеспечивающие минимальную дисперсию оценки радиуса.

### 1. Метод парных расстояний в задаче оценивания радиуса сферической поверхности

Представим сферу, огибающую центры диафрагм РИ, в виде крупногабаритной, хаотически прерывистой сферической поверхности, имеющей случайные отклонения от формы, и аппроксимируем ее средней сферической поверхностью (см. рисунок).



Сферическая поверхность, огибающая РИ ДС:  
 1 – сферическая поверхность, огибающая РИ;  
 2 – аппроксимирующая сферическая поверхность;  
 3 – измеряемая сферическая поверхность, огибающая РИ;  
 4 – центры диафрагм РИ;  
 A, B, E – центры реперов, лежащих на границе измеряемой поверхности; ω – центральный угол, определяющий охват измеряемой поверхности

Выразим радиус аппроксимирующей сферы через линейные измерения парных расстояний между точками, расположенными на этой сферической поверхности.

Зафиксируем на участках сферической поверхности  $N$  точек так, чтобы, по крайней мере, четыре из них не лежали в одной плоскости. Пусть погрешность измерения парных расстояний между указанными точками и отклонения от формы сферы настолько малы, что ими можно пренебречь. Совместим центр сферической поверхности радиусом  $R$  с началом системы координат  $XYZO$  (см. рисунок).

Расстояние  $S_{ij}$  между точками  $i$  и  $j$  с координатами  $x_i, y_i, z_i$  и  $x_j, y_j, z_j$ , расположенными на сферической поверхности, составит

$$S_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} . \tag{1}$$

С учетом того, что  $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 = R^2$ , запишем (1) в виде

$$R^2 - (x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) = \frac{1}{2} S_{ij}^2 . \tag{2}$$

## Краткие сообщения

Рассматривая все возможные парные расстояния между  $N$  точками, запишем (2) в матричной форме

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{R}_N^2 - \mathbf{S}_N^2, \quad (3)$$

где  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{R}_N^2 = \begin{bmatrix} R^2 & R^2 & \dots & R^2 \\ R^2 & R^2 & \dots & R^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R^2 & R^2 & \dots & R^2 \end{bmatrix}$  – матрица, размером  $N \times N$ ;

$$\mathbf{S}_N^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & \dots & S_{1N}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & \dots & S_{2N}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N1}^2 & S_{N2}^2 & S_{N3}^2 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ – симметричная матрица, размером } N \times N.$$

Для ранга матрицы  $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$  имеют место неравенства Сильвестра [15]

$$\text{rank}(\mathbf{a}^T) + \text{rank}(\mathbf{a}) - 3 \leq \text{rank}(\mathbf{a}^T \mathbf{a}) \leq \left[ \min(\text{rank}(\mathbf{a}^T), \text{rank}(\mathbf{a})) \right]. \quad (4)$$

Из неравенства (4) с учетом того, что хотя бы четыре точки из  $N$  не лежат в одной плоскости, следует, что  $\text{rank}(\mathbf{a}^T \mathbf{a}) = 3$  и все миноры матрицы  $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$  выше третьего порядка равны нулю. Это свойство матрицы  $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$  можно использовать для нахождения радиуса  $R$ .

Пусть зафиксированные на сферической поверхности точки пронумерованы таким образом, что первые четыре из них не лежат в одной плоскости.

Запишем минор четвертого порядка, образованный первыми четырьмя столбцами и строками матрицы  $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$ , и приравняем его к нулю

$$\det \begin{bmatrix} R^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{12}^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{13}^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{14}^2 \\ R^2 - 0,5 \cdot S_{21}^2 & R^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{23}^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{24}^2 \\ R^2 - 0,5 \cdot S_{31}^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{32}^2 & R^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{34}^2 \\ R^2 - 0,5 \cdot S_{41}^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{42}^2 & R^2 - 0,5 \cdot S_{43}^2 & R^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (5)$$

где  $\det$  – знак детерминанта матрицы.

Используя свойства детерминантов [15], преобразуем (5) к виду

$$2R^2 \left( \det \begin{bmatrix} 1 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ 1 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ 1 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2 \\ 1 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 1 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & 1 & 0 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & 1 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \det \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & 1 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & 1 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 1 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & 1 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & 1 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & 1 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Разделив левую и правую части равенства (6) на неравный нулю детерминант, стоящий в правой части (6) (детерминант обращается в нуль только тогда, когда рассматриваемые четыре точки лежат в одной плоскости), получаем, что величина, обратная  $R^2$ , есть сумма решений  $x_1, x_2, x_3, x_4$  системы линейных уравнений вида

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Вводя обозначения:

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_4^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & S_{14}^2 \\ S_{21}^2 & 0 & S_{23}^2 & S_{24}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & 0 & S_{34}^2 \\ S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

получаем формулу для расчета радиуса  $R$  сферической поверхности без учета погрешностей измерения парных расстояний

$$R = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mathbf{b}}^T (\mathbf{S}_4^2)^{-1} \bar{\mathbf{b}}}}, \quad (9)$$

где  $(\mathbf{S}_4^2)^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $\mathbf{S}_4^2$ .

## 2. Анализ погрешности оценки радиуса сферы

При измерении парных расстояний с погрешностями, имеющими нулевое среднее и дисперсию  $\sigma_s^2$ , оценка  $R^*$  радиуса сферы составит

$$R^* = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mathbf{b}}^T (\mathbf{C}_4^2)^{-1} \bar{\mathbf{b}}}}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{C}_4^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & C_{12}^2 & C_{13}^2 & C_{14}^2 \\ C_{21}^2 & 0 & C_{23}^2 & C_{24}^2 \\ C_{31}^2 & C_{32}^2 & 0 & C_{34}^2 \\ C_{41}^2 & C_{42}^2 & C_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}$  – матрица половин квадратов парных расстояний, измеренных

с погрешностями.

Матрицы истинных  $\mathbf{S}_4$  и измеренных  $\mathbf{C}_4$  парных расстояний связаны соотношением:  $\mathbf{C}_4 = \mathbf{S}_4 + \mathbf{d}_4$ , где  $\mathbf{d}_4$  – матрица погрешностей измерения парных расстояний. Матрицы квадратов расстояний  $\mathbf{S}_4^2$  и  $\mathbf{C}_4^2$  связаны соотношением  $\mathbf{C}_4^2 = \mathbf{S}_4^2 + \mathbf{E}_4$ , где  $\mathbf{E}_4$  – матрица половин погрешностей измерения квадратов парных расстояний. Элементы  $\mathbf{E}_4$  с точностью до малых второго порядка равны

$$E_{ij} = d_{ij} C_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, 4). \quad (11)$$

Пусть  $\bar{\mathbf{x}}$  – вектор решений системы

$$\mathbf{S}_4^2 \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}, \quad (12)$$

а  $\bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \bar{\mathbf{x}}$  – вектор решений системы

$$\mathbf{C}_4^2 \bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{b}}, \quad (13)$$

где  $\Delta \bar{\mathbf{x}}$  – вектор погрешностей решения, присутствующий из-за погрешностей измерения парных расстояний.

Вычитая (12) из (13), получаем с точностью до малых величин второго порядка

$$\mathbf{E}_4 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_4^2 \Delta \bar{\mathbf{x}} = 0, \quad (14)$$

или

$$\mathbf{E}_4(\bar{\mathbf{x}}^* - \Delta\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}_4^2 \Delta\bar{\mathbf{x}} = 0. \quad (15)$$

Пренебрегая в (15) малыми второго порядка, получаем вектор погрешностей решения системы (13) в виде

$$\Delta\bar{\mathbf{x}} = -(\mathbf{C}_4^2)^{-1} \mathbf{E}_4 \bar{\mathbf{x}}^*. \quad (16)$$

Умножая обе части равенства (16) слева на  $\bar{\mathbf{b}}^{-\text{T}}$ , получаем значение погрешности величины  $\frac{1}{R^{*2}}$

$$\bar{\mathbf{b}}^{\text{T}} \Delta\bar{\mathbf{x}} = -\bar{\mathbf{b}}^{\text{T}} (\mathbf{C}_4^2)^{-1} \mathbf{E}_4 \bar{\mathbf{x}}^* = -\bar{\mathbf{x}}^{*\text{T}} \mathbf{E}_4 \bar{\mathbf{x}}^*. \quad (17)$$

Дисперсия  $D$  величины  $\frac{1}{R^{*2}}$  будет равна

$$D = \text{M} \left[ \left( \bar{\mathbf{b}}^{\text{T}} \Delta\bar{\mathbf{x}} \right)^2 \right] = \text{M} \left[ \left( \bar{\mathbf{x}}^{*\text{T}} \mathbf{E}_4 \bar{\mathbf{x}}^* \right)^2 \right], \quad (18)$$

где  $\text{M}[\cdot]$  – оператор математического ожидания. Подставляя в (18) значения элементов матрицы  $\mathbf{E}_4$  из формулы (11) и выполняя операцию взятия математического ожидания, определим значение дисперсии

$$D = 4\sigma_s^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 C_{ij}^2 x_i^{*2} x_j^{*2}, \quad (19)$$

где  $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$  – решения системы (13).

Среднеквадратическое отклонение (СКО)  $\sigma_R$  погрешности оценки  $R^*$  в соответствии с (10) и (19) будет равно

$$\sigma_R = \frac{1}{2} (R^*)^3 \sqrt{D}. \quad (20)$$

### 3. Определение оптимальных конфигураций точек, минимизирующих дисперсию оценки радиуса сферы

Как следует из (19), дисперсия  $D$  зависит от погрешности измерения парных расстояний и от взаимного расположения четырех точек на сфере, образующих тетраэдр. Парные расстояния  $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{24}, C_{34}$  являются его ребрами. Поэтому уменьшить дисперсию  $D$  и, соответственно, СКО оценки радиуса сферы  $\sigma_R$  можно путем оптимального расположения на сфере четырех точек при постоянстве дисперсии погрешности измерения парных расстояний.

Для определения парных расстояний, обеспечивающих минимум дисперсии  $D$ , необходимо минимизировать функционал

$$D = 4\sigma_s^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 C_{ij}^2 x_i^{*2} x_j^{*2} \rightarrow \min \quad (21)$$

при наличии ограничений:

$$\mathbf{C}_4^2 \bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{b}}; \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{b}}^{\text{T}} \bar{\mathbf{x}}^* = \frac{1}{R^2}. \quad (23)$$

В совокупности выражения (21)–(23) представляют задачу поиска условного экстремума. В результате решения задачи методом неопределенных множителей Лагранжа установлено, что глобальный минимум

$$D_0 = \frac{1}{R^6} \cdot \frac{\sigma_s^2}{8} \quad (24)$$

дисперсии  $D$  достигается, когда матрица измеренных парных расстояний  $\mathbf{C}_4$  имеет вид

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & b & \ell \\ a & 0 & \ell & b \\ b & \ell & 0 & a \\ \ell & b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где  $a = C_{12} = C_{34}$  – расстояние между фиксируемыми на сфере точками 1, 2 и 3, 4;  $b = C_{13} = C_{24}$  – расстояние между фиксируемыми на сфере точками 1, 3 и 2, 4;  $\ell = C_{23} = C_{14}$  – расстояние между фиксируемыми на сфере точками 2, 3 и 1, 4. При этом вектор решения системы (13) –  $\bar{x}^*$  имеет равные между собой компоненты, являющиеся одновременно компонентами собственного вектора матрицы  $C_4^2$ , соответствующего собственному значению  $NR^2$ , при  $N = 4$ . Для этих оптимальных конфигураций расположения точек на сфере противолежащие ребра тетраэдров, образуемых соответствующими точками, равны между собой.

### Заключение

Разработан метод определения радиуса сферической поверхности по расстояниям, измеренным между 4 расположенными на поверхности точками. Получено аналитическое выражение радиуса сферической поверхности через расстояния между парами точек. Вычислено среднеквадратическое отклонение погрешности оценки радиуса, вызванное погрешностями измерения расстояний. Определены оптимальные конфигурации 4 точек на сфере, обеспечивающие минимальную дисперсию оценки радиуса. Дальнейшее развитие метода будет направлено на повышение точности оценки радиуса за счет увеличения количества фиксируемых на сфере точек, что в практических приложениях вызывает необходимость учета отклонения измеряемой сферической поверхности от формы сферы.

### Литература

1. Катаргин, М.Ю. Измерение углов поворота твердого тела телевизионной системой на видеоконе / М.Ю. Катаргин, А.Г. Комириев, Р.А. Никитин // Тезисы докладов Всесоюзной конференции. – Томск : ТИАСУР, 1981. – С. 112–113.
2. Комплексный моделирующий стенд. – <http://www.makeyev.ru/activities/test-center/Kompleks4/> (дата обращения: 01.03.2018).
3. Ризос, И. Стенд на газовом сферическом подшипнике для испытания систем управления угловым положением ИСЗ / И. Ризос, Дж. Арбес, Дж. Рауль // Труды IV симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в пространстве. 1971. Управление в пространстве. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – С. 274–279.
4. Суховилов, Б.М. Использование метода парных расстояний для повышения точности измерения испытательных положений динамического стенда / Б.М. Суховилов // Сборник трудов XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий. Раздел «Итоги диссертационных исследований». – М.: РАН, 2006. – С. 73–82.
5. Рубинов, А.Д. Контроль больших размеров в машиностроении: справочник / А.Д. Рубинов. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд., 1982. – 120 с.
6. Герасименко, В.И. Обработка сферических поверхностей / В.И. Герасименко // Автомобильный транспорт. – 1981. – № 3. – С. 29.
7. Schneider, P.J. Geometric Tools for Computer Graphics (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics) / P.J. Schneider, D.H. Eberly. – 1st Edition. – 2002. – 1056 p.
8. Chernov, N. Least squares fitting of quadratic curves and surfaces / N. Chernov, H. Ma // Computer Vision / Editor S.R. Yoshida. – Nova Science Publishers, 2011. – P. 285–302.
9. Taubin, G. Estimation of Planar Curves, Surfaces and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations, with Applications to Edge and Range Image Segmentation / G. Taubin // IEEE Trans. PAMI. – 1991. – Vol. 13. – P. 1115–1138. DOI: 10.1109/34.103273
10. Координатные измерительные машины и их применение / А.А. Гапшиц, А.Ю. Каспарайтис, М.Б. Модестов и др. – М.: Машиностроение, 1988. – 102 с.
11. Зубарев, Ю.М. Автоматизация координатных измерений. учеб. пособие / Ю.М. Зубарев, С.В. Косаревский, Н.Н. Ревин. — СПб.: Изд-во ПИМаиш, 2011. – 160 с.

12. FARO Laser Tracker. – <https://www.faro.com/russia/products/faro-laser-tracker/> (дата обращения: 01.03.2018).

13. Суховилов, Б.М. Использование метода парных расстояний для оценки геометрических параметров поверхностей / Б.М. Суховилов // Сборник трудов XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий. Раздел «Итоги диссертационных исследований». – М.: РАН, 2006. – С. 61–72.

14. Суховилов, Б.М. Бесконтактный метод измерения парных расстояний / Б.М. Суховилов, Е.А. Григорова // Сборник трудов XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий. Раздел «Итоги диссертационных исследований». – М.: РАН, 2006. – С. 11–22.

15. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

**Суховилов Борис Максавич**, д-р техн. наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой информационных технологий в экономике, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, [sukhovilovbm@susu.ru](mailto:sukhovilovbm@susu.ru).

*Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.*

---

DOI: 10.14529/ctcr180217

## METHOD FOR DETERMINING THE RADIUS SPHERICAL SURFACE

**B.M. Sukhovilov**, [sukhovilovbm@susu.ru](mailto:sukhovilovbm@susu.ru)

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

The theoretical positions of the pairwise distance method have been developed as applied to the determination of the radius of a spherical surface. To implement the method, the reference points are placed on the investigated surfaces and linear distances are measured between them.

The implementation of the method for determining the radius of a spherical surface from distances measured between 4 points located on the surface is presented. The specified number of points is the minimum necessary to solve the problem.

An analytical expression is obtained for the radius of a spherical surface through the distances between pairs of points. The root-mean-square deviation of the error in the estimate of the radius caused by the errors in the measurement of distances is calculated. Optimal configurations of 4 points on the sphere are determined, which ensure the minimum dispersion of the estimate of the radius. For these optimal configurations, the opposite edges of tetrahedra formed by the corresponding points are equal to each other.

The method was applied in a complex of works on the evaluation of the parameters of the alignment of a television-based measurement system for the angular position of a dynamic stand with a gas spherical bearing, equipped with reference point sources placed along the envelope of the spherical surface. Determination of the radius of such a spherical surface is complicated by the fact that it is discontinuous, covers a part that is less than half the sphere, there is no access to the center of the sphere, which is the center of rotation spherical bearing of the dynamic stand. The known indirect methods for determining the radius of a spherical surface, based on the results of linear or angular measurements with the help of special surface measuring devices based on measurements directly on the surface, the radius of curvature of which is determined, also prove to be unacceptable due to the absence in this case installation measuring base for the measuring device. The method makes it possible to exclude the use of expensive coordinate measuring machines to obtain a radius estimate, since a simple measuring instrument can be used to measure the pairwise distances.

*Keywords: spherical surface, determination of the radius by the method of pairwise distances, error estimation, the optimal configurations of points on the sphere.*

## References

1. Katargin M.Yu., Komirev A.G., Nikitin R.A. [Measurement of the Rotation Angles of a Solid Body by a Television System on Vidicon]. *Theses of the Reports of the All-Union Conference*. Tomsk, 1981, pp. 112–113. (in Russ.)
2. *Kompleksnyy modeliruyushchiy stend* [Complex Modeling Stand]. Available at: <http://www.makeyev.ru/activities/test-center/Kompleks4/> (accessed 01.03.2018).
3. Rizos I., Arbes Dzh., Raul' Dzh. [The Stand on the Gas Spherical Bearing for Testing the Control Systems of the Angular Position of the Satellite]. *Proc. of IV IFAC Symposium on Automatic Control in Space, 1971. Control in Space*. Moscow, Nauka Publ., 1973, vol. 2, pp. 274–279. (in Russ.)
4. Sukhovilov B.M. [Using the Pairwise Distance Method to Improve the Accuracy of Measuring the Test Positions of the Dynamic Stand]. *Collection of Works of the XXVI Russian School on Problems of Science and Technology. Section "The Results of Dissertational Research"*, 2006. – pp. 73–82. (in Russ.)
5. Rubinov A.D. *Kontrol' bol'shikh razmerov v mashinostroenii: spravochnik* [Large-Scale Control in Mechanical Engineering: Reference Book]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1982. 120 p.
6. Gerasimenko V.I. [Processing of Spherical Surfaces]. *Automobile Transport*, 1981, no. 3, p. 29.
7. Philip J. Schneider, David H. Eberly. *Geometric Tools for Computer Graphics* (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics). *Morgan Kaufmann Publ.*, 2002. 1056 p.
8. Chernov N., Ma H. Least Squares Fitting of Quadratic Curves and Surfaces. *Computer Vision*, Nova Science Publ., 2011, pp. 285–302.
9. Taubin G. Estimation of Planar Curves, Surfaces and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations, with Applications to Edge and Range Image Segmentation. *IEEE Trans. PAMI*, 1991, vol. 13, pp. 1115–1138. DOI: 10.1109/34.103273
10. Gapshis A.A., Kasparaitis A.Yu., Modestov M.B. *Koordinatnye izmeritel'nye mashiny i ikh primeneniye* [Coordinate Measuring Machines and their Application]. Moscow, Mechanical Engineering Publ., 1988. 102 p.
11. Zubarev Yu.M., Kosarevskiy S.V., Revin N.N. *Avtomatizatsiya koordinatnykh izmereniy. Uchebnoe posobie* [Automation of Coordinate Measurements. Tutorial]. St. Petersburg, PIMash Publ., 2011. 160 p.
12. FARO Laser Tracker. Available at: <https://www.faro.com/russia/products/faro-laser-tracker/> (accessed 01.03.2018).
13. Sukhovilov B.M. [The Pairwise Distance Method for Estimating the Geometric Parameters of Surfaces]. *Collection of Works of the XXVI Russian School on Problems of Science and Technology, Section "The Results of Dissertational Research"*, 2006, pp. 61–72. (in Russ.)
14. Sukhovilov B.M., Grigorova E.A. [Non-Contact Method for Measuring Distances]. *Collection of Works of the XXVI Russian School on Problems of Science and Technology. Section "The Results of Dissertational Research"*, 2006, pp. 11–22. (in Russ.)
15. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 832 p.

Received 9 March 2018

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Суховилов, Б.М. Метод определения радиуса сферической поверхности / Б.М. Суховилов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 164–171. DOI: 10.14529/cter180217

## FOR CITATION

Sukhovilov B.M. Method for Determining the Radius Spherical Surface. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 164–171. (in Russ.) DOI: 10.14529/cter180217