Управление в технических системах

УДК 681.511 DOI: 10.14529/ctcr180305

АППРОКСИМАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Ф. Шориков[1], В.В. Булаев[2], А.Ю. Горанов[2], В.И. Калёв[2]

[1] Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия,
[2] АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург, Россия

Рассматривается задача построения и аппроксимации областей достижимости нелинейной дифференциальной управляемой динамической системы. В качестве объекта исследования в работе рассматривается класс систем, динамика которых описывается с помощью векторных нелинейных дифференциальных уравнений. В первой части работы производится последовательное преобразование исследуемой динамической системы, включающее в себя линеаризацию ее относительно наперед заданной опорной фазовой траектории и последующая дискретизация полученного в процессе линеаризации результата. Таким образом, исходной нелинейной модели объекта ставится в соответствие ее некоторая линейная дискретная аппроксимация. В работе предполагается, что в силу естественных причин фазовый вектор рассматриваемой динамической системы и управляющий параметр стеснены геометрическими ограничениями, которые имеют вид выпуклых, замкнутых и ограниченных многогранников с конечным числом вершин. Построение областей достижимости производится с помощью общего рекуррентного алгебраического метода и его модификации. В заключительной части работы эффективность данного алгоритма демонстрируется на примере модели, описывающей динамику относительного движения двух космических аппаратов (система уравнений Клохесси – Уилтшира) и модели, описывающей взаимодействие двух видов типа «хищник – жертва» (модель Лотки – Вольтерры). Для каждого из проведенных экспериментов приведены результаты компьютерного моделирования и сравнительный анализ точности полученной аппроксимации областей достижимости для конкретных нелинейных дифференциальных управляемых динамических систем с помощью областей достижимости соответствующих линейных дискретных управляемых динамических систем, которые были вычислены с помощью общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости и его модификации.

Ключевые слова: дифференциальные нелинейные управляемые динамические системы, аппроксимация областей достижимости, выпуклые многогранники, линейное математическое программирование, симплекс-метод.

Введение

В теории управления динамическими системами большое внимание уделяется проблеме построения или оценивания множеств возможных фазовых состояний управляемых динамических систем в различные моменты времени. Эти множества, называемые областями достижимости [1–4], играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. Точное или приближенное построение области достижимости нелинейной дифференциальной управляемой динамической системы позволяет оценить все ее допустимые фазовые состояния для заданного момента времени и существенно упрощает решение, например, задач оптимизации гарантированного (минимаксного) результата наблюдения или управления [см., например, 1–7]. При этом практическое построение областей достижимости нелинейных дифференциальных управляемых динамических систем большой размерности представляет собой весьма сложную задачу, поэтому особого внимания заслуживают эффективные методы их аппроксимации другими системами. В данной статье авторами предлагается методика аппроксимации областей достижимости исходной нелинейной дифференциальной управляемой динамической системы с помощью построения точной области достижимости соответствующей линейной дискретной управляемой динамической системы, сформированной путем линеаризации вдоль опорной траектории исходной нелинейной системы, на основе модификации общего рекуррентного алгебраического метода, подробно изложенного в работах [4, 8]. В данной работе предлагается вариант модификации общего рекуррентного алгебраического метода, который позволяет существенно сократить время вычислительного процесса, затрачиваемого на построение точных и аппроксимирующих областей достижимости линейных дискретных управляемых динамических систем. Полученные в данной статье результаты основываются на работах [4, 8–10] и могут быть использованы при компьютерном моделировании реальных динамических процессов, а также при разработке и создании систем оптимизации результатов управления и поддержки принятия управленческих решений для важных прикладных задач в технических, экономических, научных и др. системах.

1. Постановка задачи

Рассматривается класс объектов, динамика которых описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in [0, T_f], \tag{1}$$

где $x(t)$ – фазовый вектор объекта в момент времени t, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство вектор-столбцов); $u(t)$ – вектор управляющего воздействия (вектор управления) в момент времени t, $u(t) \in \mathbb{R}^p$; $f(t, x(t), u(t))$ – заданная нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая для всех $t \in (0, T_f)$ по $x(t)$ и $u(t)$.

Поскольку построение областей достижимости для нелинейных дифференциальных управляемых динамических систем вида (1) представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу, появляется необходимость в проведении дополнительных операций, которые позволяют преобразовать исходную нелинейную систему (1) к линейному виду, на основе осуществления процесса ее линеаризации относительно заданной опорной траектории этой системы [1, 9]. Такой процесс линеаризации нелинейной дифференциальной управляемой динамической системы вида (1) является хорошо изученным в литературе (см., например, [1, 9]). Поэтому в данной работе мы опускаем вопросы линеаризации, т. е. изначально предполагаем, что исходной нелинейной дифференциальной управляемой динамической системе вида (1) уже поставлена в соответствие ее некоторая линейная аппроксимация, например, с помощью процедур из [1, 9].

Линеаризованную модель, соответствующую системе (1), можно представить в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме Коши:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in [0, T_f], \tag{2}$$

где $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Следующим важным этапом преобразования исходной нелинейной дифференциальной управляемой динамической системы вида (1) является переход от ее дифференциальной линейной аппроксимации вида (2) к линейной дискретной многошаговой модели аналогично, например, методикам, изложенным в работе [1].

Тогда в качестве модели объекта будем рассматривать не исходную нелинейную дифференциальную управляемую динамическую систему (1), а соответствующую ей линейную дискретную управляемую многошаговую аппроксимацию, которая на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T}$ имеет следующий вид:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in \overline{0, T-1}, \tag{3}$$

здесь и далее предполагается, что $\forall t \in \overline{0, T-1} : \det(A(t)) \neq 0$, $T \in \mathbb{N}$ и $T = [T_f]$ ($\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел).

В дальнейшем предполагается, что выполняются нижеследующие условия.

Условие 1. Начальный фазовый вектор динамических систем (1)–(3) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, которое имеет вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Условие 2. Фазовый вектор динамических систем (1)–(3) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, имеющему вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Условие 3. Вектор управления динамических систем (1) и (3) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, которое имеет вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$u(t) \in \mathbf{P}(t) \subset \mathbb{R}^p \ \forall t \in \overline{0, T-1}. \tag{6}$$

Тогда содержательно рассматриваемая в работе задача может быть сформулирована следующим образом.

Для рассматриваемой на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$ линейной дискретной управляемой динамической системы (3)–(6) требуется для любого целочисленного момента времени $\vartheta \in \overline{1,T}$ вычислить множество всех возможных (допустимых) фазовых состояний системы $x(\vartheta)$, которые являются финальными состояниями фазовых траекторий системы, соответствующих всем парам $\left(x_0, u_\vartheta(\cdot)\right)$, $u_\vartheta(\cdot) = \left\{u_\vartheta(t)\right\}_{t \in \overline{0,\vartheta-1}}$, $\forall t \in \overline{0, \vartheta-1} : u_\vartheta(t) \in \mathbf{P}(t)$, т. е. описать ее область достижимости на момент времени ϑ.

Аналогично [4, 8] введем строгое определение понятия области достижимости для линейной дискретной управляемой динамической системы (3)–(6).

Определение 1. Областью достижимости фазовых состояний линейной дискретной управляемой динамической системы (3)–(6) на момент времени $\vartheta \in \overline{\tau+1, T}$ ($\tau < T$), соответствующей паре $\left(\tau, X(\tau)\right) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^n}$ (здесь и далее символом $\mathbf{2}^Y$ обозначается множество всех подмножеств множества *Y*), называется множество

$$\begin{gathered}\mathbf{G}\left(\tau, X(\tau); \vartheta\right) = \Big\{x(\vartheta) \,|\, x(\vartheta) \in \mathbb{R}^n, x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \in \mathbf{X}(t+1), \\ t \in \overline{\tau, \vartheta-1}, u(t) \in \mathbf{P}(t), x(\tau) \in X(\tau)\Big\}.\end{gathered} \tag{7}$$

В силу линейности уравнения (3), описывающего динамику рассматриваемого объекта, особенностей геометрических ограничений (4)–(6) и конечности рассматриваемого целочисленного промежутка времени $\overline{1,T}$, область достижимости $\mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0); \vartheta\right)$ представляет собой выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^n$ с конечным числом вершин для любого момента времени $\vartheta \in \overline{1,T}$ [4, 8]. Кроме того, для такой области достижимости имеет место важное полугрупповое свойство [4, 8] вида

$$\mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0); t+1\right) = \mathbf{G}\left(t, X(t); t+1\right), \ t \in \overline{1, T-1}, \tag{8}$$

где $X(t) = \mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0); t\right)$ – область достижимости системы (3)–(6), соответствующая моменту времени *t*.

2. Общий рекуррентный алгебраический метод построения области достижимости

На основе полугруппового свойства областей достижимости (8), свойств систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также возможностей симплекс-метода для решения задач линейного математического программирования (ЛМП) и использования преобразования описания многогранников с помощью соответствующих систем линейных алгебраических неравенств в их описание с помощью конечного числа вершин и наоборот в работах [4, 8] был разработан эффективный общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости для линейных дискретных управляемых динамических систем вида (3), суть которого состоит в следующем.

Опираясь на свойство (8), задача построения области достижимости $\mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0); T\right)$ управляемой динамической системы (3)–(6) на заданном промежутке времени $\overline{0,T}$ может быть сведена к реализации построения рекуррентной последовательности одношаговых областей достижимости: $\mathbf{G}\left(t, X(t); t+1\right)$, $t \in \overline{0, T-1}$.

Поскольку область достижимости $X(t+1) = \mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0); t+1\right)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин для всех $t \in \overline{0, T-1}$, то любая его точка $x(t+1) \in X(t+1)$ может быть представлена как выпуклая комбинация его вершин [4, 9–12]:

$$\forall x(t+1) \in X(t+1)\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^m : x(t+1) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^{(v)}(t+1),\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \equiv 1,$$

где $x_i^{(v)}(t+1)$ – i-я вершина многогранника $X(t+1)$, $x_i^{(v)}(t+1) \in \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1,m}$.

В таком случае при построении множеств достижимости $X(t+1)$, $t \in \overline{0, T-1}$ удобно воспользоваться вершинным описанием (*V-Rep*) многогранников [4, 8], т. е. в виде

$$X(t+1) = \operatorname{conv} \mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right)$ – множество всех вершин многогранника $X(t+1) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right) = \left\{x_i^{(v)}(t+1)\right\}_{i \in \overline{1,m}}$; $\operatorname{conv} Y$ – выпуклая оболочка множества Y.

Кроме вершинного описания многогранников для построения областей достижимости $X(t+1)$ будем также использовать их фасетное описание (*H-Rep*) [4, 9–12], то есть как решение системы из $k \in \mathbb{N}$ линейных алгебраических неравенств

$$X(t+1) = \left\{x(t+1) \in \mathbb{R}^n \mid Hx(t+1) \le b\right\},\ H \in \mathbb{R}^{k \times n},\ b \in \mathbb{R}^k. \tag{10}$$

Фасетное описание (10) областей достижимости $X(t+1) = \mathbf{G}(t, \mathbf{X}(0); t+1)$ используется для реализации нахождения пересечения двух множеств. Описания (9) и (10) называются двойным описанием многогранной области достижимости, которое подробно исследовано в работах [8, 11, 13]. Операции формирования двойственного описания области достижимости *V-Rep↔H-Rep* и *H-Rep↔V-Rep* реализуются в данной статье с помощью метода двойного описания, который введен в работах [4, 8, 12, 13].

Далее в виде псевдокода опишем общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости [4, 8] применительно к динамической системе (3)–(6) на всем рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$.

Инициализация: сформировать множество $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(0)\right) = \{x_0\}$.

for each t **from** 0 **to** $T-1$ **begin**

1. Сформировать множество $\mathbf{\Gamma}_p\left(\mathbf{P}(t)\right)$ вершин многогранника $\mathbf{P}(t)$.

2. Вычислить следующие конечные множества, характеризующие свободное и вынужденное движения системы (3)–(6):

$$\hat{X}_x(t+1) = \left\{\hat{y}(t+1) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{y}(t+1) = A(t)x(t),\ x(t) \in \mathbf{\Gamma}_n\left(X(t)\right)\right\},$$

$$\hat{X}_u(t+1) = \left\{\hat{z}(t+1) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{z}(t+1) = B(t)u(t),\ u(t) \in \mathbf{\Gamma}_p\left(\mathbf{P}(t)\right)\right\},$$

$$\hat{X}(t+1) = \left\{\hat{x}(t+1) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{y}(t+1) + \hat{z}(t+1),\right.$$

$$\left.\hat{y}(t+1) \in \hat{X}_x(t+1),\ \hat{z}(t+1) \in \hat{X}_u(t+1)\right\}.$$

Отметим, что здесь множество $\hat{X}(t+1)$ содержит как граничные, так и внутренние точки, т. е. $\hat{X}(t+1) \ne \mathbf{\Gamma}_n\left(\hat{X}(t+1)\right)$.

3. Найти множество $\overline{X}(t+1)$ всех вершин множества $\hat{X}(t+1)$:

$\bar{X}(t+1)=\mathbf{\Gamma}_n\left(\hat{X}(t+1)\right)=\left\{x_i^{(\nu)}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,m}}$.

4. Сформировать фасетное описание множества $\bar{X}(t+1)$: (*V-Rep*↔*H-Rep*).

5. Найти пересечение множества $\bar{X}(t+1)$ с множеством фазовых ограничений $\mathbf{X}(t+1)$, то есть вычислить следующее множество:

$\tilde{X}(t+1)=\bar{X}(t+1)\bigcap\mathbf{X}(t+1)$.

6. Сформировать вершинное описание множества $\tilde{X}(t+1)$: (*H-Rep*↔*V-Rep*).

end

Поиск множества всех вершин области достижимости производится с помощью решения ряда задач ЛМП с использованием модифицированного симплекс-метода. Постановка этой задачи и алгоритм ее решения подробно изложены в работах [4, 8, 14].

С точки зрения вычислительной сложности, быстродействие общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости напрямую зависит от подхода к решению задач ЛМП. Поскольку симплекс-метод не является полиномиальным алгоритмом относительно объема входной информации, авторами была разработана модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости, направленная на сокращение размера симплекс-таблиц в решаемых задачах ЛМП [9]. Кроме того, очевидно, что количество вершин финальной области достижимости зависит от длины целочисленного промежутка времени $\overline{0,T}$. Поэтому второе направление предлагаемой модификации общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейной дискретной динамической системы (3)–(6) использует методику аппроксимации промежуточных вспомогательных множеств, изложенный в работах [10].

Далее в виде псевдокода опишем алгоритм для поиска множества всех вершин области достижимости линейной дискретной динамической системы (3)–(6).

Входная информация: множество $\tilde{X}(t+1)$, содержащее $\tilde{m}$ точек в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Выходная информация: Описание области достижимости $X(t+1)=\mathbf{G}(t,\mathbf{X}(0);t+1)$ в виде множества всех ее вершин $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right)$ и выпуклой оболочки этого множества.

1. Сортировать все точки множества $\tilde{X}(t+1)$ относительно удаленности их от центра наименьшего многомерного параллелепипеда $\mathbf{\Pi}$, содержащего множество $\tilde{X}(t+1)$, сформировав таким образом множество $\tilde{X}^{\text{сорт}}(t+1)$.

2. Взять первые (n+1) наиболее отдаленных от центра параллелепипеда $\mathbf{\Pi}$ точек множества $\tilde{X}^{\text{сорт}}(t+1)$ и сформировать множество точек претендентов

$\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)=\left\{\tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,n+1}}$.

3. Аналогично [2–4], на основании решения соответствующих задач ЛМП, сформировать множество всех вершин выпуклой многогранной оболочки множества $\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$ путем реализации следующего алгоритма:

for each *i* **from** *n*+2 **to** $\tilde{m}$ **begin**

Проверить принадлежит ли точка $\tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1)$ крайней опорной гиперплоскости многогранника $\mathrm{conv}\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$. Если это условие выполняется, то эта точка помещается в множество точек претендентов $\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$, иначе – исключается и не присутствует в дальнейшей реализации алгоритма.

end

Как только в множестве $\tilde{X}^{\text{сорт}}(t+1)$ не останется элементов, то уточненное множество $\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$ описывается массивом

$$\tilde{X}^{\text{пр}}_{\text{уточ}}(t+1) = \left\{ \tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1) \right\}_{i \in \overline{1,k}},$$

где $(k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)$.

4. Используя комбинацию алгоритмов из [2–4, 6, 7] сформировать множество всех вершин многогранника $\operatorname{conv} \tilde{X}^{\text{пр}}_{\text{уточ}}(t+1)$, т. е. вычислить множество

$$\mathbf{\Gamma}_n \left(\operatorname{conv} \left(\tilde{X}^{\text{пр}}_{\text{уточ}}(t+1) \right) \right) = \left\{ \tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1) \right\}_{i \in \overline{1,s}} = \mathbf{\Gamma}_n \left(X(t+1) \right),$$

где $(s \in \mathbb{N}) \wedge (s \leq k)$.

5. Сформировать искомое множество $X(t+1) = \operatorname{conv} \mathbf{\Gamma}_n \left(X(t+1) \right) = \mathbf{G}(t, \mathbf{X}(0); t+1)$.

Отметим, что в этом алгоритме для нахождения множества всех вершин $\mathbf{\Gamma}_n \left(X(t+1) \right)$ требуется решить большее число задач ЛМП значительно меньшего размера, чем при использовании алгоритма, основанного на общем рекуррентном алгебраическом методе [4, 8], что в целом приводит к более высокой производительности вычислительного процесса при построении области достижимости $X(t+1)$, а следовательно, и искомой области достижимости $\mathbf{G}(0, \mathbf{X}(0); T)$.

3. Модельные примеры

В данном разделе работы демонстрируется эффективность изложенных выше общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем и его модификаций на модельных примерах. Алгоритмы предложенного метода и его модификации реализованы в программной среде MATLAB R2014a.

Пример 1. Модель сближения двух космических аппаратов

Рассмотрим модель движения двух материальных точек в центральном поле тяготения Земли [14–17]. Предполагается, что один из объектов имеет пассивно гравирующий характер движения, в то время как другой может корректировать свою динамику за счёт создания управляющего ускорения. Векторные дифференциальные уравнения невозмущенного движения в этом случае будут иметь вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{r_ц}}{dt^2} + \frac{\mu}{r_ц^3} \mathbf{r_ц} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r_п}}{dt^2} + \frac{\mu}{r_п^3} \mathbf{r_п} = \mathbf{a_п}, \tag{12}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, соединяющий материальную точку (центр масс) с центром масс притягивающего тела (здесь и далее нижний индекс ц обозначает цель, а п – преследователя); μ – гравитационный параметр Земли, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли; $\mathbf{a}$ – вектор ускорения, развиваемого двигательной установкой.

Произведем редуцирование пространства состояния и перейдем к рассмотрению относительного движения цели и преследователя, для этого вычтем из уравнения (12) уравнение (11):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r_п} - \mathbf{r_ц}) + \mu \left(\frac{\mathbf{r_ц}}{r_ц^3} - \frac{\mathbf{r_п}}{r_п^3} \right) = \mathbf{a_п}.$$

Для удобства дальнейшей записи введем в рассмотрение вектор относительной дальности

$$\mathbf{D} = \mathbf{r_п} - \mathbf{r_ц}. \tag{13}$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{D} - \mu \left(\frac{\mathbf{r_п}}{r_п^3} - \frac{\mathbf{r_ц}}{r_ц^3} \right) = \mathbf{a_п}. \tag{14}$$

Произведя преобразования выражения (14) с помощью (13), можно перейти к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{D} - \mu \left(\mathbf{r_ц} - \left(\mathbf{r_ц} + \mathbf{D} \right) \left(1 + \frac{D^2}{r_ц^2} + 2 \frac{r_ц D}{r_ц^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) = \mathbf{a_п}. \tag{15}$$

Полученная система(15) является системой точных дифференциальных уравнений движения активного аппарата относительно пассивного в орбитальной системе координат (ОСК), которая движется вместе с пассивным аппаратом по круговой орбите в инерциальном пространстве с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\text{ц}}$. В этом случае переход от абсолютных производных вектора дальности к относительным производным можно осуществить с помощью уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{D} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{D} + 2\boldsymbol{\omega}_{\text{ц}} \times \frac{d}{dt}\mathbf{D} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ц}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{ц}} \times \mathbf{D}\right) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ц}} \times \mathbf{D}. \tag{16}$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{D} + 2\boldsymbol{\omega}_{\text{ц}} \times \frac{d}{dt}\mathbf{D} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ц}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{ц}} \times \mathbf{D}\right) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ц}} \times \mathbf{D} - \mu\left(\mathbf{r_ц} - \left(\mathbf{r_ц} + \mathbf{D}\right)\left(1 + \frac{D^2}{r_{\text{ц}}^2} + 2\frac{r_{\text{ц}}D}{r_{\text{ц}}^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = \mathbf{a_п}.$$

Полученное уравнение является нелинейным, что затрудняет его практическое использование. Вместе с тем нетрудно заметить, что для случая ближнего наведения $D / r_{\text{ц}} \ll 1$ можно выполнить следующее разложение в ряд:

$$\left(1 + \frac{D^2}{r_{\text{ц}}^2} + 2\frac{r_{\text{ц}}D}{r_{\text{ц}}^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\frac{r_{\text{ц}}D}{r_{\text{ц}}^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{D}{r_{\text{ц}}}\right)^2 + \frac{15}{2}\left(\frac{Dr_{\text{ц}}}{r_{\text{ц}}^{\,2}}\right)^2 + \ldots,$$

и ограничившись лишь несколькими членами этого разложения, получим систему дифференциальных уравнений, которую в проекциях на оси ОСК в случае круговой орбиты можно представить с помощью системы уравнений Клохесси – Уилтшира вида:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y}\omega_{\text{ц}} = a_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x}\omega_{\text{ц}} - 3\omega_{\text{ц}}^2 y = a_y, \\ \ddot{z} + z\omega_{\text{ц}}^2 = a_z. \end{cases} \tag{17}$$

где x, y, z – проекции вектора относительной дальности преследователя в ОСК, связанной с целью; $\omega_{\text{ц}}$ – угловая скорость вращения цели вокруг Земли; a_x, a_y, a_z – проекции ускорения, развиваемого двигательной установкой на оси ОСК.

Полученная система дифференциальных уравнений при соответствующих преобразованиях может быть записана в компактном векторно-матричном виде:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in [0, T_f],$$

где $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{6\times 6}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{6\times 3}$, $u(t) \in \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$.

Данной линейной дифференциальной управляемой динамической системе ставится в соответствие ее дискретная аппроксимация, которую можно записать в форме следующего рекуррентного соотношения:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ \ t \in \overline{0, T-1},$$

где матрицы $A(t)$ и $B(t)$ при угловой скорости $\omega_{\text{ц}} = 10^{-3}$ рад$^{-1}$, ускорении, развиваемом двигательной установкой преследователя $a_x = a_y = a_z = 0{,}1$ м/с, и шаге дискретизации $T_0 = 10$ с будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 0{,}112 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}112 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}022 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}022 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 0{,}037 & 0 \\ -0{,}037 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0{,}011 & 0 \\ -0{,}011 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что управляющее воздействие $u(t)$ принимает свои значения из заданного множества $\mathbf{P}(t) = \{u(t) \mid |u_i(t)| \le 1, i = \{1,2,3\}\}$, $\forall t \in \overline{0, T-1}$.

Считается, что радиус-вектор цели равен: $r_ц = 42{,}24 \cdot 10^6$ м.

Сечения по времени области достижимости нелинейной системы и ее линейной дискретной аппроксимации, полученной с помощью предлагаемой модификации общего рекуррентного алгебраического метода [2–4], иллюстрируются на рис. 1.

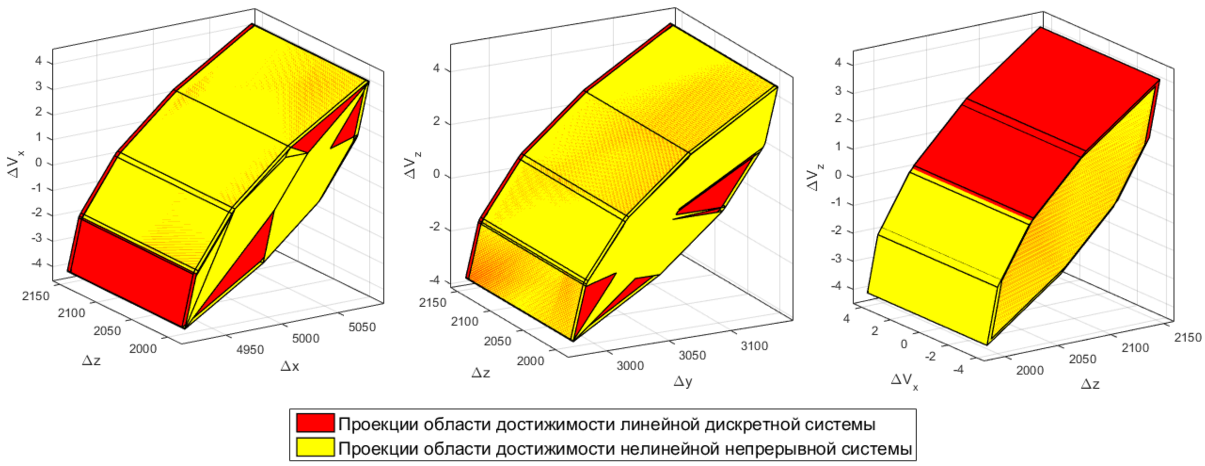

Рис. 1. Аппроксимация области достижимости нелинейной дифференциальной и линейной дискретной систем (Пример 1)

Пример 2. Модель Лотки – Вольтерры.

В качестве второго примера рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений, представляющую собой модель взаимодействия двух видов типа «хищник – жертва», названную в честь ее авторов «моделью Лотки – Вольтерры»:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) + eu(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t), \end{aligned} \tag{18}$$

где $x_1(t)$ – количество жертв, $x_1(t) \ge 0$ $\forall\, t \in [0, T]$; $x_2(t)$ – количество хищников, $x_2(t) \ge 0$ $\forall\, t \in [0, T]$; a, b, c, d, e – некоторые положительные коэффициенты, отражающие взаимодействие между видами.

Проведя линеаризацию данной системы уравнений около стационарной точки $(c/d; a/b)$, $\forall\, t \in [0, T] : u(t) \equiv 0$ получим:

$$\Delta\dot{x}_1(t) = -\frac{bc}{d}\Delta x_2(t) + e\Delta u(t),$$

$$\Delta\dot{x}_2(t) = \frac{da}{b}\Delta x_1(t).$$

Опустив знак Δ, запишем сформированную линейную модель, соответствующую системе (18), в векторно-матричной форме Коши:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in [0, T_f],$$

где $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $u(t) \in \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^1$.

Данная управляемая линейная непрерывная динамическая система дискретизируется и приводится к векторному линейному дискретному рекуррентному уравнению вида

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

где $t \in \overline{0, T-1}$.

Предполагается, что управляющее воздействие $u(t)$ принимает свои значения из заданного множества $\mathbf{P}(t) = \{u(t) \mid |u(t)| \le 0{,}3\}$, $\forall t \in \overline{0, T-1}$.

В качестве параметров моделирования выбираются: $a = 0{,}9$, $b = 0{,}003$, $c = 0{,}8$, $d = 0{,}002$, $e = 0{,}85$, $T = 44$, $x_1(0) = 410$, $x_2(0) = 300$.

Сечения по времени аппроксимации области достижимости нелинейной дифференциальной системы (18) и соответствующей линейной дискретной системы, полученной с помощью предлагаемой модификации общего рекуррентного алгебраического метода [4, 8], иллюстрируются на рис. 2.

В таблице приведены основные параметры (объем многогранника, количество вершин) области достижимости $\mathbf{G}(0, x_0; T)$, т. е. множества всех допустимых финальных фазовых состояний линейной дискретной системы, вычисленной с помощью общего рекуррентного алгебраического метода и его модификации, а также дополнительные показатели, позволяющие сравнить эффективность алгоритмов.

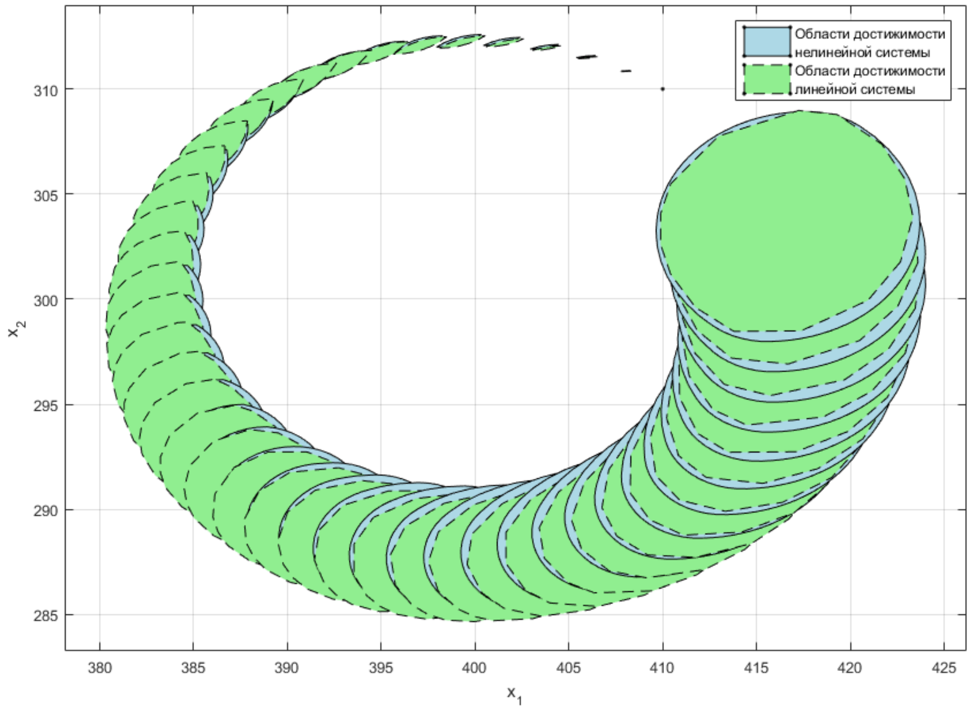

Рис. 2. Аппроксимация сечений области достижимости нелинейной дифференциальной системы (Пример 2)

Результаты моделирования

Система	Алгоритм	Время работы, с	Количество вершин	Объём многогранника
Пример 1	Общий алгоритм	4,38	1058	64 917 796
	Модифицированный	2,12	1008	64 237 895
Модель Клохесси – Уилтшира		–	–	65 813 214
Пример 2	Общий алгоритм	1,31	48	113,12
	Модифицированный	0,8	15	108,03
Модель Лотки – Вольтерры		–	–	119,56

Заключение

В данной работе описывается модификация общего рекуррентного алгебраического метода для аппроксимации областей достижимости нелинейных дифференциальных управляемых динамических систем с помощью построения областей достижимости соответствующих линейных дискретных управляемых систем. Предложенный алгоритм базируется на общем рекуррентном алгебраическом методе [4, 8] построения областей достижимости линейных дискретных управляемых систем, относящемся к классу точных методов, дающих описание всех допустимых фазовых состояний линейной дискретной управляемой динамической системы в заданный момент времени. В работе также описана модификация общего рекуррентного алгебраического метода, основанная на результатах, полученных в работах [9, 10], и направлена на сокращение операций и уменьшение времени реализации вычислительного процесса.

В качестве модельных примеров рассмотрены задача стыковки двух космических аппаратов, описываемых системой дифференциальных уравнений Клохесси – Уилтшира и модель Лотки – Вольтерры, описывающая процесс взаимодействия двух видов животных типа «хищник – жертва». Представленные в статье результаты компьютерного моделирования разработанных алгоритмов построения областей достижимости продемонстрировали их эффективность. При этом применение модификации общего рекуррентного алгебраического метода позволяет заметно сократить время вычислений при моделировании построения областей достижимости для рассматриваемых модельных примеров.

Программная реализация построения областей достижимости осуществлена в программной среде MATLAB R2014a, где были реализованы общий рекуррентный алгебраический метод в виде соответствующих численных алгоритмов построения областей достижимости линейных дискретных управляемых систем и различные версии его модификаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00315; проект № 18-01-00544).

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

2. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1987. – 440 с.

3. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.

4. Шориков, А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах / А.Ф. Шориков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. – 242 с.

5. Тюлюкин, В.А. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы / В.А. Тюлюкин, А.Ф. Шориков // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 4. – С. 115–127.

6. Ширяев, В.И. О гарантированных оценках состояния линейных динамических систем в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, Е.О. Подивилова // Известия высших учебных заведений. Уральский регион. – 2014. – № 2. – С. 52–59.

7. Kurzhanskiy, A.A. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances / A.A. Kurzhanskiy, P. Varaiya // Automatica. – 2011. – Vol. 47. – P. 1414–1426. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.02.009

8. Тюлюкин, В.А. Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы / В.А. Тюлюкин, А.Ф. Шориков // Негладкие задачи оптимизации и управление. – Свердловск: УрО АН СССР, 1988. – С. 55–61.

9. Шориков, А.Ф. Методика аппроксимации области достижимости нелинейной управляемой динамической системы / А.Ф. Шориков, А.Ю. Горанов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 2. – С. 112–121.

10. Булаев, В.В. Об использовании симплекс-метода для аппроксимации выпуклых многогранников / В.В. Булаев // Труды второй научно-технической конференции молодых ученых Уральского энергетического института. – Екатеринбург: Урал. федер. ун-т, 2017. – С. 397–399.

11. Бастраков, С.И. Удаление неравенств из фасетного описания многогранника / С.И. Бастраков, Н.Ю. Золотых // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т.21, № 3. – С. 37–45.

12. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

13. Fukuda, K. Double description method revisited / K. Fukuda, A. Prodon // Lecture Notes in Computer Science. – 1996. – Vol. 1120. – P. 91–111.

14. Юдин, Д.Б. Линейное программирование (теория, методы и приложения) / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

15. Ермилов, Ю.А. Управление сближением космических аппаратов / Ю.А. Ермилов, Е.Е. Иванова, С.В. Пантюшин. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

16. Иванов, Н.М. Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом / Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко, А.И. Мартынов. – М.: Машиностроение, 1981. – 254 с.

17. Лебедев, А.А. Встреча на орбите / А.А. Лебедев, В.Б. Соколов. – М.: Машиностроение, 1969. – 366 с.

Шориков Андрей Федорович, д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра прикладной математики Уральского энергетического института, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; afshorikov@mail.ru.

Булаев Владимир Владимирович, инженер-конструктор 1-й категории, АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург; bulaev1991@mail.ru.

Горанов Александр Юрьевич, инженер-конструктор 1-й категории, АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург; goranovayu@mail.ru.

Калёв Виталий Игоревич, инженер-конструктор 1-й категории, АО «НПО Автоматики им. академика Н.А. Семихатова», г. Екатеринбург; v.i.kalev@urfu.ru.

Поступила в редакцию 15 мая 2018 г.

DOI: 10.14529/ctcr180305

THE APPROXIMATION OF REACHABLE SETS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL CONTROLLED DYNAMICAL SYSTEMS

***A.F. Shorikov*[1]**, *afshorikov@mail.ru,*
***V.V. Bulaev*[2]**, *bulaev1991@mail.ru,*
***A.Yu. Goranov*[2]**, *goranovayu@mail.ru,*
***V.I. Kalev*[2]**, *v.i.kalev@urfu.ru*
[1] Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation,
[2] JSC "Scientific and Production Association of automatics named after academician N.A. Semikhatov", Ekaterinburg, Russian Federation

This paper considers the problem of reachable sets computation and approximation for nonlinear differential controlled dynamical system. The object of study is the class of controlled dynamical systems described by vector nonlinear differential equations. Firstly, the system under study is sequentially transformed using linearization along reference trajectory and discretization of this linearized system. Thus, the initial nonlinear model is associated with its linear discrete-time approximation. In this paper it is assumed that the state vector of a system and the control action are constrained by geometrical sets, i.e. by convex, closed and limited polyhedra with finite number of vertices because of natural causes. The reachable set computation is implemented using general recursion algebraic method and its modification. The final section of the work provides the simulation results on few examples of relative motion of two spacecrafts (Clochessy-Wiltshire system of equations) and predator-prey system (Lotka-Volterra model). For each example the computer simulation results and comparative analysis of the reachable sets approximation accuracy for a specific nonlinear differential dynamical system using the reachable sets of corresponding linear discrete-time dynamical systems, which was constructed with the general recursion algebraic method of reachable sets computation and its modification.

Keywords: differential nonlinear controlled dynamical systems, reachable sets approximation, convex polyhedra, linear programming, simplex-method.

References

1. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynie sistemy* [Theory of Control of Motion. Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p.
2. Kurzhansky A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation in the Conditions of Indeterminacy]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 440 p.
3. Chernousko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh system* [Estimation of a Phase Condition of Dynamic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 320 p.
4. Shorikov A.F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* [Minimax Estimation and Control in Discrete-Time Dynamical Systems]. Ekaterinburg, Ural State University Publ., 1997. 242 p.
5. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. [The Solution Algorithm of Terminal Control Problem for Linear Discrete-Time System]. *Automatics and Telemechanics*, 1993, no. 4, pp. 115–127. (in Russ.)
6. Shiryaev V.I., Podivilova O.A. [About Guaranteed Assessments of Linear Dynamic Systems under Conditions of Uncertainty]. *Ural Region*, 2014, no. 2, pp. 52–59. (in Russ.)
7. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach Set Computation and Control Synthesis for Discrete-Time Dynamical Systems with Disturbances. *Automatica*, 2011, vol. 47, pp. 1414–1426. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.02.009
8. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. [About One Algorithm of Creation of Area of Approachibility of the Linear Operated System]. *Rough Problems of Optimization and Control,* Sverdlovsk, UB AS USSR, 1988, pp. 55–61. (in Russ.)
9. Shorikov A.F., Goranov A.Yu. [Technique of Approximation of Area of Approachibility of the Non-Linear Operated Dynamic System]. *Applied Mathematics and Control Problems*, 2017, no. 2, pp. 112–121. (in Russ.)
10. Bulaev V.V. [The Using of the Simplex Method for Convex Polytopes Approximation]. *Trudy vtoroi nauchno-tekhnicheskoi konferencii molodykh uchenykh Uralskogo energeticheskogo instituta* [Proc. of the Second Scientific and Technical Conference of Young Scientists of the Ural Power Institute]. Ekaterinburg, Ural Federal University, 2017, pp. 397–399. (in Russ.)
11. Bastrakov S.I., Zolotykh N. Yu. [Elimination of Inequalities from a Facet Description of a Polyhedron]. *Works of Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS*, Ekaterinburg, IMM UB RAS, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 37–45. (in Russ.)
12. Chernikov S.N. *Lineynie neravenstva* [Linear Inequalities]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 488 p.
13. Fukuda K., Prodon A. Double Description Method Revisited. *Lecture Notes in Computer Science*, 1996, vol. 1120, pp. 91–111.
14. Yudin D.B., Golshtein E.G. *Lineynoe programmirovanie (teoriya, metody i prilozheniya)* [Linear Programming (Theory, Methods and Applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.
15. Ermilov Yu.A., Ivanova E.E., Pantyushin S.V., *Upravlenie sblizheniem kosmicheskikh apparatov* [Control of Rapprochement of Spacecrafts]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 448 p.
16. Ivanov N.M., Lysenko L.N., Martynov A.I. *Metody teorii sistem v zadachakh upravleniya kosmicheskim apparatom* [Methods of the Theory of Systems in Tasks of Control of the Spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 254 p.
17. Lebedev A.A., Sokolov V.B. *Vstrecha na orbite* [Meeting in an Orbit]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969. 366 p.

Received 15 May 2018

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Аппроксимация областей достижимости нелинейных дифференциальных управляемых динамических систем / А.Ф. Шориков, В.В. Булаев, А.Ю. Горанов, В.И. Калёв // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2018. – Т. 18, № 3. – С. 39–50. DOI: 10.14529/ctcr180305

FOR CITATION

Shorikov A.F., Bulaev V.V., Goranov A.Yu., Kalev V.I. The Approximation of Reachable Sets of Nonlinear Differential Controlled Dynamical Systems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2018, vol. 18, no. 3, pp. 39–50. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr180305