КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

СРАВНЕНИЕ МИНИМАКСНОГО И КАЛМАНОВСКОГО АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.О. Подивилова

COMPARISON OF MINIMAX AND KALMAN ALGORITHMS FOR ESTIMATION OF DYNAMIC SYSTEMS STATE VECTORS

E.O. Podivilova

Рассматривается построение гарантированных оценок вектора состояния динамической системы в условиях неопределенности. Проводится сравнение гарантированных и точечных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана и минимаксного фильтра.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, минимаксный фильтр, фильтр Калмана.

The article considers the construction of assigned estimates of dynamic systems state vectors in terms of uncertainty. The comparison of assigned and point estimates obtained by Kalman filter and minimax filter is performed.

Keywords: assigned estimates, minimax filter, Kalman filter.

Введение

Одной из важнейших задач является построение эффективных алгоритмов оценивания состояния динамической системы. Один из подходов к оцениванию вектора состояния в условиях неопределённости – вероятностный подход, согласно которому возмущения и помехи являются случайными величинами с известными функциями распределения [1, 5, 7]. Но в реальных условиях, как правило, отсутствует статистическая информация о возмущениях и помехах, а известны множества их возможных значений [2–4, 6, 7]. Сравним эти подходы при различных реализациях процесса. Статья является продолжением исследований, начатых в работах [5, 8].

Постановка задачи. Процессы в системе управления описываются уравнениями:

$$x_{k+1} = A_k x_k + \Gamma_k w_k, k = 0,1,..., N-1, \quad (1)$$

$$y_{k+1} = G_{k+1} x_{k+1} + H_{k+1} v_{k+1}, k = 0,1,..., N-1, \quad (2)$$

где $x_k \in R^n$ – вектор состояния системы на k-м шаге; A_k, Γ_k – известные матрицы; w_k – вектор возмущения; $y_k \in R^m$ – вектор измерения; G_k, H_k – известные матрицы (далее взяты единичными); v_k – вектор ошибок измерений.

Минимаксный фильтр

Известно, что начальное состояние x_0 и неопределенные воздействия w_k и v_k на k-м шаге могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых множеств:

$$x_0 \in X_0, w_k \in W, v_k \in V, k = 0,1,..., N-1. \quad (3)$$

Задача гарантированного оценивания состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств $\overline{X}_{k+1}$, $k = 0,1,..., N-1$ [5, 8]:

$$X_{k+1/k} = A\overline{X}_k + \Gamma W, k = 0,1,..., N-1, \quad (4)$$

$$X[y_{k+1}] = \left\{ x \in R^n \,|\, Gx + v = y_{k+1}, v \in V \right\}, \quad k = 0,1,..., N-1, \quad (5)$$

$$\overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], k = 0,1,..., N-1. \quad (6)$$

При построении минимаксного фильтра в качестве оценки x_k^* вектора состояния x_k системы (1) рассматривается чебышевский центр информационного множества $\overline{X}_k$ [2, 5, 8], т. е. центр наименьшего шара, содержащего данное множество.

Рассмотрим пример. Пусть матрицы A и Γ имеют следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} 0,9976 & 0,04639 \\ -0,09278 & 0,8584 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 0,1189 \cdot 10^{-3} \\ 4,639 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подивилова Елена Олеговна – аспирант кафедры систем управления, Южно-Уральский государственный университет; podivilova_elena@mail.ru

Podivilova Elena Olegovna – postgraduate student of control systems department of South Ural State University, podivilova_elena@mail.ru

Множества X_0, W, V заданы следующим образом:

$W = \left\{ w \in R \middle| -1,5 \le w \le 1,5 \right\}$,

$V = \left\{ v \in R^2 \middle| -1,45 \cdot 10^{-4} \le v(1) \le 1,45 \cdot 10^{-4}, \right.$

$\left. -0,0228 \le v(2) \le 0,0228 \right\}$.

Начальное состояние системы $x_0 = 0$, а w_k и v_k периодически меняются по вершинам множеств W и V в различном порядке (реализация 1 и реализация 2). На рис. 1 и 2 представлены результаты построения информационных множеств для $k = 1,...,10$.

При использовании минимаксного фильтра размер и форма информационного множества зависят от характера возмущений, действующих на объект, и ошибок измерений. В зависимости от способа реализации возмущений и помех информационные множества могут представлять собой выпуклые многоугольники, отрезки и точки. То есть при некоторых вариантах реализации процесса можно даже получить точную оценку вектора состояния.

Фильтр Калмана

Возмущения $w_k \sim N(0,Q)$, ошибки измерения $v_k \sim N(0,R)$ начальный вектор состояния $x_0 \sim N(0,P_0)$. Задачу оценивания в этом случае будем решать с помощью фильтра Калмана [2, 3, 6], уравнение которого имеет вид (см. например [1, 8]):

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - G\hat{x}_k), k = 0,1,...,N-1, \quad (8)$$

$$K_k = \left(AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma'\right) \times$$

$$\times \left(\left(AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma'\right) + HR_k H' \right)^{-1}, k = 1,2,...,N, \quad (9)$$

$$P_k = \left(I - K_k\right)\left(AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma'\right), k = 1,2,...,N. \quad (10)$$

Рассмотрим задачу оценивания для реализаций 1 и 2. Матрицы ковариаций зададим таким образом, чтобы случайные величины x_0, w, v на уровне 3σ попадали во множества X_0, W, V, т. е. аппроксимируем множества X_0, W, V описанными эллипсами:

$P_0 = 10^{-4} diag(0,0016, 1,6044), Q = 0,25,$

$R = 10^{-4} diag(0,0005, 1,1378).$

При этом стоит отметить, что хотя и предполагается, что случайные величины имеют известные характеристики распределения, в данном примере рассматривается единственная реализация процесса.

Сравнение доверительных областей и информационных множеств

Действительное значение вектора состояния системы на уровне 3σ попадает во множество $\left(x_k - \hat{x}_k\right)' P_k^{-1} \left(x_k - \hat{x}_k\right) = l^2$, образующее эллипс с центром в точке $\hat{x}_k$ (рис. 3 а, б). Вероятность нахождения вектора x_k внутри полученного эллипса при $l = 3$ равна 0,989 [4].

В данных реализациях получается, что истинные значения вектора состояния на некоторых итерациях находятся за пределами доверительных областей, полученных на основе фильтра Калмана (рис. 3). Это можно объяснить тем, что возмущения и помехи выбирались на границах своих доверительных областей, где значения вероятностей этих величин достаточно мало. То есть такая реализация процесса при данном распределении случайных величин является маловероятной. При использовании минимаксного фильтра гарантируется, что значение вектора состояния находится внутри информационного множества. Кроме того, размеры доверительных областей превышают размеры соответствующих информационных множеств.

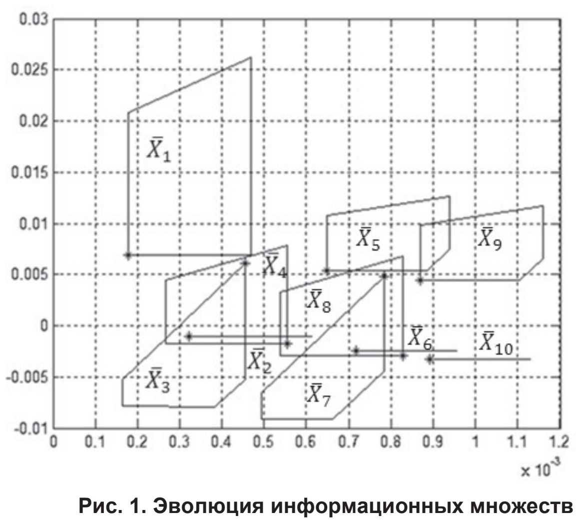


Рис. 1. Эволюция информационных множеств (реализация 1)

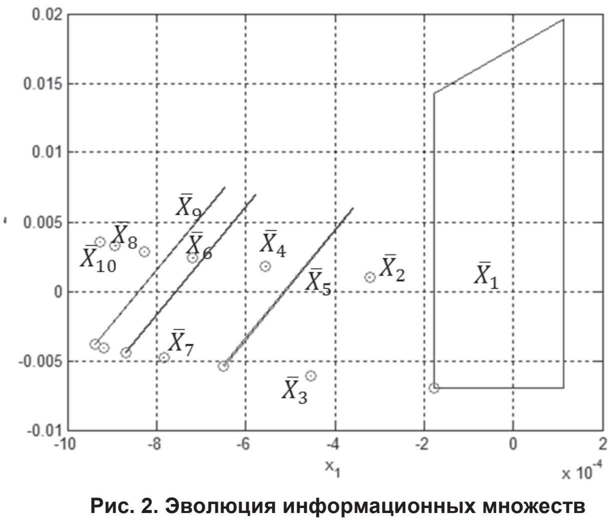
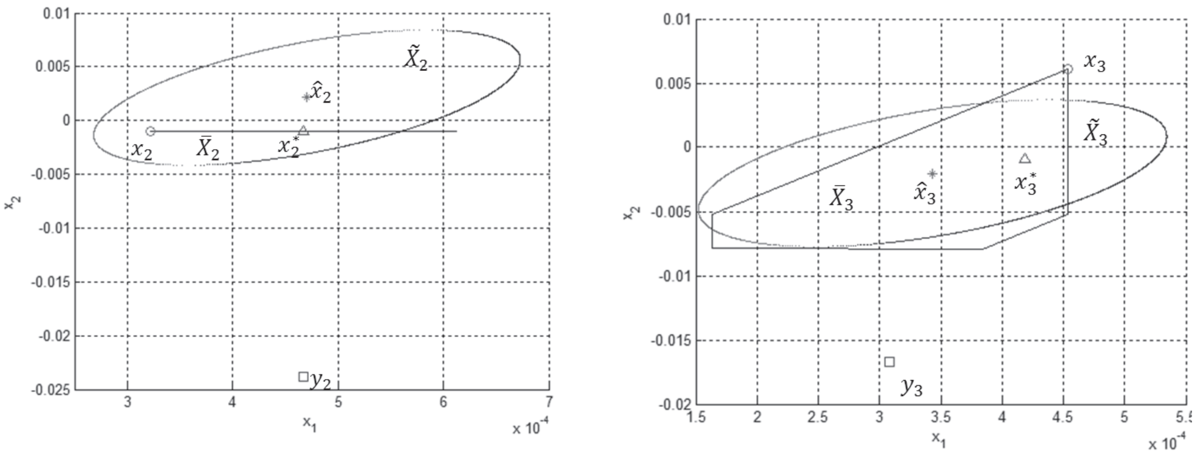
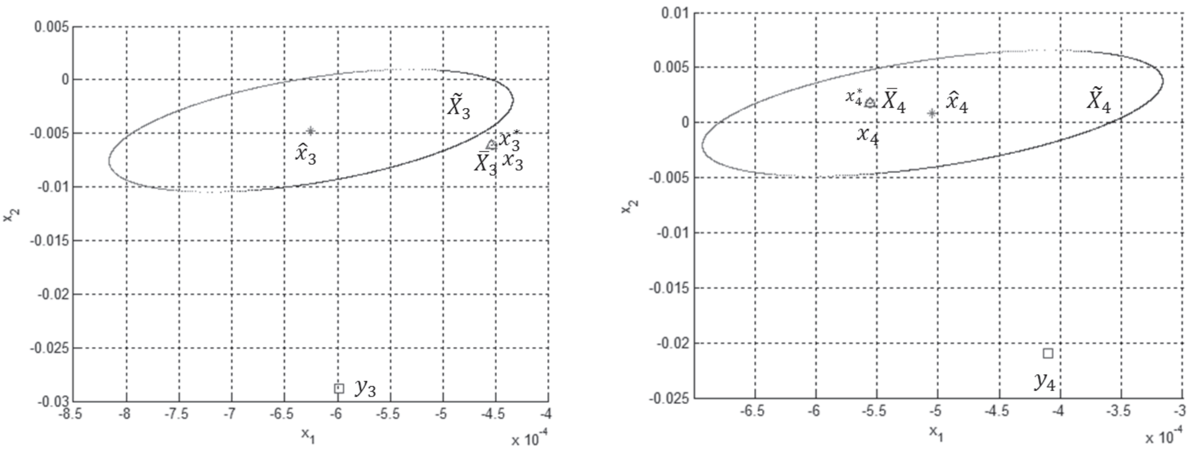


Рис. 2. Эволюция информационных множеств (реализация 2)



а)



б)

Рис. 3. Сравнение доверительных областей и информационных множеств: а – реализация 1; б – реализация 2

Отметим, что даже если на каком-то шаге оценка вектора состояния совпадет с истинным значением вектора состояния, то фильтр Калмана в отличие от минимаксного фильтра не сможет распознать эту ситуацию.

В реализации 1 фильтр Калмана в среднем дает более точную мгновенную оценку вектора: среднеквадратичное отклонение оценки от истинного значения в минимаксном фильтре равно $\sigma_{MM} = 5{,}1 \cdot 10^{-3}$, а в фильтре Калмана – $\sigma_K = 4{,}36 \cdot 10^{-3}$. При другой реализации процесса, когда при минимаксном фильтре информационные множества стягиваются в точки и отрезки, получается, что минимаксный фильтр дает более точную мгновенную оценку: $\sigma_K = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_{MM} = 3{,}16 \cdot 10^{-3}$.

Заключение

При использовании вероятностного подхода не всегда можно получить достоверные гарантированные оценки вектора состояния системы. Для некоторых конкретных реализаций процесса получается, что истинные значения вектора состояния находятся за пределами доверительных областей, полученных на основе фильтра Калмана. Кроме того, даже если на каком-то шаге оценка вектора состояния совпадёт с истинным значением вектора состояния, то фильтр Калмана не сможет распознать эту ситуацию. При использовании минимаксного фильтра гарантируется, что значение вектора состояния находится внутри информационного множества.

Литература

1. *Калман, Р.Е. Идентификация систем с шумами / Р.Е. Калман // Успехи математических наук. – Т. 40. – Вып. 4(244). – 1985. – С. 27–41.*

2. *Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 11. – С. 79–87.*

3. Кунцевич, В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. – К.: Наукова думка, 2006. – 264 с.

4. Овсеевич, А.И. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем / А.И. Овсеевич, А.М. Шматков // Изв. АН. Теория и системы управления. – 1997. – №4. – С. 11–16.

5. Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, В.И. Долбенков, Е.Д. Ильин, Е.О. Подивилова // Экстремальная робототехника: тр. Междунар. науч.-техн. конф. – Санкт-Петербург: Изд-во «Политехника-сервис», 2011. – С. 204–214. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

6. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – № 2. – С. 11–15.

7. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.

8. Ширяев, В.И. Алгоритмы управления фирмой / В.И. Ширяев, И.А. Баев, Е.В. Ширяев. – М.: URSS: Либроком, 2009. – 223 с.

Поступила в редакцию 14 сентября 2012 г.