УДК 531.7 + 519.6 DOI: 10.14529/ctcr180302

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ПАРНЫХ РАССТОЯНИЙ К ОЦЕНИВАНИЮ РАДИУСА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ СЛУЧАЙНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ФОРМЫ

Б.М. Суховилов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Разработаны теоретические положения метода парных расстояний применительно к определению радиуса сферической поверхности, имеющей отклонения формы. Для реализации метода на исследуемой поверхности размещают реперные точки и измеряют между ними линейные расстояния. Рассмотрен наиболее общий случай определения радиуса, когда парные расстояния измеряются с погрешностями, а сфера имеет случайные отклонения формы.

Рассматриваемый подход является развитием метода определения радиуса сферической поверхности по расстояниям, измеренным между 4 расположенным на поверхности точкам. Указанное количество точек является минимально необходимым для решения задачи. Представлена реализация метода для определения радиуса сферической поверхности по расстояниям, измеренным между произвольным, большим 4, количеством расположенных на поверхности точек.

В рамках разработанного метода получены аналитические выражения радиуса сферической поверхности через расстояния между парами точек и вычислены среднеквадратические отклонения погрешностей оценок радиуса, вызванные погрешностями измерения расстояний и отклонением формы. Определены условия оптимальности конфигураций задаваемого количества точек на сфере, обеспечивающих минимальную дисперсию оценки радиуса.

Метод позволяет исключить применение дорогостоящих координатных машин для получения оценки радиуса, так как для измерения парных расстояний можно использовать простой серийный измерительный инструмент. Оценка параметров методом парных расстояний целесообразна в случае крупногабаритных прерывистых поверхностей, когда измеряемая поверхность составляет только часть общей поверхности, прямые измерения невозможны из-за недоступности измерительных баз. Метод нашел приложение в комплексе работ по оценке параметров юстировки телевизионной системы измерения углового положения динамического стенда с газовой опорой.

Ключевые слова: сферическая поверхность с отклонением формы, определение радиуса методом парных расстояний, оценка погрешностей, оптимальное расположение точек на сфере.

Введение

В комплексе работ по оценке параметров юстировки телевизионной системы измерения углового положения (ТСИУП) динамического стенда (ДС) с газовой опорой важное место занимает вопрос определения радиуса сферической поверхности, огибающей центры диафрагм реперов-излучателей (РИ) [1–4]. РИ размещают на сфере с центром, совпадающим с центром вращения ДС, для исключения неопределенности положения РИ вдоль оси визирования ТСИУП. Выставка координат центров диафрагм РИ на сферической поверхности осуществляется при их сборке и установке на специальной платформе, крепящейся на шаровой опоре ДС. При этом множество центров диафрагм РИ образует прерывистую сферическую поверхность, в общем случае имеющую отклонения от формы сферы из-за ошибок выставки.

Известные прямые и косвенные методы определения радиуса сферической поверхности, основанные на результатах измерений с помощью специальных накладных измерительных устройств, базирующихся непосредственно на поверхности, радиус кривизны которой определяется, неприменимы из-за отсутствия в данном случае установочной измерительной базы для накладного измерительного прибора [5, 6].

Косвенные методы определения радиуса прерывистой сферической поверхности, основанные на измерении пространственных координат точек, расположенных на этих поверхностях [7–9], требуют применения дорогостоящих систем измерения, таких как координатно-измерительные машины [10, 11] или лазерные трекеры [12].

В предыдущем номере журнала, в статье автора «Метод определения радиуса сферической поверхности» предложен метод определения радиуса сферы, основанный на измерениях линейных расстояний между точками поверхности сферы. Рассмотрен случай определения радиуса сферической поверхности по минимально необходимому для решения задачи количеству точек, равному четырем.

В настоящей статье для повышения точности оценки радиуса полученное решение обобщено на случай, когда количество фиксируемых на сфере точек больше четырех, что практически вызывает необходимость учета отклонения измеряемой сферической поверхности от формы сферы. Выполнить оценку радиуса сферической поверхности предлагается на основе разработанного автором метода, использующего измерения расстояний между парами точек, принадлежащих поверхности [13, 14].

В следующих разделах представлены два метода определения радиуса сферической поверхности, имеющей отклонения формы, основанные на линейных измерениях расстояний между заданным количеством точек, зафиксированным на измеряемой поверхности. Для каждого метода получены аналитические выражения радиуса сферической поверхности через расстояния между парами точек. Вычислены среднеквадратические отклонения погрешностей оценки радиуса, вызванные погрешностями измерения расстояний и отклонением формы. Определены условия оптимальности конфигураций задаваемого количества точек на сфере, обеспечивающих минимальную дисперсию оценки радиуса.

1. Метод парных расстояний в задаче оценивания радиуса сферической поверхности с учетом отклонения формы

Пусть измеряемая сферическая поверхность имеет случайные отклонения от формы сферы с заданной дисперсией и нулевым математическим ожиданием.

Зафиксируем на измеряемой поверхности N точек так, чтобы, по крайней мере, четыре из них не лежали в одной плоскости. Центр аппроксимирующей сферической поверхности совместим с началом системы координат $XYZO$. Квадрат расстояния S_{ij}^2 между расположенными на поверхности точками i и j с координатами – x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j составит

$$S_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2\left(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j\right), \qquad (1)$$

где r_i , r_j – расстояния от начала системы координат $XYZO$ до точек i и j.

Рассматривая все возможные парные расстояния между N точками, запишем (1) в матричной форме

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{S}_N^2, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_N \\ y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_N \\ z_1 \; z_2 \; \ldots \; z_N \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2r_1^2 & r_1^2 + r_2^2 & \ldots & r_1^2 + r_N^2 \\ r_2^2 + r_1^2 & 2r_2^2 & \ldots & r_2^2 + r_N^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_N^2 + r_1^2 & r_N^2 + r_2^2 & \ldots & 2r_N^2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{S}_N^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & S_{12}^2 \ldots S_{1N}^2 \\ S_{21}^2 & 0 \; \ldots S_{2N}^2 \\ \ldots & \ldots \; \ldots \; \ldots \\ S_{N1}^2 & S_{N2}^2 \cdots \; 0 \end{bmatrix}$.

Матрицы половин истинных квадратов расстояний $\mathbf{S}_N^2$ и половин измеренных квадратов расстояний $\mathbf{C}_N^2$ связаны между собой соотношением

$$\mathbf{C}_N^2 = \mathbf{S}_N^2 + \mathbf{E}_N, \qquad (3)$$

где $\mathbf{E}_N$ – матрица половин погрешностей измерения квадратов парных расстояний.

Матрицы истинных $\mathbf{S}_N$ и измеренных $\mathbf{C}_N$ парных расстояний связаны соотношением

$$\mathbf{C}_N = \mathbf{S}_N + \mathbf{d}_N, \qquad (4)$$

где $\mathbf{d}_N$ – матрица погрешностей измерения парных расстояний, элементы которой независимы, центрированы и имеют дисперсию σ_s^2 .

Элементы матрицы $\mathbf{E}_N$ с точностью до малых величин второго порядка равны

$$E_{ij} = d_{ij} C_{ij}, \quad (i, j = 1, ..., N). \tag{5}$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка, с учетом (3), преобразуем выражение (2) к виду

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_0^2 - \mathbf{C}_N^2 + \left[R\left(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \right) + \mathbf{E}_N \right] \tag{6}$$

при $\mathbf{R}_0^2 = \begin{bmatrix} R^2 & R^2 & ... & R^2 \\ R^2 & R^2 & ... & R^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ R^2 & R^2 & ... & R^2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta R_1 & \Delta R_1 & ... & \Delta R_1 \\ \Delta R_2 & \Delta R_2 & ... & \Delta R_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \Delta R_N & \Delta R_N & ... & \Delta R_N \end{bmatrix}$,

где R – искомый радиус аппроксимирующей сферической поверхности; ΔR_i – случайные отклонения от формы сферы в каждой из N точек измеряемой поверхности, определяемые вдоль радиуса R как разность между R и расстоянием от центра сферы до фиксируемой точки.

Рассмотрим обобщение ранее рассмотренного метода оценки радиуса сферы по четырем точкам для случая N точек. Основываясь на том, что ранг матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{S}_N^2$ равен трем, а матрицы $\mathbf{S}_N^2$ четырем, будем искать радиус R как результат решения уравнения

$$\det(\tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{C}_N^2) = 0. \tag{7}$$

Применение для оценки радиуса уравнения (7) позволяет использовать всю информацию об измеренных парных расстояниях между расположенными на измеряемой поверхности точками.

Применяя к решению уравнения (7) подход, ранее использованный для случая расположения на исследуемой сферической поверхности 4 точек, получаем, что величина $\dfrac{1}{R^2}$ есть сумма компонент N-мерного вектора $\overline{\mathbf{x}}^*$, являющегося решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{C}_N^2 \overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{b}}, \tag{8}$$

где $\overline{\mathbf{b}}$ – вектор, состоящий из N единиц.

Система уравнений (8) относится к классу линейных систем с неполным рангом. Для ее решения применим соответствующую схему теории метода наименьших квадратов [15], осуществляя псевдообращение матрицы $\mathbf{C}_N^2$, и получим решение для радиуса аппроксимирующей сферической поверхности

$$R^* = \frac{1}{\sqrt{\overline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{C}_N^2 \right)^{+} \overline{\mathbf{b}}}},$$

где $\left(\mathbf{C}_N^2 \right)^{+}$ – псевдообратная матрица для матрицы $\mathbf{C}_N^2$.

Для вычисления псевдообратной матрицы проведем спектральное разложение матрицы $\mathbf{C}_N^2$ и запишем (8) в следующем виде:

$$\mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{b}}, \tag{9}$$

где $\mathbf{V}$ – матрица, состоящая из собственных векторов матрицы $\mathbf{C}_N^2$; $\boldsymbol{\Sigma}$ – диагональная матрица собственных значений матрицы $\mathbf{C}_N^2$.

С учетом того, что ранг матрицы $\mathbf{S}_N^2$ равен четырем, а матрица $\mathbf{C}_N^2$ отличается от матрицы $\mathbf{S}_N^2$ на малые погрешности, связанные с погрешностями измерения парных расстояний и отклонениями от формы сферы, $N-4$ наименьших собственных значений матрицы $\mathbf{C}_N^2$ приравняем к нулю, обеспечивая тем самым фильтрацию погрешностей исходных данных. Вводя следующие обозначения для векторов $\mathbf{z} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{x}}^*$ и $\mathbf{p} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{b}}$, где $\mathbf{U}$ – матрица, столбцы которой составлены из собственных векторов матрицы $\mathbf{C}_N^2$, соответствующих ее четырем наибольшим собственным значениям, вычислим четыре компоненты вектора

$$z_i = \frac{p_i}{\lambda_i}, \tag{10}$$

где λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ – наибольшие собственные значения матрицы $\mathbf{C}_N^2$; p_i – компоненты вектора $\mathbf{p}$. С учетом (9), (10) и того факта, что сумма компонент вектора $\overline{\mathbf{x}}^*$ равна величине $\frac{1}{R^2}$, получим значение оценки радиуса сферы в следующем виде:

$$R^* = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^*}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i z_i^2}}. \tag{11}$$

Отметим, что применяемая статистическая схема оценивания радиуса сферы, основанная на методе наименьших квадратов, позволяет уменьшать погрешности оценки радиуса сферы при последовательном увеличении количества точек, между которыми измеряются парные расстояния. Фильтрация погрешностей происходит путем обнуления $N-4$ наименьших собственных значений матрицы половин измеренных квадратов парных расстояний при ее псевдообращении. Метод назван мультипликативным, поскольку минимизируемый функционал представляет произведение собственных значений исследуемой матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

Оценим точность полученного решения. Для этого вычислим среднеквадратическое отклонение (СКО) оценки радиуса сферы R^*. Пусть $\overline{\mathbf{x}}$ – вектор решений системы

$$\mathbf{S}_N^2 \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}, \tag{12}$$

где $\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{x}} + \Delta\overline{\mathbf{x}}$ – вектор решений системы (8); $\Delta\overline{\mathbf{x}}$ – вектор погрешностей решения, присутствующий из-за погрешностей измерения парных расстояний и отклонений сферы от формы.

Вычитая (12) из (8) с учетом (6), получаем с точностью до малых величин второго порядка вектор погрешностей решения (8) в виде

$$\Delta\overline{\mathbf{x}} = -\left(\mathbf{C}_N^2\right)^{+} \boldsymbol{\varepsilon}_N \overline{\mathbf{x}}^*, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_N = \left[R\left(\Delta\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\right) + \mathbf{E}_N \right]$ – суммарная матрица погрешностей измерения расстояний и отклонений от формы сферы.

Умножая обе части равенства (13) слева на $\overline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}$ и выполняя операцию взятия математического ожидания, получаем значение дисперсии величины $\frac{1}{R^{*2}}$

$$D^N = 2\sigma_s^2 \mathbf{Y}^{*\mathrm{T}} \mathbf{C}_N^2 \mathbf{Y}^* + \frac{4}{R^{*2}} \sigma_m^2 \mathbf{Y}^{*\mathrm{T}} \overline{\mathbf{b}}, \tag{14}$$

где $\mathbf{Y}^*$ – вектор, составленный из квадратов компонент вектора $\overline{\mathbf{x}}^*$ решения системы (8); σ_m^2 – дисперсия отклонения измеряемой сферической поверхности от формы; σ_s^2 – дисперсия погрешностей измерения парных расстояний. Искомое среднеквадратическое отклонение σ_R погрешности оценки радиуса сферы R^* определяется подстановкой значения дисперсии D^N в формулу $\sigma_R = \frac{1}{2}\left(R^*\right)^3 \sqrt{D^N}$.

2. Определение оптимальных конфигураций точек на сферической поверхности, имеющей отклонения формы

Для определения оптимальных планов конфигураций N точек на сфере, имеющей отклонения формы, обеспечивающих минимум дисперсии D^N, необходимо минимизировать функционал

$$D^N = 2\sigma_s^2 \mathbf{Y}^{*\mathrm{T}} \mathbf{C}_N^2 \mathbf{Y}^* + \frac{4}{R^{*2}} \sigma_m^2 \mathbf{Y}^{*\mathrm{T}} \overline{\mathbf{b}} \to \min \tag{15}$$

при наличии ограничений:

$$\mathbf{C}_N^2 \overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{b}}\,, \tag{16}$$

$$\overline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{x}}^* = \frac{1}{R^2}\,. \tag{17}$$

В совокупности функционал (15) и уравнения ограничений (16), (17) представляют задачу поиска условного экстремума, которая может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа. В результате решения было установлено, что глобальный минимум

$$D_0^N = \frac{1}{R^6}\left(\frac{2\sigma_s^2}{N^2} + \frac{4\sigma_m^2}{N}\right) \tag{18}$$

дисперсии D^N имеет место в тех случаях, когда вектор $\overline{\mathbf{x}}^*$ решения системы (8) имеет равные между собой компоненты, являющиеся одновременно компонентами собственного вектора матрицы $\mathbf{C}_N^2$, соответствующего собственному значению NR^2. Для этих оптимальных планов конфигураций точек на сфере СКО погрешности оценки радиуса сферы составляет

$$\sigma_{R_0} = \frac{1}{2}\left(R\right)^3 \sqrt{D_0^N} = \sqrt{\frac{\sigma_s^2}{2N^2} + \frac{\sigma_m^2}{N}}\,. \tag{19}$$

Из (19) следует, что для оптимальных планов конфигураций точек на сфере, оценка радиуса сферы является несмещенной и асимптотически эффективной по отношению к количеству точек, между которыми измеряются парные расстояния.

Далее рассмотрим второй метод оценки радиуса сферы, имеющей отклонения формы, основанный на анализе собственных значений матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{S}_N^2$.

В силу того, что ранг матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{S}_N^2$ равен трем, наличие $N-3$ отличных от нуля собственных значений матрицы $\mathbf{R}_0^2 - \mathbf{C}_N^2$ вызвано присутствием в выражении (6) суммарной матрицы возмущений, равной $R\left(\mathbf{\Delta r} + \mathbf{\Delta r}^{\mathrm{T}}\right) + \mathbf{E}_N$.

Обозначим расположенные в порядке убывания собственные значения матриц $\tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{S}_N^2$ и $\mathbf{R}_0^2 - \mathbf{C}_N^2$ соответственно λ_i^* и λ_i, ($i = 1, 2, \ldots, N$). Принимая во внимание, что $\lambda_i^* = 0$, для $i = 4, 5, ..., N$, след матрицы $\tilde{\mathbf{R}}^2 - \mathbf{S}_N^2$, равный $\sum_{i=1}^{N} r_i^2$, запишем в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* = \lambda_1 + \Delta\lambda_1 + \lambda_2 + \Delta\lambda_2 + \lambda_3 + \Delta\lambda_3\,. \tag{20}$$

Приращения $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3$ к собственным значениям, связанные с суммарной матрицей возмущений $\left[R\left(\mathbf{\Delta r} + \mathbf{\Delta r}^{\mathrm{T}}\right) + \mathbf{E}_N\right]$, в линейном приближении составят [16]

$$\Delta\lambda_i = \boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}} \left[R\left(\mathbf{\Delta r} + \mathbf{\Delta r}^{\mathrm{T}}\right) + \mathbf{E}_N\right] \boldsymbol{\psi}_i\,, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\psi}_i$ – собственные векторы матрицы $\mathbf{R}_0^2 - \mathbf{C}_N^2$, соответствующие собственным значениям λ_i, $i = 1, 2, 3$.

Преобразуя левую часть выражения (20) и исключая малые величины второго порядка, запишем (20) с учетом (21) в виде

$$NR^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2R\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{\Delta r} \boldsymbol{\psi}_i + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{E}_N \boldsymbol{\psi}_i - 2R\sum_{i=1}^{N} \Delta R_i\,. \tag{22}$$

Исключая в (22) слагаемые, значения которых случайны и неизвестны, получаем уравнение, корнем которого является оценка $\hat{R}^2$ квадрата радиуса аппроксимирующей сферы

$$\hat{R}^2 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{N} = 0\,. \tag{23}$$

Фильтрация погрешностей происходит путем обнуления $N-3$ наименьших собственных значений матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, вызванных погрешностями измерений парных расстояний и отклонением формы сферы. Метод назван аддитивным, поскольку минимизируемый функционал представляет сумму собственных значений исследуемой матрицы $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

Поскольку истинное значение квадрата радиуса, как следует из (22) и (23), равно

$$R^2 = \frac{\lambda_1\left(R^2\right)+\lambda_2\left(R^2\right)+\lambda_3\left(R^2\right)}{N} + \frac{2R\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}\boldsymbol{\psi}_i + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_i - 2R\sum_{i=1}^{N}\varDelta R_i}{N}, \tag{24}$$

то, линеаризуя выражение $\dfrac{\lambda_1\left(R^2\right)+\lambda_2\left(R^2\right)+\lambda_3\left(R^2\right)}{N}$ в точке оценки квадрата радиуса $\hat{R}^2$ и вычитая(23) из (24), получаем значение случайной составляющей погрешности $\varDelta\hat{R}^2$ оценки $\hat{R}^2$ в виде

$$\Delta\hat{R}^2 = \frac{2R\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}\boldsymbol{\psi}_i + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_i - 2R\sum_{i=1}^{N}\varDelta R_i}{N-\sum_{i=1}^{3}a_i}, \tag{25}$$

где $a_i = \left(\sum_{j=1}^{N}\psi_{ij}\right)^2$, ψ_{ij} (j = 1, 2, ..., N) – элементы вектора $\boldsymbol{\psi}_i$, i = 1, 2, 3.

Возведя в квадрат выражение (25), осуществляя операцию взятия математического ожидания и учитывая независимость случайных матриц $\mathbf{E}_N$ и $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}$, определим дисперсию $\mathrm{D}\left(\varDelta\hat{R}^2\right)$ погрешности $\varDelta\hat{R}^2$ в виде

$$\mathrm{D}\left(\varDelta\hat{R}^2\right) = \mathrm{M}\left[\left(\varDelta\hat{R}^2\right)^2\right] = \frac{4\hat{R}^2\sigma_m^2}{\Phi} + \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}}{\Phi^2}, \tag{26}$$

где $\varPhi = N-\sum_{i=1}^{3}a_i$; $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}$ – сумма элементов K_{ij} ковариационной матрицы $\mathbf{K}$ вектора $\left[\boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_2 \quad \boldsymbol{\psi}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_3\right]^{\mathrm{T}}$, определяемых по формуле

$$K_{ij} = \mathrm{M}\left[\left(\boldsymbol{\psi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_i\right)\left(\boldsymbol{\psi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_N\boldsymbol{\psi}_j\right)\right] = 2\sigma_s^2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}C_{mn}^2\left(\psi_{mi}\psi_{ni}\right)\left(\psi_{mj}\psi_{nj}\right). \tag{27}$$

Используя линеаризацию функции $R=\sqrt{R^2}$ в точке вычисленного значения $\hat{R}^2$, для дисперсии $\mathrm{D}\left(\varDelta\hat{R}\right)$ оценки $\hat{R}$ имеем

$$D\left(\Delta\hat{R}\right) = \frac{1}{4\hat{R}^2}\left[D\left(\Delta\hat{R}^2\right)\right] = \frac{\sigma_m^2}{\Phi} + \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}}{4\hat{R}^2\Phi^2}. \tag{28}$$

Определим верхнюю границу для дисперсии $\mathrm{D}\left(\varDelta\hat{R}\right)$. Используя для рассматриваемого случая неравенство Коши – Буняковского, получаем $\left(K_{ij}\right)^2 \le K_{ii}K_{jj}$, откуда оценка сверху для суммы элементов K_{ij} ковариационной матрицы $\mathbf{K}$ составит

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}K_{ij} \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sqrt{K_{ii}}\sqrt{K_{jj}} = \left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{K_{ii}}\right)^2. \tag{29}$$

Оценку сверху K_b для диагональных элементов K_{ii}, i = 1, 2, 3 найдем, подставляя в формулу (27) вместо C_{mn} максимально возможное расстояние между двумя точками на сфере, равное диаметру сферы:

$$K_{ii} \le K_b = 8\sigma_s^2 R^2 \sum_{n=1}^{N} \psi_{ni}^2 \sum_{m=1}^{N} \psi_{mi}^2 = 8\sigma_s^2 \hat{R}^2 . \tag{30}$$

Проведя подстановку (30) в (29), имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} K_{ij} \le \left(3\sqrt{K_b}\right)^2 = 72\sigma_s^2 \hat{R}^2 . \tag{31}$$

Подставляя (31) в (28), находим верхнюю границу D_b дисперсии $\mathrm{D}\left(\varDelta\hat{R}\right)$ оценки $\hat{R}$ в виде

$$D_b = \frac{\sigma_m^2}{\Phi} + \frac{18\sigma_s^2}{\Phi^2} . \tag{32}$$

Из (32) следует, что верхняя граница дисперсии D_b оценки $\hat{R}$ зависит от дисперсии σ_m^2, определяющей отклонения формы измеряемой поверхности, дисперсии σ_s^2, характеризующей погрешность средств измерения парных расстояний и параметра Φ, зависящего от протяженности измеряемой сферической поверхности, количества и взаимного расположения на ней фиксированных точек *N*. Отметим, что из (32) также следует, что верхняя граница дисперсии оценки радиуса стремится к бесконечности, когда значение Φ стремится к 0. Последнее имеет место, когда исследуемая поверхность сферы сжимается в точку или когда все точки располагаются в одной, не диаметральной плоскости сферы.

Исследование влияния на параметр Φ протяженности измеряемой сферической поверхности, конфигурации и количества точек *N* осуществлялось имитационным моделированием. Рассматривалось четыре варианта протяженности измеряемых поверхностей, охватывающих поверхность сферы с центральным углом $\omega = 30°,\ 90°,\ 180°, 360°$. В каждом варианте протяженности сферической поверхности случайным образом располагали от 5 до 20 точек на исследуемой поверхности с использованием равномерного закона распределения углов, определяющих широту и долготу каждой точки. Для получения усредненного значения параметра Φ осуществлялось тридцать реализаций случайного размещения точек на измеряемой поверхности.

Анализ полученных данных показал, что для всех вариантов протяженности исследуемой сферической поверхности значение параметра Φ увеличивается почти прямо пропорционально с увеличением количества точек *N*, участвующих в измерении парных расстояний. Это приводит к уменьшению верхней границы дисперсии оценки $\hat{R}$ с ростом *N*, что позволяет сделать вывод о состоятельности предлагаемой оценки радиуса сферической поверхности. Увеличение же абсолютного значения параметра Φ при увеличении протяженности сферической поверхности свидетельствует о повышении эффективности оценки $\hat{R}$ с увеличением протяженности измеряемой сферической поверхности. Максимальное значение параметр Φ ($\Phi \approx N$) принимает при расположении точек на всей поверхности сферы. В этом случае из формулы (32) следует, что оценка $\hat{R}$ является асимптотически эффективной по отношению к принятому количеству точек *N*, между которыми проводятся измерения парных расстояний, так как значение дисперсии D_b при $N \to \infty$ пропорционально величине σ_m^2 / N.

Заключение

Разработаны 2 метода определения радиуса сферической поверхности, имеющей отклонения формы, основанные на линейных измерениях парных расстояний между заданным количеством точек, зафиксированным на измеряемой сферической поверхности. Получены аналитические выражения радиуса сферической поверхности через расстояния между парами точек. Вычислены среднеквадратические отклонения погрешностей оценки радиуса, вызванные погрешностями измерения расстояний и отклонением формы. Определены условия оптимальности конфигураций задаваемого количества точек на сфере, обеспечивающих минимальную дисперсию оценки радиуса. Доказана состоятельность и асимптотическая эффективность получаемых оценок.

Литература

1. Катаргин, М.Ю. Измерение углов поворота твердого тела телевизионной системой на видиконе / М.Ю. Катаргин, А.Г. Комирев, Р.А. Никитин // Тезисы докладов Всесоюзной конференции. – Томск : ТИАСУР, 1981. – С. 112–113.

2. Комплексный моделирующий стенд. – http://www.makeyev.ru/activities/test-center/Kompleks4/ (дата обращения: 01.04.2018).

3. Ризос, И. Стенд на газовом сферическом подшипнике для испытания систем управления угловым положением ИСЗ / И. Ризос, Дж. Арбес, Дж. Рауль // Труды IV симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в пространстве. 1971. Управление в пространстве. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – С. 274–279.

4. Суховилов, Б.М. Использование метода парных расстояний для повышения точности измерения испытательных положений динамического стенда / Б.М. Суховилов // Сборник трудов XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий, раздел «Итоги диссертационных исследований». – М.: РАН, 2006. – С. 73–82.

5. Рубинов, А.Д. Контроль больших размеров в машиностроении: справ. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд., 1982. – 120 с.

6. Герасименко, В.И. Обработка сферических поверхностей // Автомобильный транспорт. – 1981. – № 3. – С. 29.

7. Geometric Tools for Computer Graphics (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics). – 1st Edition by David H. Eberly, Philip J. Schneider. – 2002. – P. 1056.

8. Chernov, N. Least squares fitting of quadratic curves and surfaces / N. Chernov, H. Ma // Computer Vision / Editor S.R. Yoshida. – Nova Science Publishers, 2011. – P. 285–302.

9. Taubin, G. Estimation of Planar Curves, Surfaces and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations, with Applications to Edge and Range Image Segmentation / G. Taubin // IEEE Trans. PAMI. – 1991. – Vol. 13. – P. 1115–1138.

10. Координатные измерительные машины и их применение / А.А. Гапшис, А.Ю. Каспарайтис, М.Б. Модестов и др. – М.: Машиностроение. – 1988. – 102 с.

11. Зубарев, Ю.М. Автоматизация координатных измерений: Учеб. пособие / Ю.М. Зубарев, С.В. Косаревский, Н.Н. Ревин. – СПб.: Изд-во ПИМаш, 2011. – 160 с.

12. FARO Laser Tracker. – https://www.faro.com/ russia/products/faro-laser-tracker/ (дата обращения: 25.03.2018).

13. Суховилов, Б.М. Использование метода парных расстояний для оценки геометрических параметров поверхностей / Б.М. Суховилов // Сборник трудов XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий, разд. «Итоги диссертационных исследований». – М.: РАН, 2006. – С. 61–72.

14. Суховилов, Б.М. Бесконтактный метод измерения парных расстояний / Б.М. Суховилов, Е.А. Григорова // Сборник трудов XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий, разд. «Итоги диссертационных исследований». – М.: РАН, 2006. – С. 11–22.

15. Лоунсон, Ч. Численное решение задач метода наименьших квадратов: пер. с англ. / Ч. Лоунсон, Р. Хенсон. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

16. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 656 с.

Суховилов Борис Максович, д-р техн. наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой информационных технологий в экономике, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; sukhovilovbm@susu.ru.

Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

DOI: 10.14529/ctcr180302

PAIRWISE DISTANCES METHOD FOR DETERMINING RADIUS OF SPHERICAL SURFACE WITH SHAPE DEVIATION

B.M. Sukhovilov, *sukhovilovbm@susu.ru*
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The theoretical positions of the pairwise distance method have been developed as applied to the determination of the radius of a spherical surface with shape deviation. To implement the method, the reference points are placed on the surface under investigation and linear distances are measured between them. The most general case of radius determination is considered, when pairwise distances are measured with errors, and the sphere has random deviations of shape.

The considered approach is the development of the method for determining the radius of a spherical surface over distances measured between four points located on the surface. The specified number of points is the minimum necessary to solve the problem. The implementation of the method for determining the radius of a spherical surface over distances measured between an arbitrary, large, 4-number of points located on the surface is presented.

In the framework of the developed method, analytical expressions for the radius of a spherical surface are obtained through distances between pairs of points and the root-mean-square deviations of errors in the estimates of the radius caused by errors in measuring distances and deviation of the shape are calculated. Conditions for the optimality of the configurations of a given number of points on the sphere that ensure the minimal variance of the estimate of the radius are determined.

The method makes it possible to exclude the use of expensive coordinate machines to obtain a radius estimate, since a simple serial measuring tool can be used to measure pair distances. The evaluation of parameters by the pairwise distances method is suitable in the case of large discontinuous surfaces, when the measured surface is only a part of the total surface, direct measurements are impossible due to the inaccessibility of the measuring bases. The method was applied in a complex of works on the evaluation of the parameters of the alignment of a television system for measuring the angular position of a dynamic stand with a gas support.

Keywords: spherical surface with shape deviation, determination of the radius by the method of pairwise distances, error estimation, the optimal configurations of points on the sphere.

References

1. Katargin M.Yu., Komirev A.G., Nikitin R.A. [Measurement of the Rotation Angles of a Solid Body by a Television System on Vidicon]. *Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii* [Theses of the Reports of the All-Union Conference]. Tomsk, TIASUR Publ., 1981, pp. 112–113. (in Russ.)
2. *Kompleksnyy modeliruyushchiy stend* [Complex Modeling Stand]. Available at: http://www.makeyev.ru/activities/test-center/Kompleks4/ (accessed 01.04.2018).
3. Rizos I., Arbes Dzh., Raul' Dzh. [The Stand on the Gas Spherical Bearing for Testing the Control Systems of the Angular Position of the Satellite]. *Trudy IV simpoziuma IFAK po avtomaticheskomu upravleniyu v prostranstve. 1971. Upravlenie v prostranstve* [Proceedings of IV IFAC Symposium on Automatic Control in Space. 1971. Control in Space]. Moscow, Nauka Publ., 1973, vol. 2, pp. 274–279. (in Russ.)
4. Sukhovilov B.M. [Using the Pairwise Distance Method to Improve the Accuracy of Measuring the Test Positions of the Dynamic Stand]. *Sbornik trudov XXVI Rossiyskoy shkoly po problemam nauki i tekhnologij, razdel "Itogi dissertatsionnykh issledovaniy"* [Collection of Works of the XXVI Russian School on Problems of Science and Technology, Section "The Results of Dissertational Research". Moscow, RAN, 2006, pp. 73–82. (in Russ.)
5. Rubinov A.D. *Kontrol' bol'shikh razmerov v mashinostroenii: spravochnik* [Large-Scale Control in Mechanical Engineering: Reference Book]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1982. 120 p.
6. Gerasimenko V.I. [Processing of Spherical Surfaces]. *Automobile Transport*, 1981, no. 3, p. 29. (in Russ.)

7. Geometric Tools for Computer Graphics. *The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics*, 2002. 1056 p.

8. Chernov N., Ma H. Least Squares Fitting of Quadratic Curves and Surfaces. *Computer Vision*. Nova Science Publishers, 2011, pp. 285–302.

9. Taubin G. Estimation of Planar Curves, Surfaces and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations, with Applications to Edge and Range Image Segmentation. *IEEE Trans. PAMI*, 1991, vol. 13, pp. 1115–1138.

10. Gapshis A.A., Kasparaitis A.Yu., Modestov M.B. et al. *Koordinatnye izmeritel'nye mashiny i ikh primenenie* [Coordinate Measuring Machines and Their Application]. Moscow, Mechanical Engineering Publ., 1988. 102 p.

11. Zubarev Yu.M., Kosarevskiu S.V., Revin N.N. *Avtomatizatsiya koordinatnykh izmereniy. Uchebnoe posobie* [Automation of Coordinate Measurements. Tutorial]. St. Petersburg, PIMash Publ., 2011. 160 p.

12. FARO Laser Tracker. Available at: https://www.faro.com/ russia/products/faro-laser-tracker/ (accessed 25.03.2018).

13. Sukhovilov B.M. [The Pairwise Distance Method for Estimating the Geometric Parameters of Surfaces]. *Sbornik trudov XXVI Rossiyskoy shkoly po problemam nauki i tekhnologij, razdel "Itogi dissertatsionnykh issledovaniy"* [Collection of Works of the XXVI Russian School on Problems of Science and Technology, Section "The Results of Dissertational Research"]. Moscow, RAN, 2006, pp. 61–72. (in Russ.)

14. Sukhovilov B.M., Grigorova E.A. [Non-Contact Method for Measuring Distances]. *Sbornik trudov XXVI Rossiyskoy shkoly po problemam nauki i tekhnologij, razdel "Itogi dissertatsionnykh issledovaniy"* [Collection of Works of the XXVI Russian School on Problems of Science and Technology, Section "The Results of Dissertational Research"]. Moscow, RAN, 2006, pp. 11–22. (in Russ.)

15. Lounson Ch., Henson R. *Chislennoe reshenie zadach metoda naimen'shikh kvadratov* [Numerical Solution of Problems in the Method of Least Squares]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 232 p.

16. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Vychislitel'nye metody lineynoy algebry* [Computational Methods of Linear Algebra]. Moscow, State Publ. House of Physical and Mathematical Literature, 1961. 656 p.

Received 9 March 2018

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Суховилов, Б.М. Приложение метода парных расстояний к оцениванию радиуса сферической поверхности, имеющей случайные отклонения формы / Б.М. Суховилов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 12–21. DOI: 10.14529/ctcr180302

FOR CITATION

Sukhovilov B.M. Pairwise Distances Method for Determining Radius of Spherical Surface with Shape Deviation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 12–21. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr180302