

О ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Н.М. Япарова¹, С.В. Солодуша²

¹ Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия,

² Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Россия

Статья посвящена исследованию точности методов решения задачи измерения, возникающей при определении температуры внутри объекта, подвергаемого влиянию внешнего управляющего теплового воздействия. Подход к построению численного решения задачи измерения, связанной с проблемой определения температуры, основан на сведении первоначальной задачи к решению интегрального уравнения, характеризующего прямую зависимость температуры от измеряемых величин. Интегральное уравнение получено с помощью прямого и обратного преобразований Лапласа с привлечением регуляризующего подхода и математического аппарата теории обратных задач. Результирующее интегральное уравнение относится к классу уравнений Вольтерра I рода типа свертки с ядром, имеющим специфические особенности. В данной работе исследуется точность численных методов решения интегрального уравнения со специфическим ядром с точки зрения механизмов реализации машинной арифметики. Вычислительные схемы методов основаны на использовании product integration method, квадратуры средних прямоугольников. В работе также приведены результаты исследования погрешности вычислительной схемы оптимального по порядку метода, основанного на применении преобразований Фурье и метода проекционной регуляризации. Метод применяется для непосредственного решения исходной задачи без перехода к интегральной модели и позволяет получать численные решения с гарантированной точностью. С целью получения экспериментальной оценки точности численных методов и сравнительного анализа машинной точности методов интегральной аппроксимации и оптимального по порядку метода проведен вычислительный эксперимент. Результаты эксперимента свидетельствуют о принципиальной возможности получения численных решений задачи измерения с высоким уровнем точности.

Ключевые слова: задача измерения, теплоперенос, интегральная модель, уравнение Вольтерра, численный метод, точность метода.

Введение

В современных технологических процессах, связанных с процессами теплообмена, особое внимание уделяется выбору соответствующих температурных режимов, позволяющих реализовать требуемые свойства объекта. Прогнозирование результатов воздействия выбранного режима внешнего теплового воздействия вызывает большой интерес у исследователей. Результаты некоторых исследований, посвященных теплопереносу и динамическим измерениям, представлены в работах [1–8].

Осуществление достоверного прогнозирования напрямую зависит от точности решения соответствующих задач измерения, возникающих в ситуациях, когда требуется оценить результаты предполагаемого внешнего теплового воздействия на изменения температуры в контрольной точке объекта. Математически в линейном приближении задача измерения, связанная с проблемой определения температуры в контрольной точке, представлена в виде обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности с начальными и граничными условиями.

Граничные и начальные условия в задаче измерения, связанной с теплопереносом, формируются на основе результатов температурных измерений, получаемых от различных датчиков температур. Как правило, датчики расположены вблизи внешней границы объекта, и одним из актуальных направлений в решении прикладных задач прогнозирования и связанных с ней задач измерения является разработка методов, позволяющих по результатам граничных измерений определить температуру во внутренних контрольных точках объекта.

В данной работе представлены результаты сравнительного анализа точности численных решений задачи измерения, основанных на интегральной аппроксимации, и вычислительной схемы, разработанной на основе оптимального по порядку метода регуляризации. Надежность и эффективность построенных методов подтверждена результатами вычислительного эксперимента, проводимого на основе тестовых примеров. Предложенные методы могут послужить основой для разработки методов обработки результатов поверхностных температурных измерений с целью осуществления прогнозирования температуры во внутренних контрольных точках.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу измерения, связанную с определением температуры в контрольной точке объекта по результатам граничных измерений. Процесс теплопереноса осуществляется в ситуации, когда внутренние тепловые источники не оказывают существенного воздействия на изменения температуры внутри объекта, а основные характеристики процесса теплопереноса – плотность материала, коэффициент теплоемкости, коэффициент теплопроводности – не претерпевают существенных изменений по пространству и времени. Известно, что в начальный момент времени температура в каждой точке объекта была одинаковой. Геометрическая схема измерения представлена на рис. 1. Датчики измерения температуры расположены в точках O и x_0 , и по результатам измерений требуется определить температуру в контрольной точке A .

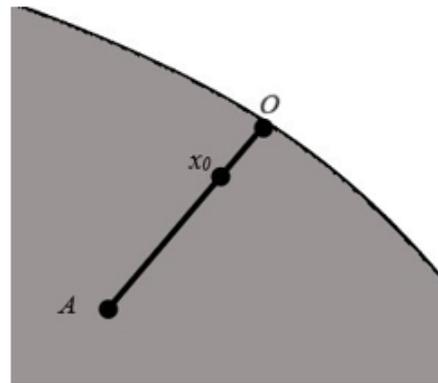


Рис. 1. Геометрическая схема измерений

Введем следующие обозначения. Пусть x – расстояние от точки O , расположенной на границе объекта, до текущей точки на прямой OA , $x \in [0, \ell]$, температура в точке x в текущий момент времени характеризуется функцией $u(x, t)$.

Согласно подходу, изложенному в работе [9], в линейном приближении математическая модель теплопереноса представлена уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Влияние внешнего теплового воздействия характеризуется граничными условиями:

$$u(0, t) = 0, \quad u'_x(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где значения функции $g(t)$ контролируются измерениями в точках O и x_0 . Так как температура объекта в начальный момент времени одинакова в каждой точке, то данная ситуация в простейшем приближении может быть представлена следующими условиями:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \ell). \quad (3)$$

В этой задаче требуется определить температуру $\phi(t)$ в контрольной точке, получаемую в результате внешнего теплового воздействия $g(t)$, то есть необходимо найти

$$u(\ell, t) = \phi(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Основываясь на характеристиках теплопереноса, полагаем, что $g \in C_{[0, T]}^{2+\eta}$, $\eta \in (0, 1)$ и существуют константы $M, C_0, \beta > 0$ такие, что $|g(t)| \leq Me^{mt}$ и $|u(x, t)| \leq C_0 e^{\beta t}$ для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$, а функция $\phi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$.

Заметим, что в реальной практике с течением длительного периода времени неизбежно возникают отклонения измеренных величин $g_s(t)$ от действительных значений $g_0(t)$. Таким образом, необходимо предложить вычислительную схему определения значений $\phi(t)$ в условиях погрешности. В математической модели эту ситуацию представим следующим образом. Известно, что при $g(t) = g_0(t)$ существует точное решение $u(\ell, t) = \phi_0(t)$, но вместо $g_0(t)$ известны некото-

рые приближения $g_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|g_\delta(t) - g_0(t)\|_C \leq \delta$. Требуется найти значения функции $\phi_\delta(t)$, получаемой в результате внешнего воздействия $g_\delta(t)$, удовлетворяющей (1)–(4) и оценить уклонение $\phi_\delta(t)$ от $\phi_0(t)$.

Получаемая задача измерения относится к классу обратных задач и для ее решения необходимо использовать регуляризующие подходы [10–14].

Интегральная модель теплопереноса

В работе [15] исходная задача (1)–(4) сводится к интегральной модели с помощью прямого и обратного преобразований Лапласа, при этом регуляризующий подход используется после применения обратного преобразования. Использование преобразований Лапласа допустимо в силу свойств функций $u(x, t)$, $g(t)$, $\phi(t)$, а регуляризующий подход позволяет установить прямую зависимость неизвестной функции $\phi(t)$ от контролируемого внешнего теплового воздействия $g(t)$. Результирующее уравнение в интегральной модели имеет следующий вид:

$$A\phi = \int_0^t K_N(t-s)\phi(s)ds = y(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$K_N(t-s) = \sum_{q=1}^N (-1)^{q+1} q^2 e^{-\frac{\pi^2 q^2 a(t-s)}{\ell^2}}, \quad y(t) = \frac{\ell^3}{2\pi^2} g(t), \quad (6)$$

где параметром регуляризации является количество слагаемых N в ядре $K_N(t, s)$. Из этого уравнения требуется найти функцию $\phi(t)$ при условии, что $\|y_\delta(t) - y_0(t)\|_C \leq \frac{\delta \ell^3}{2\pi^2}$. Решению уравнений Вольтерра посвящены работы многих исследователей (см., например, [16, 17]). Преимущество использования представленной интегральной модели заключается в том, что из вычислительной схемы исключается неустойчивая численная процедура обратного преобразования Лапласа, а для приближенного решения интегрального уравнения (5), (6) применяются численные методы, обладающие свойством саморегуляризации. При этом в качестве «естественного» параметра регуляризации выступает шаг дискретизации, определенным образом согласованный с уровнем погрешности исходных данных δ .

Специфика уравнений Вольтерра

Основная особенность уравнений Вольтерра, получаемых в результате построения интегральной модели, заключается в том, что ряд (6), определяющий ядро, является знакопеременным, что требует разработки специального подхода к выбору величины N , гарантирующего корректность решения задачи (5), (6).

Заметим, что при решении (5), (6) возникают несколько видов погрешностей, связанных с погрешностью численного метода, а также с аппроксимацией исходной задачи (1)–(4). Остановимся сначала на втором виде погрешностей, обусловленных выбором величины N в ядре $K_N(t, s)$, заданном формулой (6). Без ограничения общности в дальнейшем полагаем, что $\ell = 1$, $a = 1$.

В статье [18] показано, что на точность значений $K_N(\lambda)$, где $\lambda = t - s$, в (6) с ростом параметра N влияет специфика операций машинной арифметики. Известно, вещественное число $x = s \cdot M \cdot 10^{-L+p}$ можно однозначно определить значениями (s, M, p, f) , где $s \in \{-1, 0, +1\}$ является знаком числа, $M \in \{10^{L-1}, 10^{L-1} + 1, \dots, 10^L - 1\} \cup \{0\}$ – мантисса числа, L – число позиций мантиссы, p – порядок числа. Дополнив общепринятое представление вещественного числа параметром f , который соответствует числу достоверных цифр в мантиссе (начиная слева), проиллюстрируем изменение точности результата.

Приведем типовые случаи накопления систематических ошибок. Расчеты выполним в системе компьютерной алгебры MAPLE.

Пример 1. Пусть в ядре (7) количество слагаемых $N = 50$. Полагаем

$$x_1 = \sum_{q=1}^{34} (-1)^{q+1} q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0}, \quad x_2 = \sum_{q=35}^{50} (-1)^{q+1} q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0},$$

$$x_3 = \sum_{q=1}^{10} (-1)^{q+1} q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0}, \quad x_4 = \sum_{q=11}^{50} (-1)^{q+1} q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0}.$$

Вычислим значение $K_N(\lambda_0)$, $\lambda_0 = 10^{-3}$ при длине мантиссы $L \geq 8$. В таблице даны результаты точности вычисления суммы $x_\Sigma = x_1 + x_2$ и разности $x_\Delta = |x_4| - |x_3|$.

Зависимость точности вычисления от параметра N

L	M_Σ	f_Σ	M_Δ	f_Δ
8	18656737	6	00000006	0
9	186567422	8	000000004	0
10	1865674269	8	0000000006	0
11	18656742737	11	00000000014	1
12	186567427373	11	000000000133	3
13	1865674273715	12	0000000001339	4
14	18656742737137	13	00000000013396	4

Мантиссы суммы M_Σ и разности M_Δ приведены во втором и четвертом столбцах таблицы, количество достоверных цифр f_Σ, f_Δ в мантиссах указано в третьем и пятом столбцах соответственно.

Таким образом, для обеспечения гарантированной точности вычислений значений функции K_N при $t \rightarrow 0$ с ростом числа слагаемых N в (6) требуется увеличивать длину мантиссы L .

Численные методы

Перейдем к численным методам решения уравнения (5), (6). Введем равномерную сетку узлов $t_i = ih, t_{j-\frac{1}{2}} = (j - \frac{1}{2})h, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, i}, n = \frac{T}{h}$. Определим значение шага дискретизации в зависимости от параметра N .

Вычислительный эксперимент в [18] показал, что с увеличением числа слагаемых N в (7) значения корней λ^* уравнения $K_N(\lambda) = 0$ убывают (при этом имеет место монотонность отдельно по четным и по нечетным N). Величина λ^* ограничивает сверху величину шага дискретизации h , гарантируя тем самым отличие от нуля значение сеточного аналога функции K_N в первом узле сетки. Напомним, что условие $K_N(0) \neq 0$ является необходимым условием для корректности (5), (6) на паре пространств $(C, C_{[0, T]}^{(1)})$, где $y(0) = 0, y'(t) \in C_{[0, T]}, t \in [0, T]$.

Аппроксимация интеграла в (5) реализовывалась с помощью product integration method и квадратуры средних прямоугольников. Сеточный аналог, получаемый с помощью product integration method, имеет следующий вид:

$$\sum_{q=1}^N (-1)^{q+1} q^2 \sum_{j=1}^i \phi_{j-\frac{1}{2}} h \int_{(j-1)h}^{jh} e^{-\pi^2 q^2 (ih-s)} ds = y_i^h, \tag{7}$$

а сеточный аналог, получаемый посредством квадратуры средних прямоугольников, определяется формулой:

$$h \sum_{q=1}^N (-1)^{q+1} q^2 \sum_{j=1}^i e^{-\pi^2 q^2 (j-\frac{1}{2})h} \phi_{i-j+\frac{1}{2}} h = y_i^h \tag{8}$$

соответственно. С целью оценки точности применения методов, учитывающих специфику урав-

нения, был проведен сравнительный анализ погрешностей решений, получаемых с помощью этих методов, с погрешностью приближенных решений, найденных посредством оптимального по порядку метода.

Согласно [19], оптимальным методом является метод, имеющий наименьшую погрешность численных решений. Метод является оптимальным по порядку, если погрешность численных решений, полученных этим методом, имеет тот же порядок, что и погрешности численных решений, полученных с помощью оптимального метода.

Рассматриваемый в данной работе оптимальный по порядку метод использовался для непосредственного решения задачи (1)–(4) без перехода к интегральной модели. Метод основан на применении преобразований Фурье и проекционной регуляризации. В работе [20] доказано, что использование метода проекционной регуляризации позволяет находить приближенные решения задачи (1)–(4) с гарантированной точностью, когда порядок погрешности вычисляемых значений является наименьшим из возможных.

Вычислительная схема метода представлена в работе [15]. Основные этапы вычислительной процедуры заключаются в следующем. Сначала к исходным данным $g(t)$ применяют интегральное преобразование Фурье, реализуемое с помощью стандартных программных продуктов. Далее, используя проекционную регуляризацию, полученные образы $g_F(\lambda)$ преобразуют в значения $g_F(\lambda, \alpha(\delta))$ в зависимости от допустимого уровня погрешности δ . Параметр α выбирается из принципа невязки. Затем определяют Фурье-образы $u_F(\lambda)$ численного решения согласно формуле

$$u_F(\lambda) = \frac{2sh\left(\mu\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\ell\right)}{\mu\sqrt{\frac{\lambda}{a}}}\ g_F(\lambda, \alpha(\delta)), \quad (9)$$

где $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Приближенные решения задачи (1)–(4) определяются формулой

$$\phi_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re}(u_F(\ell, t)), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Порядок теоретической погрешности метода, основанного на проекционной регуляризации, составляет $\|\phi_\delta(t) - \phi_0(t)\| \propto \ln^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)$ и, согласно критерию оптимальности, является оптимальным по порядку.

Результаты вычислительного эксперимента

Найдем приближенные решения задачи (1)–(4) с помощью (5), (6) с заданным достоверным числом цифр в сеточном решении. Рассмотрим случай, когда правая часть (5), (6) известна точно. Также найдем приближенные решения $\phi_\delta(t)$ задачи (1)–(4) для приближенных значений $g_\delta(t)$, используя оптимальный по порядку метод (9), (10), основанный на проекционной регуляризации заданных с уровнем погрешности δ .

Пример 2. Пусть $N = 2, h = \frac{1}{27}, T = 1$. В качестве тестовой функции $\phi_0(t)$ используем

$$\phi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}}{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}} - t, \quad \alpha = 10^{-1}. \text{ На рис. 2 приведены графики погрешностей } \varepsilon_j = |\phi(t) - \phi_0(t)|, \quad j = \overline{1, 4},$$

сеточных решений.

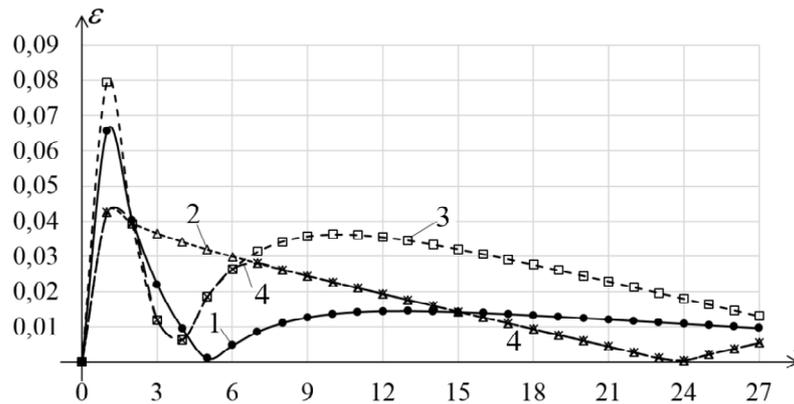


Рис. 2. Погрешности сеточных решений при точно заданных исходных данных

Результаты сравнительного анализа погрешностей методов при точно заданной правой части уравнения (6) представлены на рис. 2. По оси абсцисс указаны номера итераций. График ε_1 (линия 1) иллюстрирует погрешность решения, полученного с помощью оптимального по порядку метода. График ε_2 (линия 2) соответствует погрешности решения, полученного с помощью product integration method. График ε_3 (линия 3) соответствует погрешности решения, полученного с помощью метода средних прямоугольников, а график ε_4 (линия 4) иллюстрирует погрешность результатов комбинированного использования разностных методов. В результате погрешность ε_4 комбинированного метода составляет $\varepsilon_4 = \min\{|\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|\}$, а максимальные значения погрешностей составили

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq 27} \varepsilon_1 &= 0,0656, & \max_{1 \leq i \leq 27} \varepsilon_2 &= 0,0424, \\ \max_{1 \leq i \leq 27} \varepsilon_3 &= 0,0795, & \max_{1 \leq i \leq 27} \varepsilon_4 &= 0,0424. \end{aligned}$$

Вычислительный эксперимент показал, что оба разностных метода имеют порядок сходимости $O(h^2)$, хотя при сравнении ε_2 и ε_3 получено, что применение метода интегрирования произведения предпочтительней, так как $\max_{1 \leq i \leq 27} \varepsilon_2 < \max_{1 \leq i \leq 27} \varepsilon_3$.

Учитывая, что исходные данные известны с некоторой погрешностью δ , рассмотрим случай пилообразного возмущения сеточной функции:

$$\tilde{y}(t_i) = y(t_i) + (-1)^i 10^{-3}, \quad i = \overline{1, 27}, \quad nh = 1,$$

обозначив модуль погрешности численного решения при возмущенных исходных данных через $\tilde{\varepsilon}_j, j = \overline{1, 4}$. Выбор шага для вычисления решения (5), (6) проведем с помощью метода Фибоначчи с десятью испытаниями. На рис. 3 приведены модули погрешностей сеточных решений с шагом

$h = \frac{1}{27}$ (это значение с точностью $\delta = 10^{-3}$ соответствует величинам, которые получены с помощью метода Фибоначчи при фиксированном уровне возмущений). При этом максимальные значения погрешностей решений для возмущенных исходных данных составили

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq 27} \tilde{\varepsilon}_1 &= 0,0629, & \max_{1 \leq i \leq 27} \tilde{\varepsilon}_2 &= 0,0619, \\ \max_{1 \leq i \leq 27} \tilde{\varepsilon}_3 &= 0,0638, & \max_{1 \leq i \leq 27} \tilde{\varepsilon}_4 &= 0,0609. \end{aligned}$$

Из рис. 3 видно, что наименьшую погрешность из аппроксимационных методов имеет решение (5), полученное с помощью комбинации метода средних прямоугольников (7) и product integration method (8). При этом, несмотря на то, что для оптимального по порядку метода с увеличением числа итераций наблюдается значительное уменьшение значений погрешности $\tilde{\varepsilon}_1$, но на начальном этапе эти значения достаточно велики.

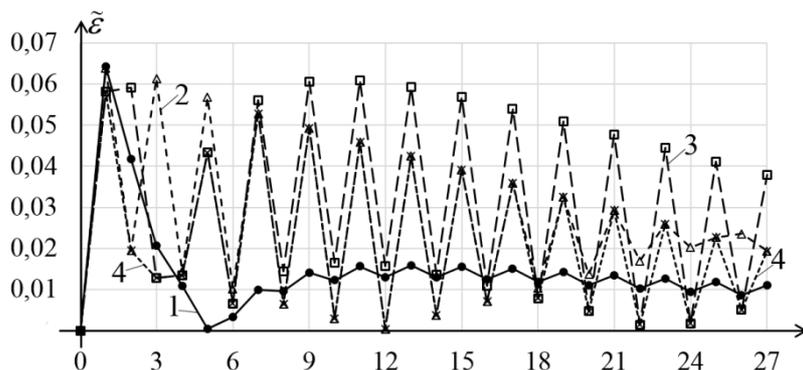


Рис. 3. Погрешности сеточных решений при возмущенных исходных данных

Таким образом, результаты экспериментов для невозмущенных и возмущенных значений $y(t)$ показывают сопоставимость по точности вычислений $\varphi(t)$ подходов, основанных на применении оптимального по порядку метода и предлагаемых численных методов приближенного решения интегрального уравнения (5), (6), основанных на интегральной аппроксимации.

Заключение

В работе представлены результаты сравнительного анализа точности численных методов уравнения Вольтерра I рода со специфическим ядром и оптимального по порядку метода решения обратной граничной задачи теплопроводности. Численные методы решения интегрального уравнения основаны на использовании product integration method и квадратуры средних прямоугольников. Оптимальный по порядку метод основан на преобразованиях Фурье и проекционной регуляризации. Показана динамика изменения погрешности каждого метода на каждом итерационном шаге. Показана сопоставимость величин погрешностей аппроксимационных численных методов и оптимального по порядку метода.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации прикладных научных исследований в рамках базовой части Государственного задания «Разработка, исследование и реализация алгоритмов обработки данных динамических измерений пространственно-распределенных объектов», техническое задание 8.9692.2017/8.9 от 17.02.2017.

Литература

1. Идентификация метаматематических моделей теплопереноса в разлагающихся материалах. / О.М. Алифанов, С.А. Будник, А.В. Ненарокомов, А.В. Нетелев // *Тепловые процессы в технике*. – 2011. – № 8. – С. 338–347.
2. Павлюченков, И.А. О решении сопряженной задачи тепло- и массопереноса для слитка, полученного методом электрошлаковой наплавки жидким металлом / И.А. Павлюченков, С.А. Усенко // *Известия высших учебных заведений. Черная Металлургия*. – 2012. – № 55 (2). – С. 29–31.
3. Лукин, С.В. Оптимизация вторичного охлаждения в машине непрерывного литья заготовок / С.В. Лукин, А.В. Гофман, Н.Г. Баширов // *Вестник Череповецкого государственного университета*. – 2010. – № 1 (24). – С. 115–120.
4. Joachimiak, M. Solution of inverse heat conduction equation with the use of Chebyshev polynomials / M. Joachimiak, A. Frackowiak, M. Cialkowski // *Archives of Thermodynamics*. – 2016. – Vol. 37, no. 4. – P. 73–88. DOI: 10.1515/aoter-2016-0028
5. Beck, J.V. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems* / J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. St. Clair, jr. – New York: Wiley-Interscience, 1985. – 308 p.
6. Yaparova, N.M. Method for temperature measuring inside a cylindrical body based on surface measurements / N.M. Yaparova, A.L. Shestakov // *14th IMEKO TC10 Workshop on Technical Diagnostics 2016: New Perspectives in Measurements, Tools and Techniques for Systems Reliability, Maintainability and Safety*. – 2016 – P. 8–12.

7. Bulatov, M.V. An integral method for the numerical solution of nonlinear singular boundary value problems / M.V. Bulatov, P.M. Lima, Do.T. Thanh // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 5–13. DOI: 10.14529/mmp150401
8. Shestakov, A.L. Modal Synthesis of a measurement transducer / A.L. Shestakov // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 67–75.
9. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
10. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 264 с.
11. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибир. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
12. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 287 с.
13. Табаринцева, Е.В. О решении граничной задачи для параболического уравнения методом вспомогательных граничных условий / Е.В. Табаринцева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – № 32 (249). – С. 68–76.
14. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
15. Yaparova, N.M. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem / N.M. Yaparova // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2014. – Vol. 22, no. 5. – P. 832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614
16. Апарцин, А.С. О применении различных квадратурных формул для приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А.С. Апарцин // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: ИГУ, 1973. – С. 107–116.
17. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
18. Солодуша, С.В. Применение численных методов для уравнений Вольтерра I рода, возникающих в обратной граничной задаче теплопроводности / С.В. Солодуша // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2015. – Т. 11. – С. 96–105.
19. Бакушинский, А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Из-во Моск. гос. ун-та, 1989. – 199 с.
20. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.

Япарова Наталья Михайловна, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; iaparovann@susu.ru.

Солодуша Светлана Витальевна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск; solodusha@isem.irk.ru.

Поступила в редакцию 15 декабря 2018 г.

ON THE ACCURACY OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE VOLTERRA EQUATIONS OF THE KIND IN THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

N.M. Yaparova¹, iaparovnm@susu.ru,
S.V. Solodusha², solodusha@isem.irk.ru

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,

² Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation

The article is devoted to the study of the accuracy of methods for solving the measurement challenge that arises when determining the temperature inside an object subjected to the influence of an external control thermal effect. The approach to the construction of a numerical solution of the measurement problem associated with the problem of determining temperature is based on reducing the initial problem to solving an integral equation that are characterized the direct dependence of temperature on the measured values. The integral equation is obtained using the direct and inverse Laplace transforms with the involvement of the regularizing approach and the regularization technique. The resulting integral equation is the Volterra equations of the first kind of convolution type with a specific kernel. In this paper, we investigate the accuracy of numerical methods for solving an integral equation with a specific kernel from the point of view of the mechanisms for the implementation of machine arithmetic. Computing method schemas are based on the product integration method, squaring the middle rectangles. The article also presents the results of a study of the error of the computational scheme of the order-optimal method based on the application of Fourier transforms and the projection regularization method. The method is used to directly solve the original problem without reducing it to an integral model and allows one to obtain numerical solutions with guaranteed accuracy. In order to obtain experimental estimates of the accuracy of numerical methods and a comparative analysis of the machine accuracy of the integral approximation methods and the order-optimal method, a computational experiment was carry out. The experimental results indicate that it is possible to obtain the numerical solutions of the measurement challenge with a high level of accuracy.

Keywords: measurement challenge, heat transfer, integral model; Volterra equation; numerical method, method accuracy.

The work was conducted with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation of applied scientific research within the framework of the basic part of the State task “Development, research and implementation of data processing algorithms for dynamic measurements of spatially distributed objects”, Terms of Reference 8.9692.2017/8.9 from 17.02.2017.

References

1. Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V., Netelev A.V. [Identification of Mathematic Models of Heat Transfer in Decomposing Materials]. *Thermal Processes in Engineering*, 2011, no. 8, pp. 338–347. (in Russ.)
2. Pavlyuchenkov I.A., Usenko S.A. [On the Solution of the Coupled Problem of Heat and Mass Transfer for an Ingot Obtained by the Method of Electroslag Surfacing with Liquid Metal]. *News of Higher Educational Institutions. Ferrous Metallurgy*, 2012, no. 55 (2), pp. 29–31. (in Russ.)
3. Lukin S.V., Gofman A.V., Bashirov N.G. [Optimization of Secondary Cooling in a Continuous Casting Machine]. *Bulletin of Cherepovets State University*, 2010, no. 1 (24), pp. 115–120. (in Russ.)
4. Joachimiak M., Frackowiak A., Cialkowski M. Solution of Inverse Heat Conduction Equation with the Use of Chebyshev Polynomials. *Archives of Thermodynamics*, 2016, vol. 37, no. 4, pp. 73–88. DOI: 10.1515/aoter-2016-0028
5. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R., jr. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. New York, Wiley-Interscience, 1985. 308 p.

6. Yaparova N.M., Shestakov A.L. Method for Temperature Measuring inside a Cylindrical Body Based on Surface Measurements. *14th IMEKO TC10 Workshop on Technical Diagnostics 2016: New Perspectives in Measurements, Tools and Techniques for Systems Reliability, Maintainability and Safety*, 2016, pp. 8–12.
7. Bulatov M.V., Lima P.M., Thanh Do.T. An Integral Method for the Numerical Solution of Nonlinear Singular Boundary Value Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modeling and Programming*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 5–13. DOI: 10.14529/mmp150401
8. Shestakov A.L. Modal Synthesis of a Measurement Transducer. *Problems of Management and Informatics*, 1995, no. 4, pp. 67–75.
9. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1999. 799 p.
10. Vasin V.V., Ageev A.L. *Nekorrektnyye zadachi s apriornoy informatsiyey* [Incorrect Tasks with an Apriori Information]. Ekaterinburg, Nauka Publ., 1993. 264 p.
11. Kabanikhin S.I. *Obratnyye i nekorrektnyye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Siberian Scientific Publ. House, 2009. 457 p.
12. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. *Nekorrektnyye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 287 p.
13. Tabarintseva E.V. [About Solution of the Boundary Inverse Problem for Parabolic Equation by Means of Subsidiary Boundary Conditions Method]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2011, no. 32 (249), pp. 68–76. (in Russ.)
14. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 232 p.
15. Yaparova N.M. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, vol. 22, no. 5, pp. 832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614
16. Apartsyn A.S. [On the Application of Different Quadrature Formulas for Approximate Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind by the Method of Quadrature Sums]. *Differential and Integral Equations*, Irkutsk, Irkutsk State University, 1973, pp. 107–116. (in Russ.)
17. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nyye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1986. 543 p.
18. Solodusha S.V. [Application of Numerical Methods for the First Kind Volterra Equations Arising in the Inverse Boundary Value Heat Conduction Problem]. *Bulletin of the Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2015, vol. 11, pp. 96–105. (in Russ.)
19. Bakushinskiy A.B., Goncharskiy A.V. *Nekorrektnyye zadachi. Chislennyye metody i prilozheniya* [Invalid Tasks. Numerical Methods and Applications]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1989. 199 p.
20. Tanana V. P., Yaparova N.M. [The Optimum in Order Method of Solving Conditionally-Correct Problems]. *Siberian Journal of Computational Mathematics*, 2006, vol. 9, no. 4, pp. 353–368. (in Russ.)

Received 15 December 2018

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Япарова, Н.М. О точности численных методов решения уравнений Вольтерра I рода в задачах теплопереноса / Н.М. Япарова, С.В. Солодуша // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 20–29. DOI: 10.14529/ctcr190102

FOR CITATION

Yaparova N.M., Solodusha S.V. On the Accuracy of Numerical Methods for Solving the Volterra Equations of the Kind in the Inverse Heat Conduction Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 20–29. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr190102