

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ СБЛИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С АСТЕРОИДОМ

Г.А. Левина, И.С. Дахтин

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Движение космического аппарата рассматривается в области, находящейся вне сфер действия планет Солнечной системы, гравитационное действие астероида определяется в рамках ограниченной задачи двух тел. Постановка динамической задачи выполнена для поступательного движения космического аппарата относительно астероида с учетом собственного вращения небесного тела. Построение оптимальных траекторий в задаче сближения космического аппарата с астероидом выполняется методами вариационного исчисления. Сформулирована вариационная задача с ограничениями на управление в виде неравенств, решение которой построено путем сведения задачи к классической постановке по методу Валентайна. Даны решения уравнений Эйлера – Лагранжа для вариационной задачи с функционалом, связанным с расходом топлива реактивных двигателей. Получены численно-аналитические решения для частных случаев в условиях пренебрежения гравитацией астероида, рассматриваемых без учета кориолисовых сил инерции космического аппарата и с учетом этих сил. Оптимальное управление, полученное в этих решениях, является непрерывным (гладким или кусочно-гладким) или кусочно-непрерывным с одной или несколькими точками переключения, в зависимости от параметров задачи. Для обоснования оптимальности использованы условия Лежандра. Рассмотрено влияние начальных параметров движения космического аппарата, времени полета, величины максимальной тяги и величины угловой скорости астероида на вид управления и траектории. Представленный в статье метод изучения движения космического аппарата вблизи астероида позволяет получить численные оценки параметров полета, которые могут быть использованы при планировании миссии сближения.

Ключевые слова: вариационное исчисление, оптимальное управление, космический аппарат, траектории сближения с астероидом.

Введение

Задачи, представленные в работе, связаны с проблемой посадки космического аппарата на астероид. Известны описания выполненных миссий мягкой посадки на малые небесные тела: миссия NEAR – Shoemaker (посадка на астероид Эрос) [1], миссия Hayabusa (астероид Итокава) [2], миссия Розетта (комета Чурюмова – Герасименко) [3]. Большое внимание уделяется теоретическим исследованиям в этой области, в том числе поиску оптимальных траекторий сближения космического аппарата (КА) с астероидом на основе прикладной теории оптимального управления. Анализ задач оптимизации орбитальных маневров в рамках задачи двух тел с функционалом массового расхода топлива, с применением принципа максимума, содержится в «Астродинاميке» А.А. Суханова [4]. Формулировка и решение задач оптимальных траекторий посадки КА на астероид приведены в работе G. Lantoine, R.D. Braun [5]. Исследование вариационной проблемы оптимальных траекторий для автономного космического наведения дано в работе Д.М. Азимова [6]. Анализ космических траекторий для экспедиции Земля – Апофис – Земля и движения космического аппарата вокруг астероида Апофис приведен в работе А. Лан [7]. Исследование влияния гравитационного поля астероида на движение КА вблизи астероида представлено в статье В.Г. Поля [8].

В настоящей работе представлены численно-аналитические решения задачи об оптимальных траекториях, полученные на основе методов вариационного исчисления, для миссии сближения космического аппарата с малым небесным телом в дальнем космосе, вне сфер действия планет Солнечной системы. Особенность выполненного исследования – в изучении влияния начальных и других параметров миссии сближения на вид оптимального управления.

В численном моделировании используются данные астероида Апофис согласно источнику [9]. Некоторые вопросы постановки задачи близки к приведенным в работе [5].

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается поступательное движение космического аппарата (КА) относительно астероида (траекторная задача). Вводится система координат $Oxuz$, начало которой совпадает с центром масс астероида, а ось Oz направлена по вектору угловой скорости астероида $\vec{\omega}$. С космическим аппаратом связаны центральные оси x_1, y_1, z_1 , ориентированные параллельно соответствующим осям астероида.

Принимаются следующие допущения:

- гелиоцентрическая система координат (СК) является инерциальной, движение КА рассматривается в области, находящейся вне сфер действия планет Солнечной системы;
- космический аппарат испытывает действие гравитационных сил астероида и сил тяги реактивных двигателей;
- гравитационное действие астероида на КА можно рассматривать в рамках ограниченной задачи двух тел [10];
- угловая скорость вращения астероида является постоянной;
- изменение массы КА вследствие расхода топлива реактивного двигателя пренебрежимо мало.

Обозначим через x, y, z координаты центра масс КА. Введем фазовые координаты:

$$x_1 = x; x_2 = \dot{x}; x_3 = y; x_4 = \dot{y}; x_5 = z; x_6 = \dot{z}.$$

Уравнения относительного движения КА записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \dot{x}_2 = 2\omega x_4 + \omega^2 x_1 - G \frac{m_A}{r^3} x_1 + \frac{P_x}{m}; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \dot{x}_4 = -2\omega x_2 + \omega^2 x_3 - G \frac{m_A}{r^3} x_3 + \frac{P_y}{m}; \\ \dot{x}_5 &= x_6; \dot{x}_6 = -G \frac{m_A}{r^3} x_5 + \frac{P_z}{m}, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса КА; m_A – масса астероида; $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ – главный вектор сил тяги двигателей КА, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

Укажем конечные условия, соответствующие интервалу времени $[t_0, T]$:

$$x_i(t_0) = x_{i_0}; x_i(T) = x_{i_1}, i = \overline{1, 6}, \quad (2)$$

где моменту времени t_0 соответствуют начальные условия миссии сближения, моменту T – условия мягкой посадки на астероид.

Рассмотрим силы тяги двигателей как управляющие действия и обозначим: $u_1 = P_x, u_2 = P_y, u_3 = P_z$.

Введем функционал

$$J = \int_{t_0}^T k^2 (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) dt, \quad (3)$$

где k – положительная величина, обратная скорости истечения газовой струи из реактивного сопла двигателя.

Представим тот случай, когда для управления движением КА используются 6 одинаковых реактивных сопел, установленных по осям x_1, y_1, z_1 , связанным с КА. Суммарный расход топлива за время движения определим в соответствии с уравнением И.В. Мещерского [11] по формуле

$$Q = \int_{t_0}^T k (|P_{x_1}| + |P_{y_1}| + |P_{z_1}|) dt. \quad (4)$$

Управление в технических системах

Укажем связь функционала (3) с оценкой величины расхода топлива в задаче сближения. Рассматривая величины $|P_{x_1}|, |P_{y_1}|, |P_{z_1}|$ как компоненты трехмерного вектора и применяя неравенство Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$|P_{x_1}| + |P_{y_1}| + |P_{z_1}| \leq \sqrt{3(P_{x_1}^2 + P_{y_1}^2 + P_{z_1}^2)}.$$

Так как повороту осей $Ox_1y_1z_1$ соответствует линейное ортогональное преобразование координат, то справедлива оценка

$$Q \leq k\sqrt{3} \int_{t_0}^T \sqrt{(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)} dt.$$

Из последнего неравенства следует, что с помощью решения вариационной задачи о минимуме функционала (3) можно получить оценку сверху расхода топлива на оптимальном решении. Эта оценка может быть полезной при проектировании КА [12].

Пусть существуют ограничения на значения управлений u_i :

$$|u_j| \leq U_j, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

Следуя методу Ф. Валентайна (F.A. Valentine), вводим вспомогательные функции ρ_j и дополнительные управления u_{3+j} и переходим от неравенств (5) к равенствам [13, 14]:

$$\rho_j = u_j^2 + u_{3+j}^2 - U_j^2 = 0, \quad U_j = \text{const}, \quad U_j > 0. \quad (6)$$

Формулируем вариационную задачу: на множестве непрерывных функций $x_i(t), i = \overline{1, 6}$, удовлетворяющих системе (1) и конечным условиям (2), и множестве кусочно-непрерывных управлений $u_i(t), i = \overline{1, 6}$, удовлетворяющих на промежутке $t_0 \leq t \leq T$ соотношениям (6), найти такие, которые сообщают функционалу (3) минимальное значение.

Заметим, что момент времени T может быть заданным или подлежащим определению.

Перейдем к расширенному функционалу

$$J_1 = J + \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^6 \psi_i g_i + \sum_{j=1}^3 \mu_j \rho_j \right) dt + \sum_{k=1}^{14} \gamma_k \lambda_k, \quad (7)$$

где ψ_i, μ_j, γ_k – множители Лагранжа; $\psi_i(t), \mu_j(t)$ – функции времени; γ_k – постоянные; $g_i = \dot{x}_i - \varphi_i$, φ_i – правые части динамических уравнений (1); λ_k – функции, учитывающие конечные условия:

$$\lambda_i = x_i(t_0) - x_{i_0} = 0; \quad \lambda_{6+i} = x_i(T) - x_i = 0, \quad i = \overline{1, 6};$$

$$\lambda_{13} = t_0 - t_0^* = 0; \quad \lambda_{14} = T - T^* = 0.$$

С введением гамильтониана

$$H = H(x_i, u_j, \psi_i, \mu_j) = -\varphi_0 + \sum_{i=1}^6 \psi_i \varphi_i + \sum_{j=1}^3 \mu_j \rho_j, \quad i = \overline{1, 6}, \quad j = \overline{1, 3}$$

и с использованием обозначений $\varphi_0 = k^2(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)$, $\Gamma = \sum_{k=1}^{14} \gamma_k \lambda_k$ функционал (7) принимает

вид

$$J_1 = \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^6 \psi_i \dot{x}_i - H \right) dt + \Gamma.$$

Записываем необходимые условия экстремума функционала J_1 , следующие из обращения в ноль его первой вариации:

$$\dot{x}_i - \frac{\partial H}{\partial \psi_i} = 0; \quad \dot{\psi}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \mu_j} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i(t_0)} - \psi_i(t_0) = 0; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i(T)} + \psi_i(T) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_0} + H(t_0) = 0; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial T} - H(T) = 0. \quad (11)$$

Если какое-либо из управлений терпит разрыв первого рода в точке t' , то к условиям (8)–(11) добавляются условия непрерывности фазовых координат

$$x_i(t' - 0) = x_i(t' + 0)$$

и соотношения, следующие из условий Эрдмана – Вейерштрасса, которые в данном случае принимают вид:

$$H(t' - 0) = H(t' + 0); \quad \psi_i(t' - 0) = \psi_i(t' + 0).$$

Рассматривая вторую вариацию функционала J_1 ,

$$\delta^2 J_1 = - \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^6 \delta \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right) dt$$

и применяя условие Лежандра [14, 15], приходим к неравенству

$$G(\delta u_1, \dots, \delta u_6) = - \sum_{i,j=1}^6 H_{u_i u_j} \delta u_i \delta u_j > 0. \quad (12)$$

Так как коэффициенты $H_{u_i u_j}$ ($i \neq j$) квадратичной формы G равны нулю, то из условия (12) следуют неравенства

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} < 0, \quad i = \overline{1, 6}. \quad (13)$$

В случае ослабленного условия Лежандра по переменной u_k имеем неравенство

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_k^2} \leq 0.$$

2. Оптимальное управление сближением для частных случаев

Рассмотрим задачи сближения КА с астероидом, в которых гравитационными силами в уравнениях движения можно пренебречь. В работе В.Г. Поля [8] показано, что при изучении движения КА вблизи малого небесного тела такое допущение справедливо. Выделим два случая для изучения: движение без учета кориолисовых сил инерции КА и с учетом этих сил. Далее примем $t_0 = 0$, T – длительность полета.

2.1 Решение задачи без учета кориолисовых сил инерции

В таком простейшем варианте вид уравнений движения по каждой из осей системы координат Ox_{uz} одинаков, поэтому можно рассмотреть задачу для движения по направлению одной из координатных осей с уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = \frac{u_1}{m}. \quad (14)$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда ограничения на управление отсутствуют, а момент времени T задан. Гамильтониан записывается в виде

$$H = H(x_1, x_2, u_1, \psi_1, \psi_2) = -ku_1^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \frac{u_1}{m}.$$

Из необходимых условий (8), (9) следуют уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1; \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = -2k^2 u_1 + \frac{\psi_2}{m} = 0. \quad (16)$$

Условие Лежандра (13) в этом случае выполняется. Получаем общее решение системы (15) для множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} \psi_1 = C_{1\psi}; \\ \psi_2 = -C_{1\psi}t + C_{2\psi} \end{cases} \quad (17)$$

и управление u_1 в виде функции

$$u_1(t) = \frac{\psi_2(t)}{2k^2 m}. \quad (18)$$

Общее решение определяющей системы (14), полученное с учетом равенств (17), (18), имеет вид:

$$x_1 = \frac{1}{2k^2 m^2} \left(-\frac{C_{1\psi}}{6} t^3 + \frac{C_{2\psi}}{2} t^2 \right) + C_{2x} t + C_{1x};$$

$$x_2 = \frac{1}{2k^2 m^2} \left(-\frac{C_{1\psi}}{2} t^2 + C_{2\psi} t \right) + C_{2x}.$$

Постоянные интегрирования $C_{1\psi}, C_{2\psi}, C_{1x}, C_{2x}$ находим с помощью конечных условий (2).

Полученные решения иллюстрированы рис. 1–3. Представленные варианты различаются начальными условиями и длительностью полёта, приведены результаты для большого и малого времени полета, в последнем случае выделены случаи сближения с большого и с малого расстояния от астероида. Суммарный расход Q топлива определяется по формуле (4).

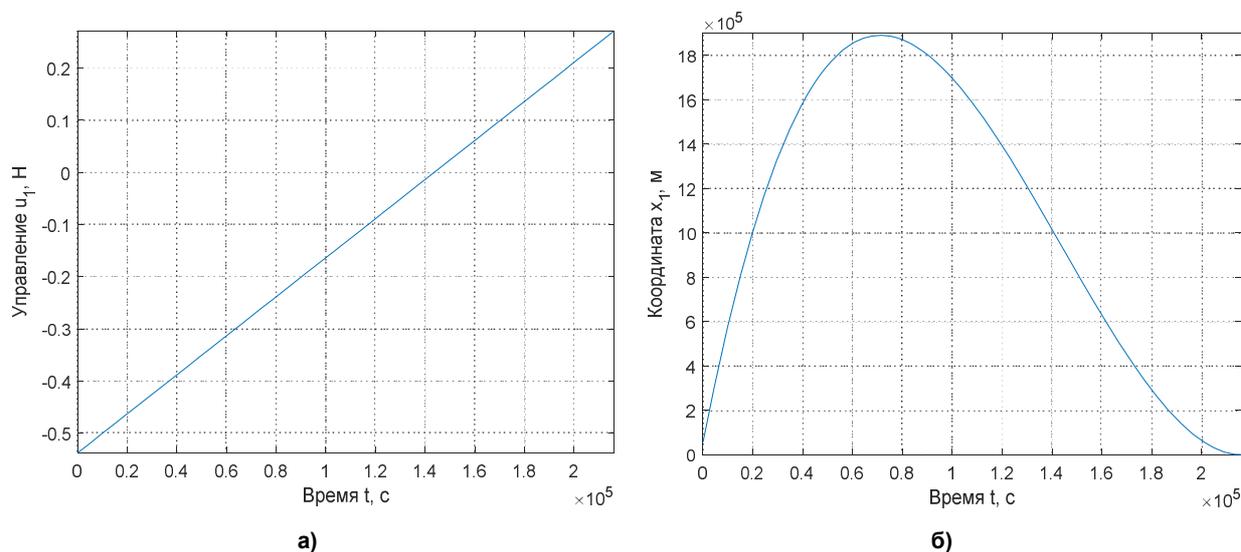


Рис. 1. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 57\,735$ м; $x_{20} = 57,7$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 216\,000$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м. Расход топлива – 51,12 кг; а – управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория (см. также с. 45)

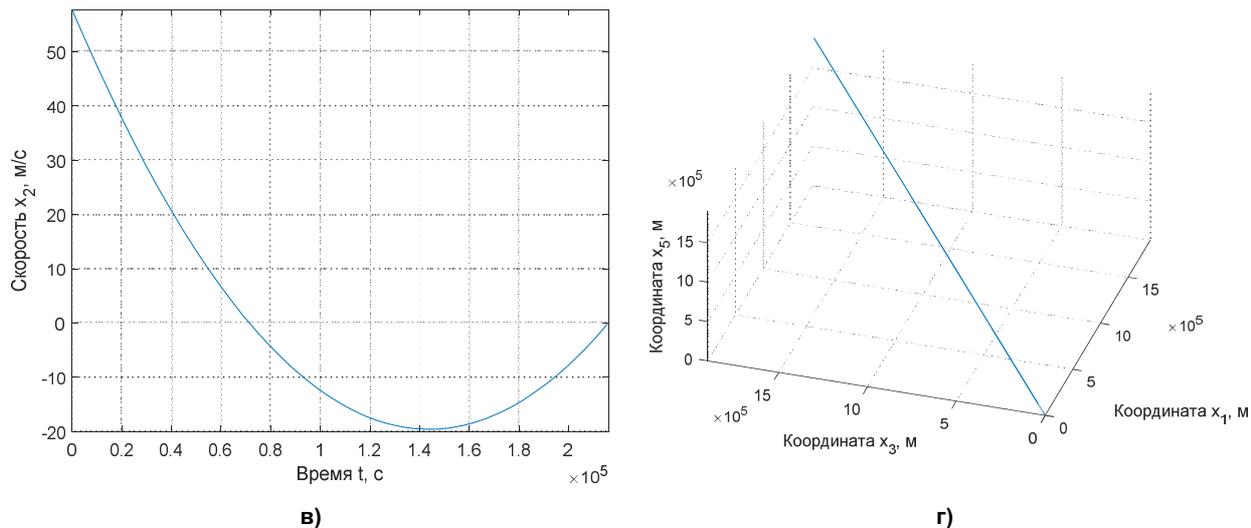


Рис. 1. Окончание

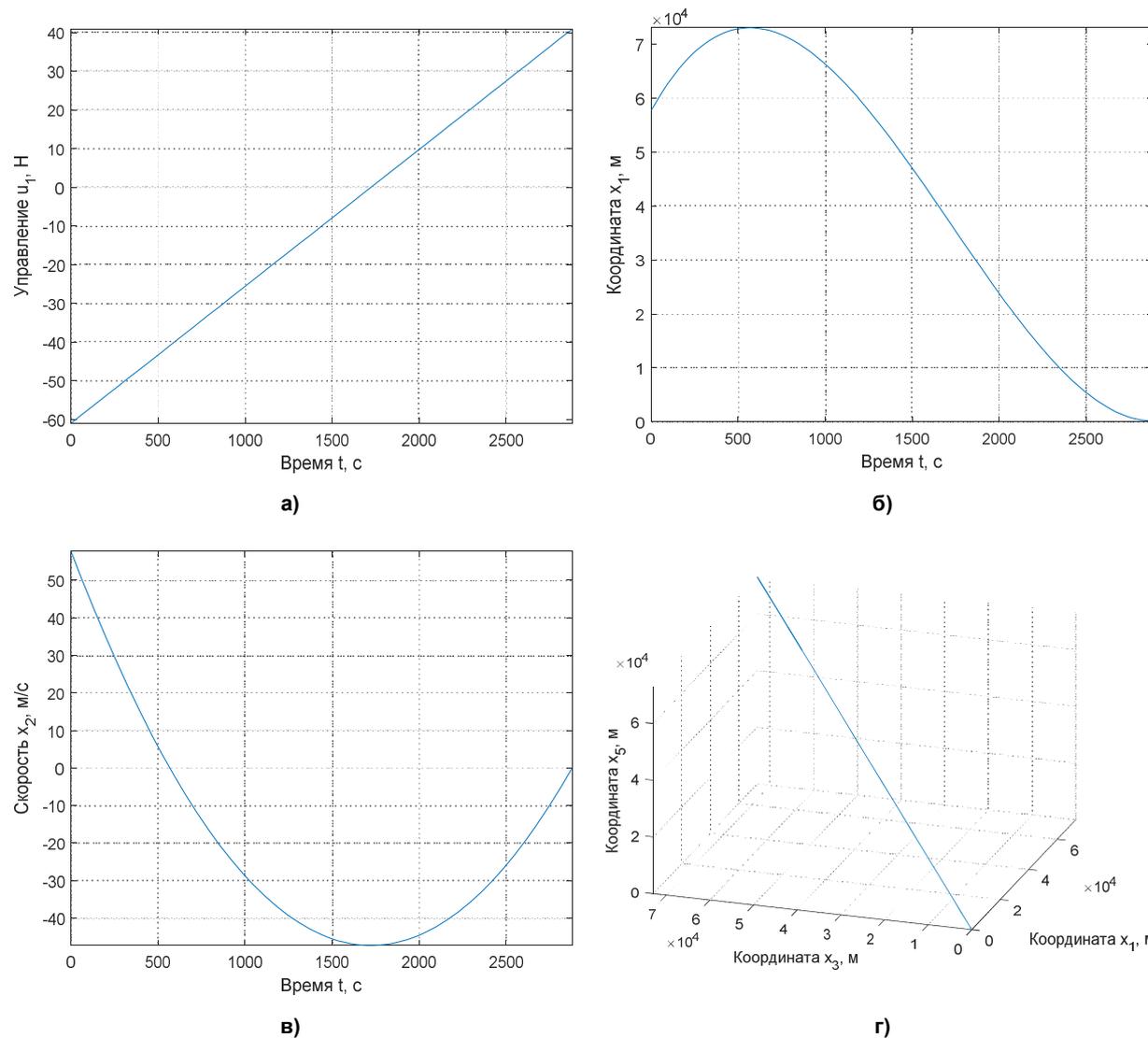


Рис. 2. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 57\,735$ м; $x_{20} = 57,7$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 2880$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м. Расход топлива – 84,95 кг; а – управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория

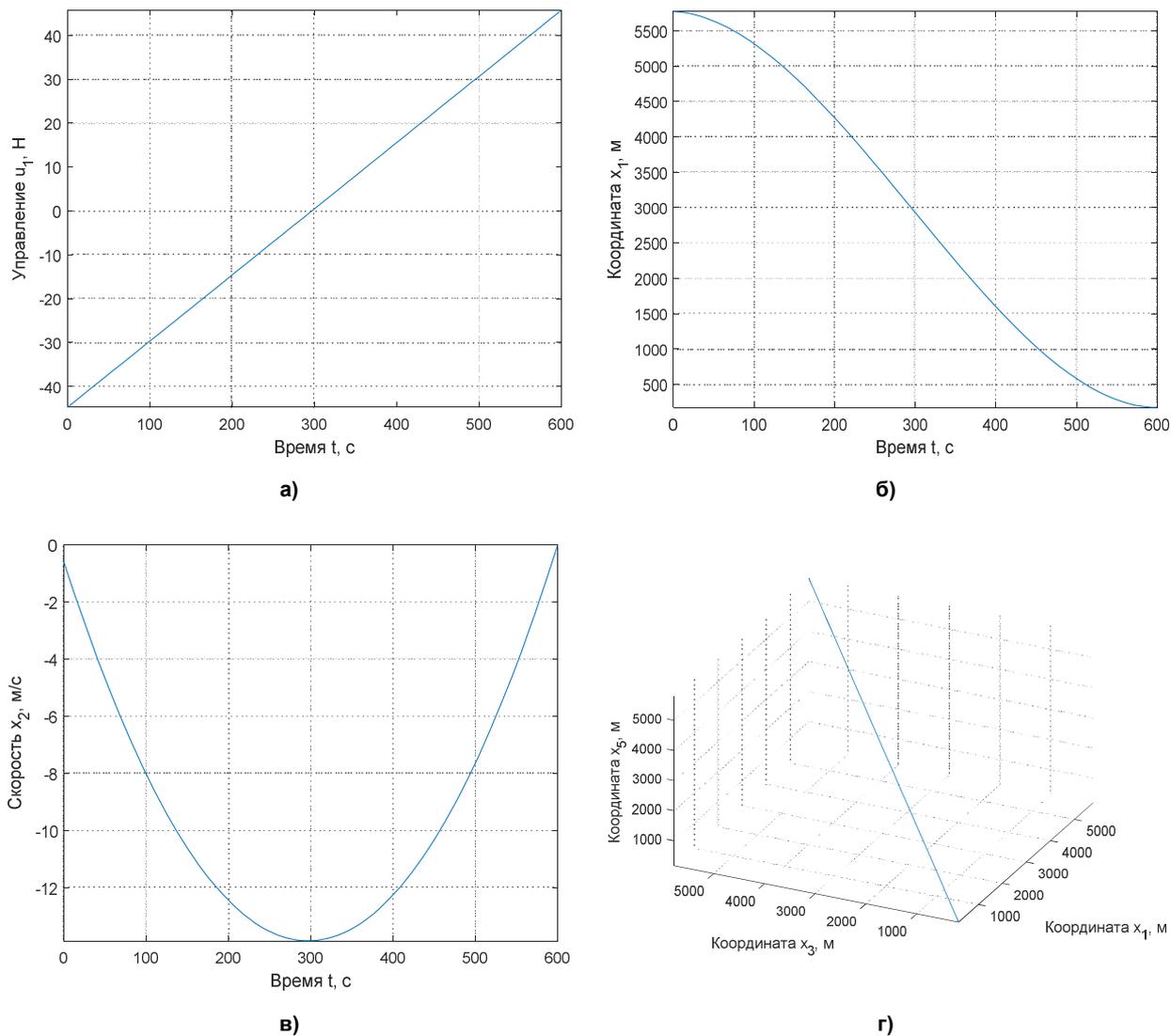


Рис. 3. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 5773,5$ м; $x_{20} = -0,577$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 600$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м. Расход топлива – 15,14 кг; а – управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$, г – траектория

Обратимся к случаю заданных ограничений на управление u_1 при заданной длительности полета T . С учетом выражений (6) гамильтониан принимает вид

$$H = H(x_1, x_2, u_1, \psi_1, \psi_2, \mu_1) = -ku_1^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \frac{u_1}{m} + \mu_1 \rho_1.$$

Из необходимых условий (8), (9) следуют уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_1} = -2ku_1 + \frac{\psi_2}{m} = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1; & \frac{\partial H}{\partial \mu_1} = 2\mu_1 u_4 = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_4} = 2\mu_1 u_4 = 0. \tag{19}$$

Равенству (19) соответствуют три варианта экстремальных решений:

- 1) $\mu_1 = 0, u_4 \neq 0$;
- 2) $\mu_1 = 0, u_4 \neq 0$;
- 3) $\mu_1 \neq 0, u_4 = 0$.

Предыдущее решение при отсутствии ограничений соответствует первому варианту. Существует решение с непрерывным и кусочно-гладким управлением, соответствующее первому и второму вариантам, и кусочно-постоянное решение, соответствующее только второму варианту. Кроме того, третьему варианту соответствует кусочно-постоянное решение, которое может не удовлетворять условию Лежандра (13). В первом варианте управление определяется согласно выражению (18), во втором варианте имеем кусочно-постоянное управление

$$u_1 = \pm U_1.$$

Вид оптимального управления при заданных параметрах задачи определяется на основе численных результатов решения уравнений (14)–(16) и вычисления значения функционала (3). Численные результаты при некоторых параметрах представлены на рис. 4–7, где приведены решения с непрерывным и кусочно-непрерывным управлениями для большого и малого расстояния до астероида в начальный момент времени.

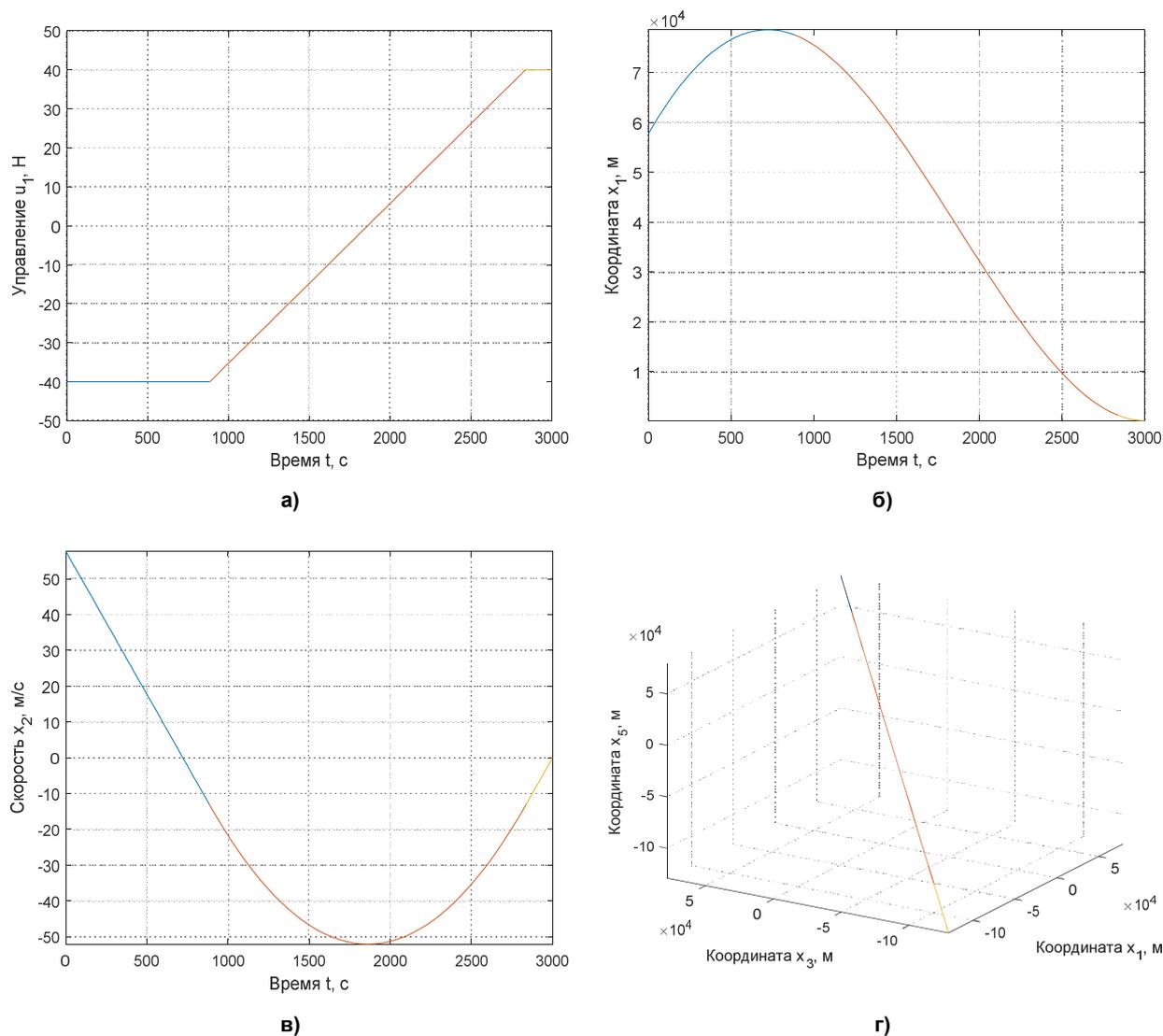


Рис. 4. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 57\,735$ м; $x_{20} = 57,7$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 3000$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $U_1 = 40$ Н; $t_1 = 884,52$ с; $t_2 = 2837,17$ с; а – управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория. Расход топлива – 90,34 кг

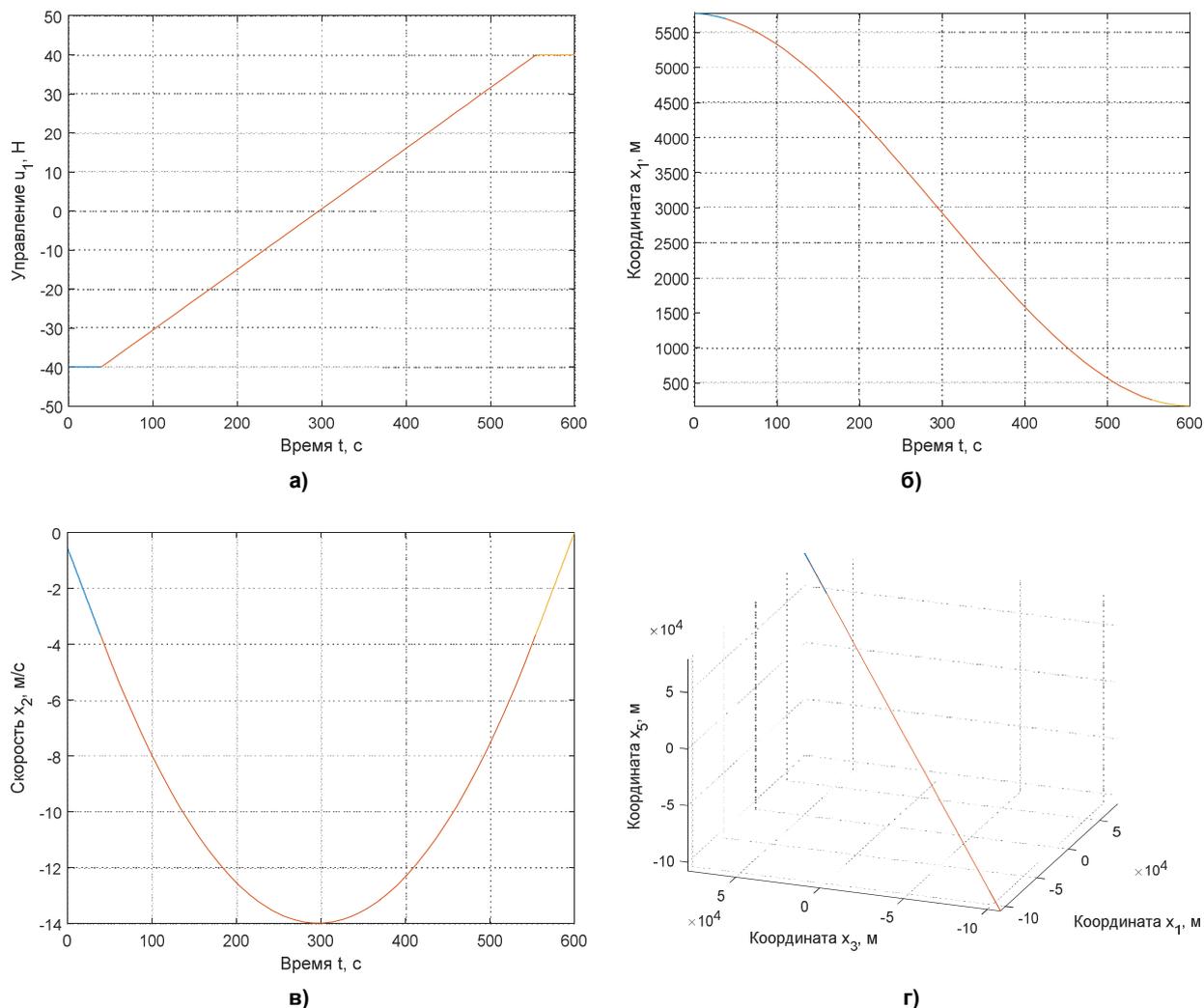


Рис. 5. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 5773,5$ м; $x_{20} = -0,577$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 600$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $t_1 = 38,62$ с; $t_2 = 554,16$ с; а – управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория. Расход топлива – 15,28 кг

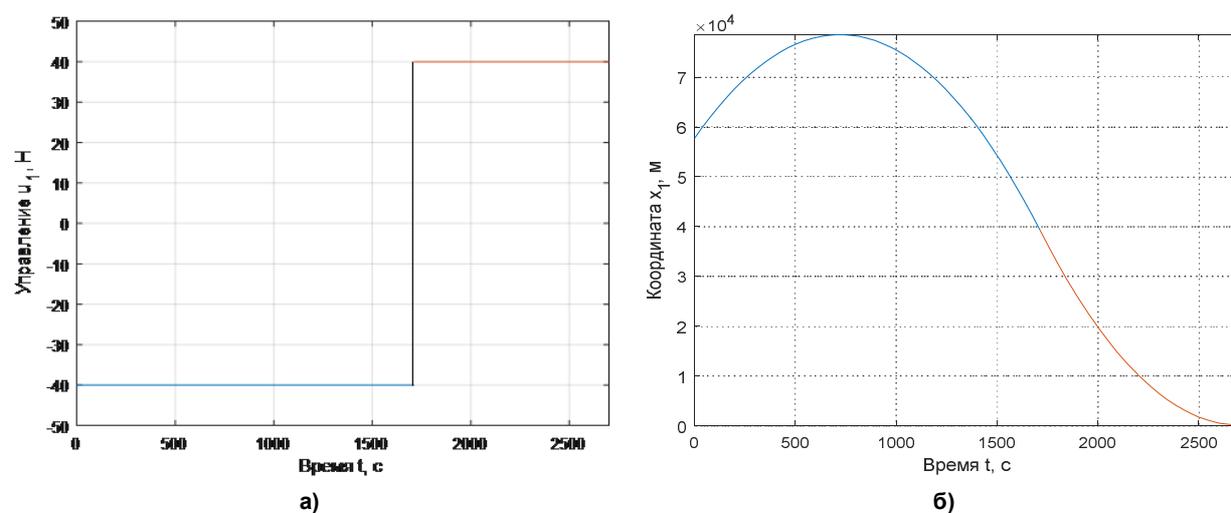
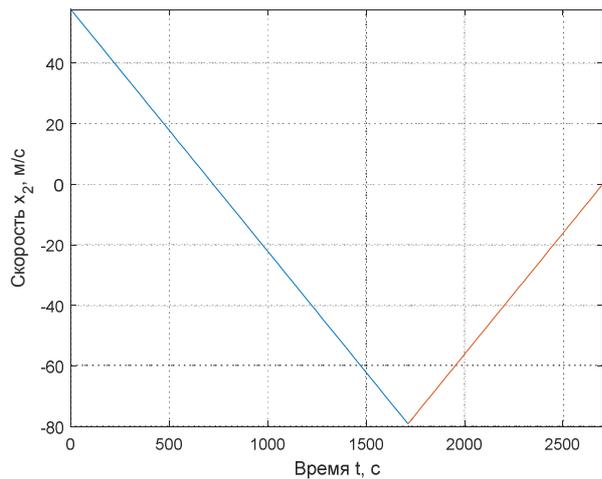
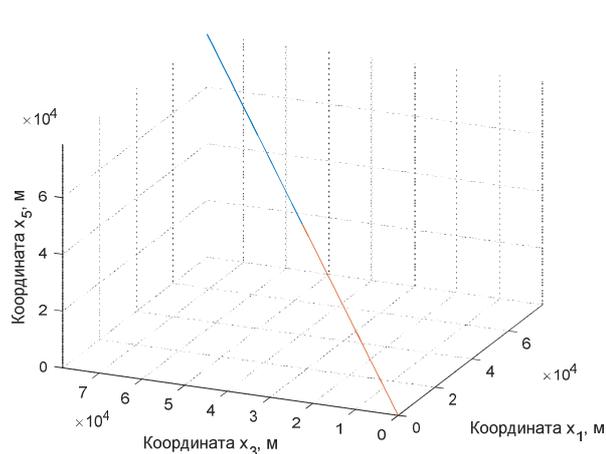


Рис. 6. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 57735$ м; $x_{20} = 57,7$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $U_1 = 40$ Н; $T = 2701,53$ с; $t_1 = 1711,61$ с; а – кусочно-постоянное управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория. Расход топлива – 120,6 кг (см. также с. 49)

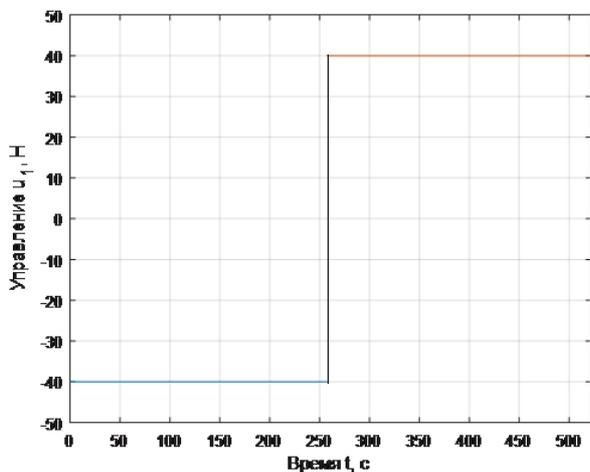


в)

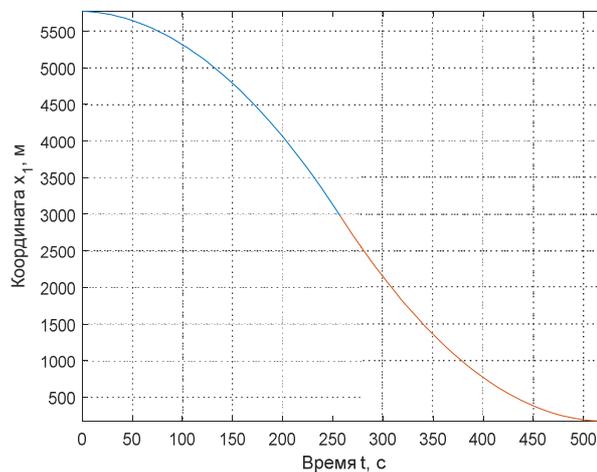


г)

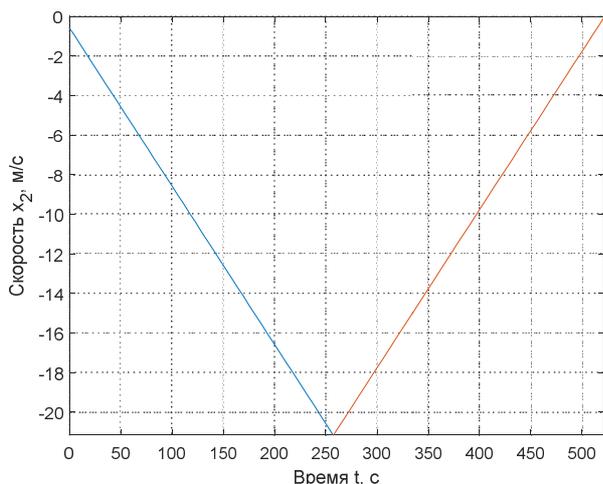
Рис. 6. Окончание



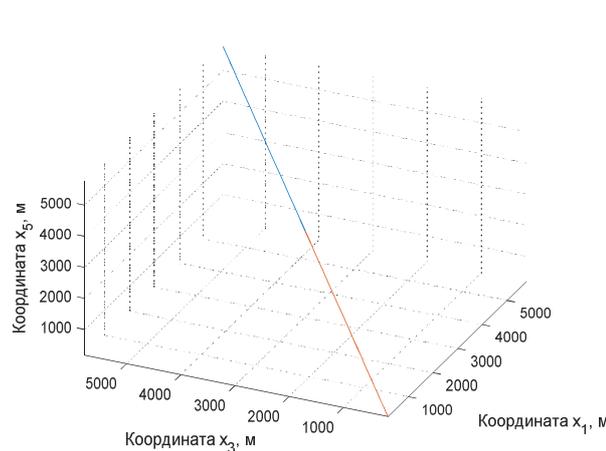
а)



б)



в)



г)

Рис. 7. Результаты моделирования при параметрах: $x_{10} = 5773,5$ м; $x_{20} = -0,577$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $U_1 = 40$ Н; $T = 522,05$ с; $t_1 = 257,41$ с; а – кусочно-постоянное управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория. Расход топлива – 23,31 кг

Управление в технических системах

На основе анализа экстремальных решений при разных параметрах задачи можно отметить: вид управления существенно зависит от величины ограничения U_1 , начальной скорости x_{20} и длительности полета T . При параметрах, соответствующих рис. 4, управление u_1 имеет две точки переключения. При увеличении длительности T или величины U_1 , а также уменьшении величины начальной скорости x_{20} получаем управление с одной точкой переключения и при дальнейшем изменении величин – управление без переключений. При уменьшении T , U_1 или увеличении x_{20} управление становится кусочно-постоянным, как представлено на рис. 6. В этом случае величина расхода оказывается больше, чем в задачах с кусочно-гладким управлением при близких значениях параметров.

Зависимости длительности полета T и времени переключения t_1 от параметров задачи в случае кусочно-постоянного управления приведены на рис. 8. В каждом из вариантов значения неизменяемых параметров взяты из списка: $x_{10} = 57\,735$ м; $x_{20} = 57,7$ м/с; $x_{11} = 173,2$ м; $x_{21} = 0$; $m = 500$ кг; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $U_1 = 40$ Н.

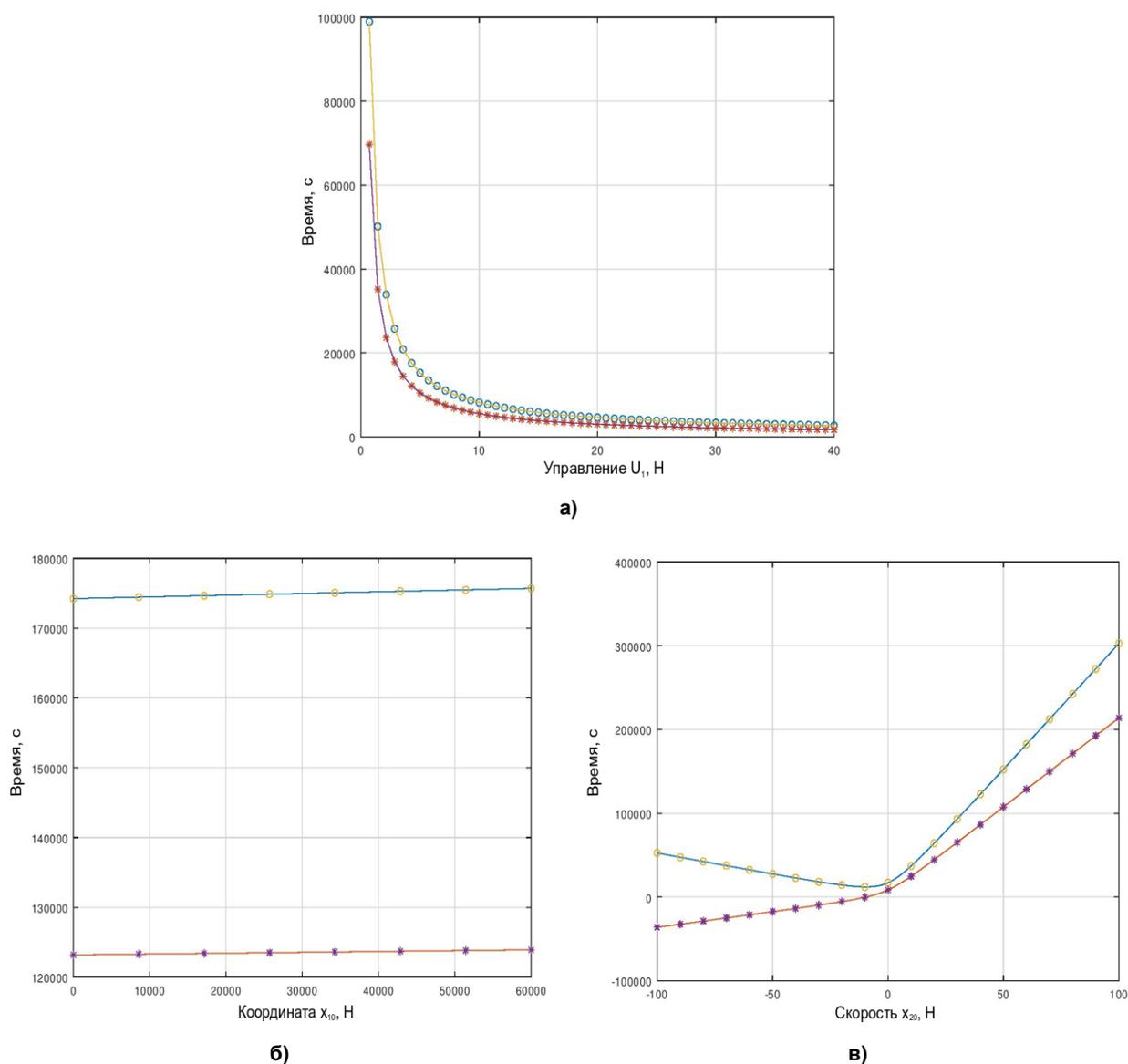


Рис. 8. Длительность полета и время переключения, зависимости: а – от величины управления U_1 ; б – от начального положения x_{10} ; в – от начальной скорости x_{20} ; o – график длительности полета, * – график времени переключения

2.2. Решение с учетом кориолисовых сил инерции

Рассмотрим далее вариант задачи с учетом кориолисовых сил инерции. Длительность T принимается заданной. Система определяющих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = 2\omega x_4 + \frac{u_1}{m}; \\ \dot{x}_3 = x_4; \dot{x}_4 = -2\omega x_2 + \frac{u_2}{m}; \\ \dot{x}_5 = x_6; \dot{x}_6 = \frac{u_3}{m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Записывается гамильтониан задачи

$$H = -k(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left(2\omega x_4 + \frac{u_1}{m} \right) + \psi_3 x_4 + \psi_4 \left(-2\omega x_2 + \frac{u_2}{m} \right) + \psi_5 x_6 + \psi_6 \frac{u_3}{m}.$$

Из условий (8), (9) следуют уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_1} = -2ku_1 + \frac{\psi_2}{m} + 2\mu_1 u_1 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_4} = 2\mu_1 u_4 = 0; \\ \dot{\psi}_2 + \psi_1 - 2\omega\psi_4 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_2} = -2ku_2 + \frac{\psi_4}{m} + 2\mu_2 u_2 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_5} = 2\mu_2 u_5 = 0; \\ \dot{\psi}_3 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_3} = -2ku_3 + \frac{\psi_6}{m} + 2\mu_3 u_3 = 0; & \frac{\partial H}{\partial u_6} = 2\mu_3 u_6 = 0. \\ \dot{\psi}_4 + \psi_3 + 2\omega\psi_2 = 0; \\ \dot{\psi}_5 = 0; \\ \dot{\psi}_6 + \psi_5 = 0; \end{cases} \quad (21)$$

Общее решение уравнений для множителей Лагранжа имеем в виде:

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1; \\ \psi_2 = -\frac{2C_3 + C_2 \cos 2\omega t + C_4 \sin 2\omega t}{4\omega}; \\ \psi_3 = C_3; \\ \psi_4 = \frac{2C_1 - C_4 \cos 2\omega t + C_2 \sin 2\omega t}{4\omega}; \\ \psi_5 = C_5; \\ \psi_6 = -C_5 t - C_6. \end{cases} \quad (22)$$

Уравнениям совокупности (21) соответствуют варианты решений задачи: без ограничений на управления; с ограничениями и кусочно-гладким управлением; с ограничениями и кусочно-постоянным управлением. При отсутствии ограничений, а также в открытой области допустимых управлений в задаче с ограничениями из необходимых условий экстремума следуют равенства:

$$u_1 = \frac{\psi_2}{2km}; u_2 = \frac{\psi_4}{2km}; u_3 = \frac{\psi_6}{2km}. \quad (23)$$

С учетом выражений (22), (23) общее решение системы (20) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2C_4 + 2C_{x4}\omega + 2C_2\omega t}{32km^2\omega^3} \sin 2\omega t + \frac{2C_{x2}\omega - 2C_2 + 2C_4\omega t}{32km^2\omega^3} \cos 2\omega t + \frac{4C_{x1}\omega - C_3 + 4C_1\omega t}{32km^2\omega^3}; \\ x_2 &= -\frac{2C_{x2}\omega - C_2 + 2C_4\omega t}{16km^2\omega^2} \sin 2\omega t - \frac{C_4 + 2C_{x4}\omega + 2C_2\omega t}{16km^2\omega^2} \cos 2\omega t + \frac{C_1}{8km^2\omega^2}; \\ x_3 &= -\frac{C_{x2}\omega - C_2 + C_4\omega t}{16km^2\omega^3} \sin 2\omega t - \frac{C_4 + C_{x4}\omega + 2C_2\omega t}{16km^2\omega^3} \cos 2\omega t + \frac{2C_1 + 2C_{x3}\omega + 2C_3\omega t}{16km^2\omega^3}; \\ x_4 &= \frac{C_4 + 2C_{x4}\omega + 2C_2\omega t}{16km^2\omega^2} \sin 2\omega t - \frac{2C_{x2}\omega - C_2 + 2C_4\omega t}{16km^2\omega^2} \cos 2\omega t + \frac{C_3}{8km^2\omega^2}; \end{aligned}$$

$$x_5 = -\frac{C_5 t^3 + 3C_6 t^2 + 6C_{x6} t + 6C_{x5}}{12km^2};$$

$$x_6 = -\frac{C_5 t^2 + 2C_6 t + 2C_{x6}}{4km^2}.$$

Постоянные интегрирования в задаче без ограничений $C_i, C_{xi}, i = \overline{1,6}$ определяются с помощью конечных условий (2). В случае кусочно-постоянных управлений к конечным условиям добавляются условия непрерывности фазовых координат и условия Эрдмана – Вейерштрасса. На основе вычислительного эксперимента установлено: управление и траектория сближения зависят от соотношения времени полета T и периода собственного вращения астероида $2\pi/\omega$, а также от максимальных значений управлений U_1, U_2, U_3 . При увеличении длительности полета T (при заданной скорости ω), а также при увеличении ω или уменьшении величин U_1, U_2, U_3 , влияние кориолисовых сил инерции становится заметным, что представлено на рис. 9, 10.

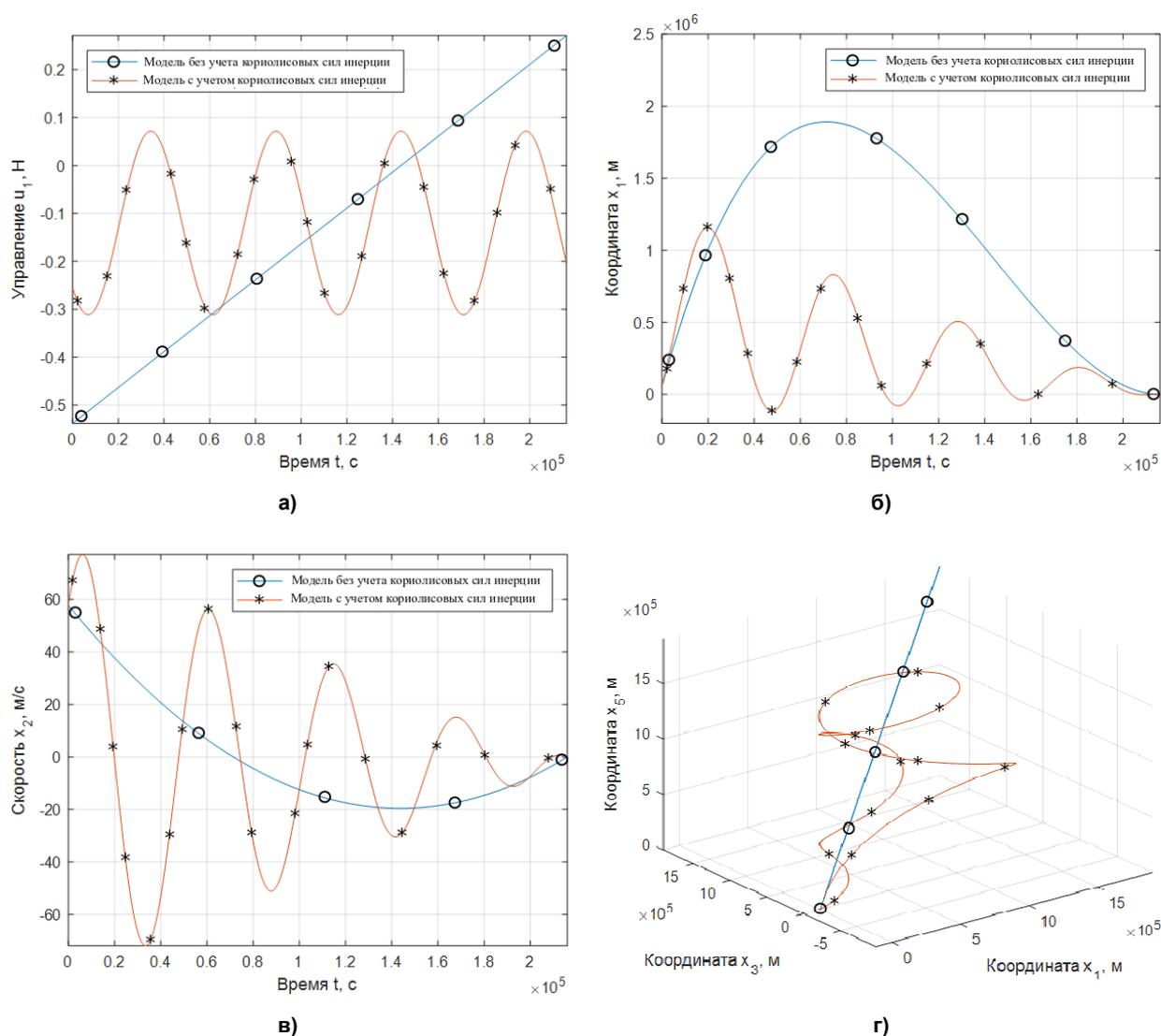


Рис. 9. Результаты моделирования задачи без ограничений при параметрах: $x_{10} = x_{30} = x_{50} = 57\,735$ м; $x_{20} = x_{40} = x_{60} = 57,7$ м/с; $x_{11} = x_{31} = x_{51} = 173,2$ м; $x_{20} = x_{40} = x_{60} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 216\,000$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $\omega = 5,7 \cdot 10^{-5}$ рад/с; а – управление $u_1(t)$; б – координата $x_1(t)$; в – скорость $x_2(t)$; г – траектория; * – решение на модели с учетом кориолисовых сил инерции; о – без учета этих сил. Расход топлива 42,62 кг

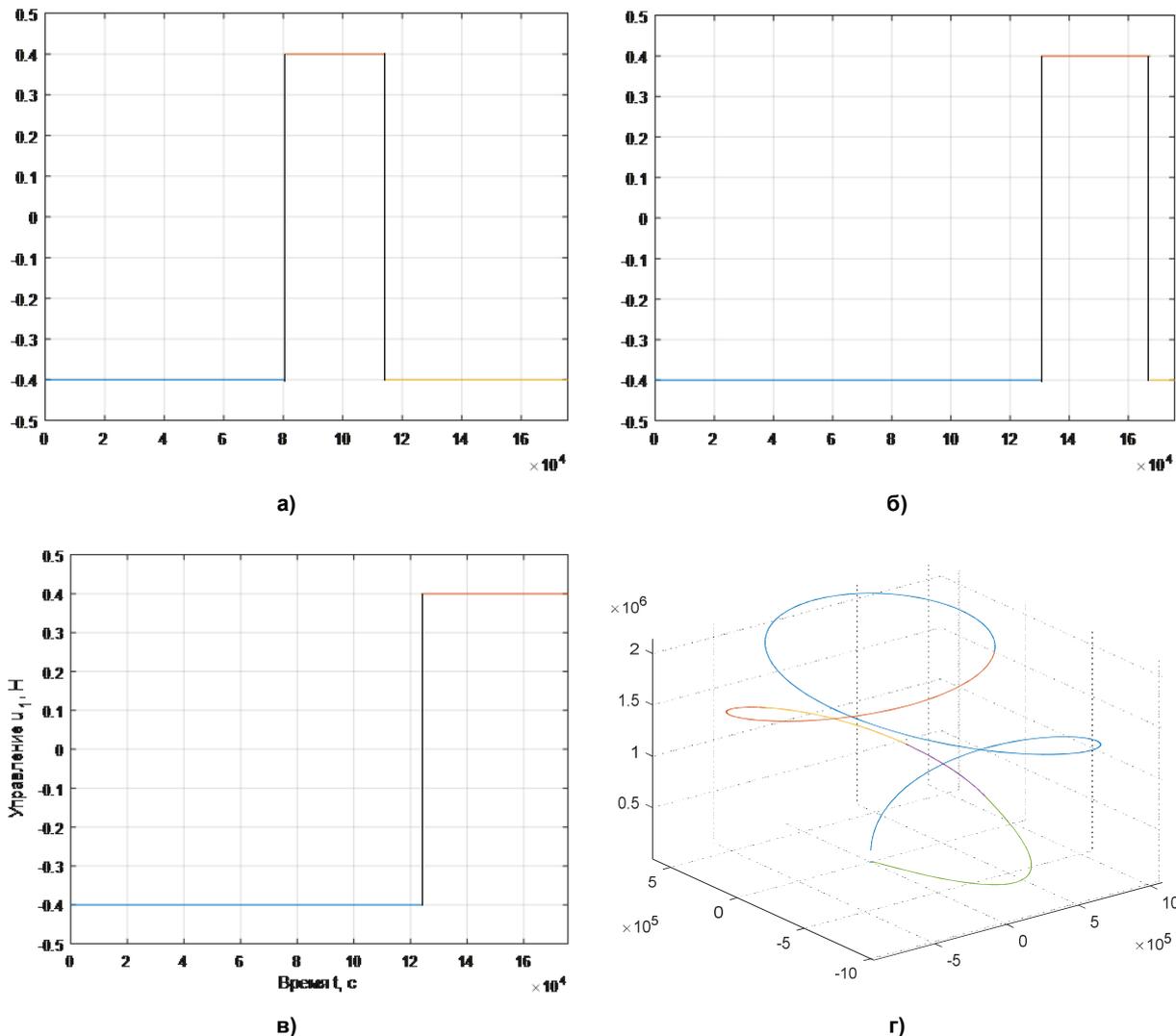


Рис. 10. Результаты численного моделирования при параметрах: $x_{10} = x_{30} = x_{50} = 57\,735$ м; $x_{20} = x_{40} = x_{60} = 57,7$ м/с; $x_{11} = x_{31} = x_{51} = 173,2$ м; $x_{20} = x_{40} = x_{60} = 0$; $m = 500$ кг; $T = 175\,631,22$ с; $k = 3,72 \cdot 10^{-4}$ с/м; $\omega = 5,7 \cdot 10^{-5}$ рад/с; $U_1 = U_2 = U_3 = 40$ Н; а – управление $u_1(t)$; б – управление $u_2(t)$; в – управление $u_3(t)$; г – траектория. Расход топлива – 78,41 кг

Вычисления выполнены в среде MATLAB R2014b.

Заключение

Решения вариационных задач управляемого сближения КА с астероидом получены для условий дальнего космоса, вне сфер действия планет Солнечной системы. Дают представление о законе управления (реактивной тяги), траекториях и скоростях КА.

Численно-аналитические решения для частных случаев в условиях пренебрежения гравитацией астероида, рассматриваемых без учета кориолисовых сил инерции космического аппарата и с учетом этих сил, доставляют оптимальное управление в виде непрерывной (гладкой или кусочно-гладкой) функции времени или кусочно-непрерывной функции с одной или несколькими точками переключения. Вид оптимального управления существенно зависит от параметров задачи, в частности, от величины и направления начальной скорости и времени полета.

В статье не рассматриваются вопросы практической реализации полученных законов управления. Однако описанный метод позволяет получить численные оценки расхода топлива, которые могут быть применены при конструировании аппарата для миссии сближения.

Влияние кориолисовых сил инерции на относительные траектории КА может быть значительным при сравнительно больших относительных скоростях или малой величине реактивной

тяги управления. Отмечается зависимость вида траекторий от соотношения скорости собственного вращения астероида и длительности полета.

В продолжение исследований рассматривается численное решение задачи сближения с учетом гравитации астероида.

Литература

1. *The landing of the NEAR-Shoemaker spacecraft on asteroid 433 Eros* / J. Veverka, B. Farquhar, M. Robinson et al. // *Nature*. – 2001. – 413 (6854). – P. 390–393. DOI: 10.1038/35096507
2. *The Rubble-Pile Asteroid Itokawa as Observed by Hayabusa* / A. Fujiwara, J. Kawaguchi, D. Yeomans et al. // *Science*. – New York, N.Y., 2006. – 312 (5778). – P. 1330–1334. DOI: 10.1126/science.1125841
3. *Rosetta mission: on-comet operation planning for the sampler, drill and distribution subsystem* / P. DiLizia et al. // *3rd CEAS Air & Space Conference and 21st AIDAA Congress*. – Confine Edizioni, 2011. – P. 1752–1761.
4. Суханов, А.А. *Астродинамика* / А.А. Суханов; Институт космических исследований РАН. – М.: Ротапринт ИКИ РАН, 2010. – 201 с. – (Серия «Механика, управление, информатика»).
5. Lantoine, G. *Optimal trajectories for soft landing on asteroids* / G. Lantoine, R.D. Braun // *Advances in the Astronautical Sciences*. – 2008. – 129. – P. 447–468.
6. Азимов, Д.М. *Разработка аналитических методов синтеза оптимальных траекторий для автономного космического наведения: дис. ... д-ра техн. наук: 05.07.09* / Д.М. Азимов; [Место защиты: ГОУВПО «Московский авиационный институт (государственный технический университет)»]. – М., 2006. – 332 с.
7. Лан, А. *Анализ космических траекторий для экспедиции Земля – Апофис – Земля и движения космического аппарата вокруг астероида Апофис* / А. Лан // *Инженерный журнал: наука и инновации*. – 2017. – Вып. 7. – <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1635>. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1635
8. Польш, В.Г. *Оценка параметров динамики движения КА вблизи малого небесного тела* / В.Г. Польш // *Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина*. – 2009. – № 2. – С. 49–58.
9. *Asteroid Database and Mining Rankings* // *Asterank: a scientific and economic database of over 600,000 asteroids*. – 2013. – <http://www.asterank.com/> (дата обращения: 03.12.2018).
10. Дубошин, Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы* / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 800 с.
11. Сихарулидзе, Ю.Г. *Баллистика и наведение летательных аппаратов [Электронный ресурс]* / Ю.Г. Сихарулидзе. – 2-е изд. (эл.). – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 407 с.
12. Туманов, А.В. *Основы компоновки бортового оборудования космических аппаратов* / А.В. Туманов, В.В. Зеленцов, Г.А. Щеглов. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2015. – 223 с.
13. Троицкий, В.А. *Оптимальные процессы колебаний механических систем* / В.А. Троицкий. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
14. Болдырев, Ю.Я. *Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие для вузов* / Ю.Я. Болдырев. – М.: Юрайт, 2018. – 240 с. – (Серия: Университеты России). – www.biblio-online.ru/book/9ACC282C-3884-4D46-8397-EAF6AF1DD0FF.
15. Блисс, Г.А. *Лекции по вариационному исчислению* / Г.А. Блисс; пер. Ю.К. Солнцева; под ред. Л.Э. Эльсгольца. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950. – 347 с.

Левина Галина Абрамовна, канд. техн. наук, доцент кафедры систем автоматического управления, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; galinalevina@mail.ru.

Дахтин Иван Сергеевич, аспирант кафедры систем автоматического управления, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; dahtinis@mail.ru.

Поступила в редакцию 12 декабря 2018 г.

SOME MODELS OF OPTIMAL TRAJECTORIES OF THE ASTEROID APPROACH

G.A. Levina, galinalevina@mail.ru,

I.S. Dakhtin, dahtinis@mail.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

We consider the optimal trajectories in the rendezvous problem calculated by calculus of variations techniques. We formulate the problem of translational motion of the spacecraft taking the asteroid rotation into consideration. The motion is supposed to occur outside of a sphere of influence of any planet, the gravity of the asteroid is defined like the one in the restricted two-body problem. We represent the equations of controlled motion in central gravity field and construct the calculus of variations problem, given the control constraints. The problem is solved applying Valentine's method. We solve the Euler–Lagrange equations generated from the functional related to the fuel consumption and show the solutions in the special case of neglecting the asteroid gravity, both taking and not taking the Coriolis force into consideration. The optimal control in these solutions is occurred to be twofold: continuous (either smooth and piecewise smooth one) and piecewise continuous one, having one or more points of jump discontinuities. In case of these discontinuities the Weierstrass–Erdmann condition is applied. The optimality is validated by the Legendre condition. We note the way the control function and the trajectory change while varying some of the parameters of the problem: the initial speed, the flight duration, the control limit, the angular velocity of the asteroid. The described method allows one to evaluate some parameters of the flight which may be used in the rendezvous mission planning.

Keywords: calculus of variations, optimal control, spacecraft, asteroid approach trajectories.

References

1. Veverka J., Farquhar B., Robinson M. et al. The Landing of the NEAR-Shoemaker Spacecraft on Asteroid 433 Eros. *Nature*, 2001, 413, pp. 390–393. DOI: 10.1038/35096507
2. Fujiwara A., Kawaguchi J., Yeomans D. et al. The Rubble-Pile Asteroid Itokawa as Observed by Hayabusa. *Science* (New York, N.Y.), 2006, 312, pp. 1330–1334. DOI: 10.1126/science.1125841
3. DiLizia P. et al. Rosetta Mission: On-comet Operation Planning for the Sampler, Drill and Distribution Subsystem. *3rd CEAS Air & Space Conference and 21st AIDAA Congress*. Confine Edizioni, 2011, pp. 1752–1761.
4. Sukhanov A.A. *Astrodinamika* [Astrodynamics]. Moscow, Space Research Institute, 2010. 201 p.
5. Lantoine G., Braun R.D. Optimal Trajectories for Soft Landing on Asteroids. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2008, 129, pp. 447–468.
6. Azimov D.M. *Razrabotka analiticheskikh metodov sinteza optimal'nykh trayektoriy dlya avtonomnogo kosmicheskogo navedeniya: dissertatsiya na soiskaniye stepeni doktora tekhnicheskikh nauk* [Analytical Techniques of Optimal Trajectories Synthesis for an Autonomous Spacecraft: a Doctoral Dissertation.]. Moscow, 2006. 332 p.
7. Lang A. [Analysis of Spacecraft Trajectories for the Space Mission Earth–Apophis–Earth and the Spacecraft Orbital Motion Around the Asteroid Apophis]. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2017, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1635.html> (in Russ.) DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1635
8. Pol' V.G. [Estimation of Parameters of SC Motion Dynamics near Small Celestial Body]. *Vestnik "NPO im. S.A. Lavochkina"*, 2009, no. 2, pp. 49–58. (in Russ.)
9. Asterank: a Scientific and Economic Database of over 600,000 Asteroids (2013). Available at: <http://www.asterank.com/> (accessed 03.12.2018).
10. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Osnovnyye zadachi i metody* [Celestial Mechanics. Main Problems and Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 800 p.
11. Sikharulidze Yu.G. *Ballistika i navedeniye letatel'nykh apparatov* [Spacecraft Ballistics and Control]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy, 2013. 407 p.

12. Tumanov A.V., Zelentsov V.V., Shcheglov G.A. *Osnovy komponovki bortovogo oborudovaniya kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft On-board Equipment Configuration]. Moscow, The Bauman University Publishing House, 2015. 223 p.

13. Troitskiy V.A. *Optimal'nyye protsessy kolebaniy mekhanicheskikh sistem* [The Optimal Processes of Mechanical Systems Oscillations]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 248 p.

14. Boldyrev Yu.Ya. *Variatsionnoye ischisleniye i metody optimizatsii: uchebnoye posobiye dlya vuzov* [Calculus of Variations and Optimization Methods: Academic Textbook]. Moscow, Urait Publ., 2018. 240 p.

15. Bliss G.A. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago. The University of Chicago Press, 1951. 296 p.

Received 12 December 2018

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Левина, Г.А. Некоторые модели оптимальных траекторий сближения космического аппарата с астероидом / Г.А. Левина, И.С. Дахтин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 40–56. DOI: 10.14529/ctcr190104

FOR CITATION

Levina G.A., Dakhtin I.S. Some Models of Optimal Trajectories of the Asteroid Approach. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 40–56. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr190104