

Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы

УДК 519.6 + 681.5 + 51-74 + 517.9

DOI: 10.14529/ctcr190205

МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА ПРИ ТЕРМООБРАБОТКЕ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Н.М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Предложен метод определения температуры при нелинейном теплопереносе внутри цилиндрического тела с неизвестной начальной температурой. Исходными данными являются результаты измерений температурных функций вблизи поверхности тела. Рассматриваемая задача возникает при термической обработке изделий в камерных печах. Математическая модель процесса включает в себя нелинейное уравнение теплопроводности, учитывающее зависимость теплофизических свойств материала от температуры, и граничные условия, характеризующие процесс теплообмена на поверхности тела. Для определения температуры внутри тела предложен метод дискретной регуляризации, позволяющий последовательно находить температуру в направлении от поверхности к оси цилиндра. Вычислительная схема метода предполагает использование стабилизирующих функционалов, а также конечно-разностных уравнений для определения температурных значений по пространственной переменной, что позволяет уменьшить влияние неизвестных начальных условий. Использование стабилизирующих функционалов позволяет обеспечить устойчивость вычислительной процедуры относительно погрешности исходных данных. В статье приведены результаты исследований устойчивости вычислительной схемы. С целью проверки принципиальной возможности определения температуры и получения экспериментальных оценок температурных погрешностей проведен вычислительный эксперимент. В эксперименте выполнен расчет температурного поля цилиндра с неизвестной начальной температурой, проведен сравнительный анализ найденных температурных функций с тестовыми значениями и получены экспериментальные оценки уклонов вычисленных температур от тестовых значений. Результаты вычислительного эксперимента представлены в работе, согласуются с теоретическими оценками и подтверждают эффективность и надежность предлагаемой вычислительной схемы.

Ключевые слова: теплоперенос, обратная задача; метод регуляризации; метод обработки информации; устойчивость; оценка погрешности.

Введение

В современных технологиях, связанных с процессами теплопереноса, особое внимание уделяется процедуре температурного контроля объекта и выбору соответствующих температурных режимов, позволяющих реализовывать требуемые свойства объекта. Изучение влияния выбранных режимов на характеристики объекта, когда по результатам температурных измерений вблизи поверхности тела необходимо определить температуру во внутренних точках, вызывает большой интерес [1–5]. Математические модели теплопереноса, как правило, включают в себя уравнение или систему уравнений теплопроводности, граничные условия, формируемые из результатов измерений температурных функций вблизи поверхности и начальных условий, определяемых температурным состоянием тела в начальный момент времени. Задача определения температуры внутри тела по известному тепловому режиму, заданному на внешней поверхности, относится к

классу обратных задач, и для ее решения необходимо использовать регуляризующие алгоритмы, позволяющие получать приближенные решения, устойчивые относительно погрешности исходных данных. С разработкой и исследованием методов решения обратных задач связаны работы многих исследователей [6–14]. Существенная особенность численных методов решения обратных задач заключается в том, что они разрабатываются с учетом известных начальных условий. С другой стороны, многие процессы теплопереноса связаны с ситуацией, когда в начальный момент времени невозможно измерить температуру внутри тела. Такая ситуация возникает при комплексной термообработке изделий на этапе отпуска или нормализации. Это приводит к возникновению задач с неизвестными начальными условиями.

В данной работе рассматривается задача определения температуры во внутренних точках цилиндрического тела, подвергаемого отпуску в процессе комплексной термообработки. Исходными данными являются результаты измерений, полученные от внешних температурных датчиков. В задаче требуется определить изменения температуры внутри тела при выбранном внешнем тепловом режиме воздействия на поверхность тела. Математическая модель теплопереноса включает уравнения теплопроводности, коэффициенты которого зависят от температуры, и граничных условий. Существенной особенностью данной задачи является наличие погрешностей в результатах измерения, а также отсутствие информации о начальной температуре тела.

В статье предложен метод определения температуры во внутренних точках по результатам поверхностных измерений. Метод основан на использовании конечно-разностных уравнений и регуляризующих функционалов. Основная идея метода заключается в том, что, в отличие от существующих подходов, на каждом шаге неизвестная температурная функция определяется относительно пространственной переменной. Таким образом, схема позволяет одновременно найти температуру внутри рассматриваемой области вплоть до оси цилиндра и уменьшить влияние неизвестных начальных условий на результаты вычислений. Подобный подход был предложен в [15] в ситуации линейного теплопереноса при неизвестной начальной температуре объекта.

В работе показана локальная устойчивость метода при соответствующем соотношении шагов дискретизации и параметра регуляризации, приведены результаты сравнительного анализа получаемых температур с тестовыми значениями, а также получены оценки температурных погрешностей. Полученные оценки согласуются с теоретическими результатами и свидетельствуют о том, что предложенная вычислительная схема позволяет прогнозировать температуру во внутренних точках тела, подвергаемого внешнему тепловому воздействию.

Постановка задачи

В работе рассматривается задача, связанная с процессом теплопереноса в цилиндре радиусом ℓ (рис. 1а). При термической обработке в печи тело подвергается внешнему тепловому воздействию, продолжительность воздействия ограничена величиной T . Температура в каждой внутренней точке A в текущий момент времени t характеризуется функцией $u(A, t)$.

Основные теплофизические свойства материала: теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности в каждой внутренней точке A зависят от значения температуры в текущий момент времени t . Специфика процесса термообработки позволяет принять следующие допущения. Тепловое воздействие, осуществляемое через боковую поверхность ∂S_ℓ , одинаково в каждой точке ∂S_ℓ и достаточно велико по сравнению с тепловыми изменениями, получаемыми через торцы. Тепловое воздействие регулируется в каждый момент времени t и плотность тепловых потоков характеризуется функцией $q(t)$. Полагаем, что температура принимает постоянные значения вдоль любой прямой, параллельной оси цилиндра.

Принятые допущения позволяют свести задачу об определении температуры внутри тела к задаче распространения тепла в сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра (рис. 1б).

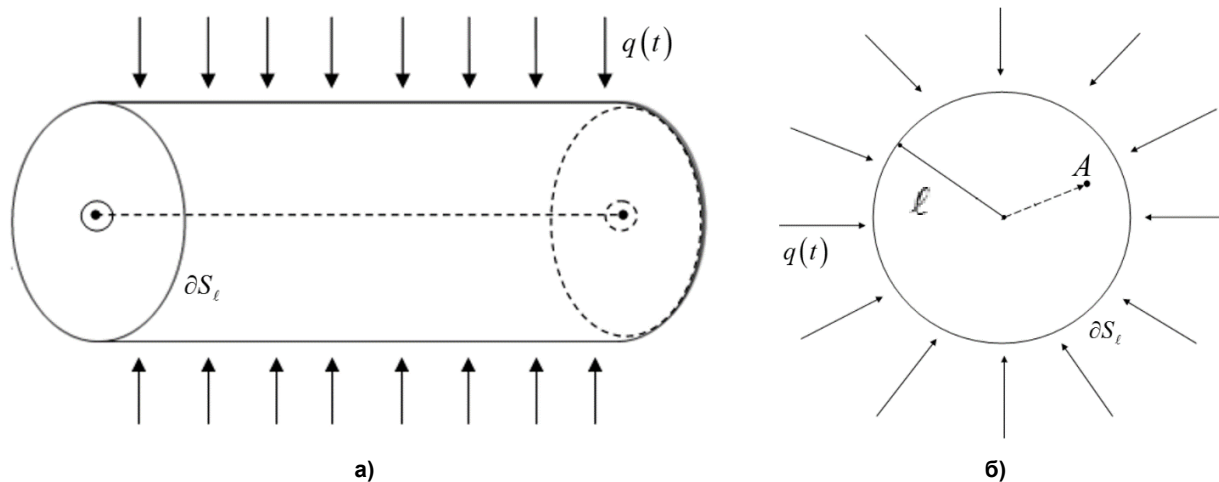


Рис. 1. Схема нагрева цилиндра

Существенная особенность технологического процесса термообработки в печи заключается в следующем. Термообработка в печи является промежуточным этапом комплексной термообработки, и к началу этого этапа сохраняется влияние остаточных тепловых процессов во внутренних точках. Учитывая, что доступной для измерения областью является только внешняя поверхность тела, получаем, что температура во внутренних точках в начальный момент времени не может быть получена из результатов измерений и является неизвестной.

Математическая модель рассматриваемого процесса теплопереноса в полярной системе координат имеет следующий вид:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(u)r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad (r,t) \in Q_T; \quad (1)$$

$$u(\ell,t) = p(t), \quad -\lambda(u)\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial r} = q(t), \quad t \in [0,T], \quad (2)$$

где r – текущий радиус, область $Q_T = (0,\ell) \times (0,T)$, температурная функция $u(r,t)$ – осесимметрична, коэффициенты $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ соответствуют значениям теплоемкости, плотности и коэффициента теплопроводности в каждой точке тела в каждый момент времени, функция $p(t)$ формируется из результатов измерений температуры вблизи поверхности тела, а функция $q(t)$ характеризует плотность теплового потока на поверхности тела. В этой задаче требуется найти $u(r,t)$, удовлетворяющую (1), (2), а также температуру на оси цилиндра

$$u(0,t) = \phi(t), \quad t \in [0,T]. \quad (3)$$

Существование точного решения $u_0(r,t) \in H^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(Q_T) \cap H^{1,\frac{\gamma}{2}}(\overline{Q_T})$, $\gamma \in (0,1)$, $\overline{Q_T} = [0,\ell] \times [0,T]$ задачи (1)–(3) при действительных значениях $p_0(t)$ и $q_0(t)$ доказано в работах [6], [16], а единственность решения в некоторой подобласти $D_\varepsilon \subset Q_T$ обоснована в [6].

Принимая во внимание, что при термообработке изделия в камерных печах в силу инертности теплопереноса нагрев изделия происходит постепенно, а также учитывая продолжительность и наибольшую температуру нагрева, полагаем, что имеют место следующие допущения:

$$\max_{\overline{Q_T}} |u(r,t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}, \quad \max \left\{ \max_{\overline{Q_\ell}} |u_{tt}|, \max_{\overline{Q_\ell}} |u_{rr}|, \max_{\overline{Q_\ell}} |u_{rrr}| \right\} \leq C. \quad (4)$$

При определении температуры $u(r,t)$ во внутренних точках необходимо учитывать, что при проведении измерений вблизи поверхности тела неизбежно возникают отклонения измеренных величин p_δ , q_δ от действительных значений $p_0(t)$ и $q_0(t)$. В математической модели эту ситуацию представим следующим образом. Вместо точных значений $p_0(t)$, $q_0(t)$ известны некоторые

приближения $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$ и δ такие, что $\max\{\|p_0(t) - p_\delta\|, \|q_0(t) - q_\delta\|\} \leq \delta$. Таким образом, необходимо по приближенным данным $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$ и δ найти функцию $u_\delta(r, t)$, удовлетворяющую (1), (2), а также температуру $\phi_\delta(t)$ на оси цилиндра.

Метод прогнозирования температуры

Вычислительная процедура прогнозирования температуры основана на методе дискретной регуляризации и заключается в следующем. Введем в рассмотрение конечно-разностную сетку:

$$G = \begin{cases} (r_i, t_j): r = (N+1-i)h, t = (j-1)\tau; \\ h = \ell / N; \tau = T / M; i = \overline{1, N+1}; j = \overline{1, M+1}, \end{cases}$$

где h и τ – шаги сетки по переменным r и t соответственно, а также множество дискретных функций $V = \{v(r_i, t_j) = v_{i,j}\}$, заданных на G . Используя конечно-разностный аналог частных производных, представим (1), (2) в следующем виде:

$$c_{i,j} \rho_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} = \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{v_{i+1,j} - v_{i,j}} \frac{(v_{i+1,j} - v_{i,j})^2}{h^2} + \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} + \lambda_{i,j} \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = \overline{2, N}, \quad k = \overline{1, M+1}. \quad (5)$$

$$v_{1,j} = p_j, \quad v_{2,j} = p_j - \frac{q_j}{\lambda_{1,j}} h, \quad j = \overline{1, M+1}. \quad (6)$$

Учитывая характеристики технологического процесса и результаты, представленные в [17, 18], полагаем, что $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ положительны, дважды непрерывно дифференцируемы в соответствующей области и определяются формулами:

$$c(u_{i,j}) = c_0 + k_c u_{i,j}, \quad \rho(u_{i,j}) = \rho_0 + k_\rho u_{i,j}, \quad \lambda(u_{i,j}) = \lambda_0 + k_\lambda u_{i,j}, \quad (7)$$

где значения $c_0 = c(u(\ell, 0))$, $\rho_0 = \rho(u(\ell, t))$, $\lambda_0 = \lambda(u(\ell, 0))$, а величины k_c , k_ρ , k_λ согласованы с соответствующими характеристиками, представленными, например, в [18].

Основная идея предлагаемого метода заключается в том, что на каждом следующем шаге итерационного процесса, используя (5), вычисляют значения $v_{i+1,j}$ в точках (r_{i+1}, t_j) для всех $j = \overline{1, M}$:

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}), \quad (8)$$

начиная от точки (r_i, t_j) , $i = \overline{3, N}$, расположенной вблизи внешней границы, к точке (r_{N+1}, t_j) , расположенной на оси цилиндра. Коэффициенты $c_{i,j}$, $\rho_{i,j}$, $\lambda_{i,j}$ вычисляются по формуле (7).

Особенность задачи заключается в том, что непосредственное использование уравнения (8) не позволяет получать приближенные решения, устойчивые относительно погрешности исходных данных. Для обеспечения устойчивости метода поступают следующим образом. При вычислении коэффициента $\lambda_{i+1,j}$ в (8) используется модифицированное соотношение (7) с введенным в него стабилизирующим функционалом $\lambda_{i+1,j} = \lambda_0 + (k_\lambda - \alpha) v_{i,j}$, включающим параметр регуляризации α . Значение параметра α и величину h согласуют с τ и δ .

Устойчивость вычислительной схемы метода

Исследуем устойчивость вычислительной схемы, используя подход, принятый в теории регуляризации [2], [13], вводя в рассмотрение функции w_i , определяемые формулой

$$w_{i+1} = \max_{j=\overline{1, M+1}} |v_{i+1,j} - v_{i,j}|.$$

Согласуем значение N , характеризующее дискретизацию по пространственной переменной, с количеством измерений $(M + 1)$, а параметр регуляризации α выберем так, чтобы при известном значении $(M + 1)$ величина температурной погрешности удовлетворяла бы неравенству $w_{N+1} \leq K\delta$, где K – некоторая константа. Введем следующие параметры:

$$S = \max_{j=1, M+1} |q_j|, \quad \mu = \max_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}}, \quad \eta = \max_{i,j} \frac{c_{i,j} \rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau}. \quad (9)$$

Выбираем α таким, что при всех $i = \overline{1, N+1}$ и $j = \overline{1, M+1}$ было выполнено условие

$$\alpha \leq \min_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)|v_{i,j}|}. \quad (10)$$

Учитывая теплофизические свойства процесса термообработки в печах, получаем, что $\mu < 1$, тогда, имеет место следующая оценка

$$w_{i+1} \leq \eta \max_{j=1, M} |v_{i,j+1} - v_{i,j}| + \mu w_i. \quad (11)$$

Учитывая ограниченность функции $u(r, t)$, из (4) получаем, что

$$\max_{j=1, M} |v_{i,j+1} - v_{i,j}| \leq 2\Phi e^{\ell+T}. \quad (12)$$

Из (9)–(12), получаем

$$w_2 = \max_{j=1, M+1} |v_{2,j} - v_{1,j}| \leq \max_{j=1, M+1} |q_j h| \leq h(S + \delta) \leq S + \delta,$$

$$w_{i+1} \leq 2\Phi e^{\ell+T} \frac{\eta}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{i-1}, \quad i = \overline{3, N+1}.$$

Тогда имеет место следующая оценка

$$w_{N+1} \leq 2\eta\Phi e^{\ell+T} \frac{1}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{N-2},$$

характеризующая величину погрешности численного метода решения задачи (1)–(3). Учитывая (9), (10) и то, что $\lambda_{i+1,j} = \lambda_0 + (k_\lambda - \alpha)v_{i,j}$, выберем шаги дискретизации так, чтобы имело место

условие $\eta \leq \frac{\delta}{2\Phi e^{(\ell+T)}}$. Тогда получаем, что при выполнении следующего условия

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \frac{\delta}{2\Phi e^{(\ell+T)}} \left(\min_{i=2, N+1, j=1, M+1} \left(\frac{\lambda_{i,j}}{c_{i,j} \rho_{i,j}} \right) \right) \quad (13)$$

имеет место оценка $w_{N+1} \leq \frac{\delta}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{N-2}$. Принимая во внимание, что $\mu < 1$, получаем, что

при соблюдении условия

$$N > 2 + \log_{\mu} \left(\left(K - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{S + \delta} \right), \quad (14)$$

где $K \geq 1 + \frac{1}{1-\mu}$, будет выполнено требуемое неравенство $w_{N+1} \leq K\delta$. Соотношения (13), (14) свиде-

тельствуют о локальной устойчивости предлагаемого метода определения температур.

Заметим, что аналогичные результаты были получены в работе [19] для задачи измерения определения температуры на поверхности цилиндра по результатам измерений на оси, связанной с диагностикой состояния температурного датчика. Это свидетельствует о том, что в отличие от методов, ориентированных на вычисления по переменной, характеризующей время, при изменении направления вычислений по пространственной переменной не требуется разработка принципиально новой вычислительной схемы, а достаточно ограничиться модификацией основной схемы.

Оценка температурных погрешностей

Оценим величину наибольшего возможного отклонения вычисленных температурных значений от действительных, используя величины s_i , определяемые формулой

$$s_i = \max_{j=1, M+1} |v_{i,j} - u_{i,j}|, \quad i = \overline{1, N+1},$$

где $v_{i,j}$ является приближенным решением задачи (5), (6), а $u_{i,j}$ соответствует действительным значениям температуры при текущем значении радиуса $r = r_i$ в момент времени $t = t_j$. Имеем

$$\begin{aligned} s_{i+1} \leq & s_i + \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{(\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}) \tau} 2\Phi e^{(\ell+T)} + 2 \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} s_i + \\ & + \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1) h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\ & + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1) h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \frac{\lambda_{i,j} h}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\ & + \frac{\lambda_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Оценивая слагаемые в (15) и учитывая (13) и (14), получаем

$$\frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{(\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}) \tau} 2\Phi e^{(\ell+T)} \leq \delta. \quad (16)$$

Из (11), (15), определения μ и подхода к вычислению $\lambda_{i+1,j}$ получаем:

$$\frac{|\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}| (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\alpha |v_{i,j}| (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} < \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i,j} i - \alpha |v_{i,j}| (i-1)} < \frac{\mu}{i-1} \leq \frac{\mu}{2}; \quad (17)$$

$$\frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \mu, \quad \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\mu}{i-1} \leq \frac{\mu}{2}. \quad (18)$$

Обозначим $\lambda^* = \min_{i=1, N+1, j=1, M+1} \lambda_{i,j}$. Учитывая, что $\frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} = k_\lambda$, имеем

$$\left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{k_\lambda}{\lambda^*}.$$

Отсюда и из соотношений (4), (15)–(18) следует, что

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu) s_i + \delta + \left(\eta C \tau^2 + \frac{3}{2} \mu C h^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda^*} C^2 + \frac{\mu}{2} C \right) h^4 \right), \quad i = \overline{2, N}.$$

Учитывая (14), получаем при $i = \overline{2, N+1}$

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu) s_i + \delta + \eta C \tau^2 + \frac{3C\mu\ell^2}{2N^2} + \frac{k_\lambda}{\lambda^*} \frac{C^2\ell^4}{N^4} + \frac{C\mu\ell^4}{2N^4}. \quad (19)$$

Полагаем $\Psi = \eta C \tau^2 + \frac{3C\mu\ell^2}{2N^2} + \frac{k_\lambda}{\lambda^*} \frac{C^2\ell^4}{N^4} + \frac{C\mu\ell^4}{2N^4}$. Тогда соотношение (19) имеет вид

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu) s_i + \delta + \Psi \leq (1 + 2\mu)^{i-1} s_2 + \left(\sum_{k=0}^{i-2} (1 + 2\mu)^k \right) (\delta + \Psi).$$

Учитывая, что $s_2 = \max_{j=1, M+1} |v_{2,j} - u_{2,j}| \leq \delta + h(\delta + C)$, получаем, что для величины s_{N+1} , харак-

теризующей наибольшее отклонение численного решения от истинных температур на оси цилиндра, имеет место следующая оценка:

$$s_{N+1} \leq (1 + 2\mu)^{N-1} \left(\delta + \frac{\ell(\delta + C)}{2 + \log_{\mu} \left(\frac{\delta}{S + \delta} \right)} + \frac{1}{4\mu^2} (\delta + \Psi) \right). \quad (20)$$

Из соотношений (14), (20) следует, что сходимость метода зависит от величины шагов дискретизации, следовательно, метод является условно сходящимся и для получения приближенного решения необходимо выбирать достаточно небольшие значения N .

Из соотношения (20) следует, что величина s_{N+1} , соответствующая наибольшей температурной погрешности, будет достаточно велика на всем $[0, T]$. Это согласуется с результатами, представленными в [6], в соответствии с которыми невозможно получить единственное решение во всей области $\overline{Q_T}$, а следовательно, невозможно точно оценить температурные погрешности во всей области $\overline{Q_T}$, но возможно получить более точную оценку температурных погрешностей (оценку погрешности метода) только в некоторой подобласти D_ε . Для получения уточненных оценок погрешностей был проведен вычислительный эксперимент на основе имитационного моделирования. Результаты эксперимента представлены в данной работе.

Результаты вычислительного эксперимента

С целью проверки принципиальной возможности определения температуры внутри тела по результатам поверхностных измерений и получения оценки температурной погрешности был проведен вычислительный эксперимент на основе имитационного моделирования.

Методика эксперимента заключалась в следующем. На начальном этапе эксперимента находили решение прямой задачи:

$$c(u)\rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(u)r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (r, t) \in Q_T; \quad (21)$$

$$u(0, t) = \phi_0(t), \quad u(\ell, t) = p_0(t), \quad t \in [0, T]; \quad (22)$$

$$u(r, 0) = g_0(r), \quad r \in [0, \ell]. \quad (23)$$

Полученное решение $u_0(r, t)$ прямой задачи (21)–(23), характеризующее температурное поле цилиндра, и функцию $\phi_0(t)$, соответствующую температуре на оси цилиндра, использовали в дальнейшем в качестве тестовых функций.

На втором этапе эксперимента осуществляли моделирование функции $q_0(t)$, характеризующей внешнее тепловое воздействие. Ситуацию возникновения погрешностей в результатах измерения представляли следующим образом. В каждой точке t_j формировали приближенные значения $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$, используя следующие формулы:

$$p_\delta(t_j) = p_0(t_j) + er_p(t_j), \quad q_\delta(t_j) = q_0(t_j) + er_q(t_j).$$

Величины $er_p(t_j)$ и $er_q(t_j)$ соответствуют значениям случайных величин, равномерно распределенных на $[-\delta, \delta]$. Предлагаемый подход к моделированию $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$, эквивалентен появлению аддитивных случайных погрешностей в результатах измерений вблизи поверхности цилиндра, уровень которых не превосходит величины δ . Полученные значения $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$ определяли исходные данные в задаче (1)–(3).

На следующем этапе эксперимента находили приближенное решение $u_\delta(r, t)$ задачи (1)–(3) по исходным данным $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$, δ и вычисляли значения температурной функции $u_\delta(0, t) = \phi_\delta(t)$. Функция $u_\delta(r, t)$ соответствует прогнозируемым температурным значениям, получаемым в области из $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$ с помощью предлагаемого метода дискретной регуляриза-

ции, а функция $\phi_\delta(t)$ соответствует температурным значениям на оси цилиндра. На следующем этапе эксперимента проводили сравнительный анализ полученных численных решений $u_\delta(r, t)$ и $\phi_\delta(t)$ с тестовыми функциями.

В работе представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного на основе имитационного моделирования в соответствии с предложенной методикой. В качестве эталонной модели рассматривался процесс теплопереноса в цилиндре радиуса $\ell = 1$, помещенного в камерную печь, разогретую до температуры 400°C . Теплофизические характеристики материала $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ соответствовали характеристикам стали марки Ст45, [17], [18]. Продолжительность процесса составила $T = 60$ мин. При решении прямой задачи (21)–(23) полагали, что начальной температуре тела соответствовало значение $u(r, 0) = 25^\circ\text{C}$, $r \in [0, \ell]$. При формировании тестовой функции $p(t)$, $\phi(t)$, а также функции $q(t)$ использовали результаты, представленные в [20].

Результаты вычисления температурного поля цилиндра $u_\delta(r, t)$, полученные в подобласти $D_\varepsilon \subset Q_T$, $D_\varepsilon = [0, \ell] \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$ при $\delta = 0,05$ с помощью предложенной вычислительной схемы, а также тестовая функция $u_0(r, t)$ представлены на рис. 2а. Поверхность Exact solution соответствует графику тестовой температурной функции $u_0(r, t)$, а поверхность Regularized solution представляет график приближенного решения $u_\delta(r, t)$ задачи (1)–(3), соответствующие прогнозируемым температурным значениям в подобласти D_ε .

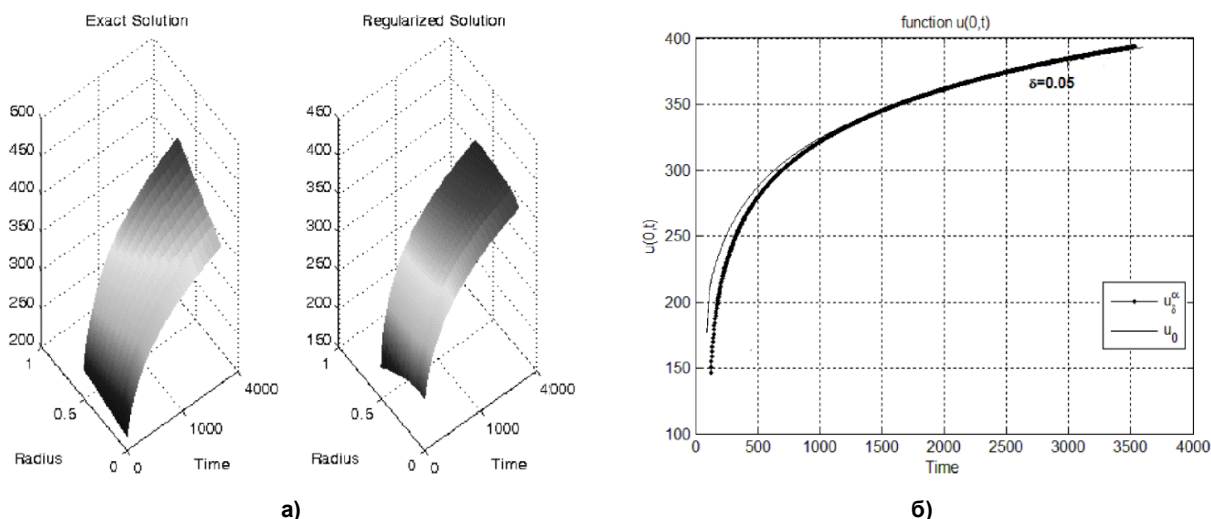


Рис. 2. Температурное поле цилиндра

Результаты вычисления температур на оси цилиндра $\phi_\delta(t)$ и график тестовой функции $\phi_0(t)$ при $t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)$ представлены на рис. 2б. Обозначение u_0 соответствует графику тестовой функции $\phi_0(t)$, а обозначение u_δ^α – графику численного решения $\phi_\delta(t)$ задачи (1)–(3).

Как отмечалось ранее, невозможно точно оценить температурные погрешности при всех $t \in [0, T]$, получить оценку погрешности метода возможно только в некоторой подобласти $(\varepsilon, T - \varepsilon)$. В эксперименте был проведен сравнительный анализ тестовой температурной функции $\phi_0(t)$, заданной на оси цилиндра, и температурной функции $\phi_\delta(t)$, вычисленной на оси. Для проведения сравнительного анализа $\phi_0(t)$ и $\phi_\delta(t)$ в эксперименте были использованы величины Δ и Θ , определяемые формулами:

$$\Delta = \max_{t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)} |\phi_\delta(t) - \phi(t)|, \quad \Theta = \max_{t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)} \frac{|\phi_\delta(t) - \phi(t)|}{|\phi(t)|}.$$

Величина Δ соответствует наибольшей оценке отклонений температур, найденных с помощью предложенного метода во внутренних точках цилиндра, от тестовых значений. Результаты сравнительного анализа при различных значениях δ и N и $\varepsilon = 0,03T$ представлены в таблице.

Оценки температурных погрешностей

δ	N	Δ	Θ
0,05	5	27,95	0,2023
	6	26,86	0,1944
	7	25,56	0,1850
	8	20,72	0,1511
	9	$2 \cdot 10^{56}$	–
	10	$0,5 \cdot 10^{123}$	–
0,1	5	29,54	0,2307
	6	27,12	0,2118
	7	26,08	0,2037
	8	21,76	0,1691
	9	$0,5 \cdot 10^5$	–
	10	$2 \cdot 10^{133}$	–

Используя величины Δ и Θ , определяемые формулой (24), получили, что при $\delta = 0,05$ для рассматриваемого примера величина температурных погрешностей на оси цилиндра составила $\Delta \approx 21^\circ\text{C}$, и $\Theta = 0,15$ при $\varepsilon = 0,03T$, а при $\varepsilon = 0,06T$ значения этих величин составили $\Delta \approx 9^\circ\text{C}$, и $\Theta = 0,05$ соответственно.

Таким образом, результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный метод позволяет с достаточной точностью находить требуемую температурную функцию $u(r, t)$ во внутренних точках цилиндрического тела при соблюдении условий согласования величин шага дискретизации h , параметра регуляризации α с интервалом измерения τ , а наибольшие значения оценок температурных погрешностей являются достаточно точными в интервале $(\varepsilon, T - \varepsilon)$.

Заключение

В работе рассмотрена математическая модель теплопереноса внутри цилиндрического тела с неизвестной начальной температурой и предложен метод определения температурного состояния тела по исходным данным, известным на поверхности. Вычислительная схема метода основана на использовании конечно-разностных уравнений и включает регуляризирующий алгоритм идентификации коэффициентов. Показана локальная устойчивость метода, а также найдена теоретическая оценка погрешности метода, соответствующая оценке наибольшего отклонения вычисленных температур от действительных значений. В работе представлены результаты вычислительного эксперимента, которые согласуются с теоретическими результатами и свидетельствуют о том, что предложенная вычислительная схема позволяет прогнозировать температуру во внутренних точках тела, подвергаемого внешнему тепловому воздействию с достаточной точностью.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации прикладных научных исследований в рамках базовой части Государственного задания «Разработка, исследование и реализация алгоритмов обработки данных динамических измерений пространственно-распределенных объектов», техническое задание 8.9692.2017/8.9 от 17.02.2017.

Литература

1. Алифанов, О.М. Обратные задачи теплообмена / О.М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 784 с.

3. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013. – 257 с.
4. Мартинсон, Л.К. Температурное поле цилиндрического тела в режиме периодического разогрева / Л.К. Мартинсон, О.Ю. Чигирёва // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2015. – № 3 (60). – С. 88–98.
5. Лукин С.В. Режим нагрева и термостатирования слябов в печи при горячем посаде / С.В. Лукин // Металлург. – 2018. – № 7. – С. 54–58.
6. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
7. *New approaches to error estimation to Ill-posed problems with application to inverse problems of heat conductivity* / K.Y. Dorofeev, N.N. Nikolaeva, V.N. Titarenko, A.G. Yagola // *Journal of Inverse and Ill-posed problems*. – 2002. – Vol. 10, no. 2. – P. 155–169. DOI: 10.1515/jiip.2002.10.2.155
8. Кабанихин, С.И. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач / С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – Т. 5. – С. 595–608.
9. Солодуша, С.В. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода / С.В. Солодуша, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 327–335.
10. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – СПб.: Лань. – 2009. – 608 с.
11. Вабищевич, П.Н. Монотонные разностные схемы для задач конвекции/диффузии / П.Н. Вабищевич // Дифференциальные уравнения. – 1994 – Т. 30, № 3. – С. 503–515.
12. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
13. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – Изд-во МГУ, 1990. – 115 с.
14. Табаринцева, Е.В. Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2018. – Т. 21, № 3. – С. 293–313. DOI: 10.1134/s1995423918030059
15. *Yaparova, N. Method for temperature measuring in the rod with heat source under uncertain initial temperature* / N. Yaparova // 2016 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016. – Proceedings 7911716. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911716
16. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
17. Марочник стали и сплавов / А.С. Зубченко, М.М. Колосков, Ю.В. Каширский и др.; под общ. ред. А.С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.
18. Лившиц, Б.Г. Физические свойства металлов и сплавов / Б.Г. Лившиц, В.С. Крапошин, Я.Л. Линецкий. – М.: Металлургия, 1980. – 320 с.
19. Япарова, Н.М. Численный метод решения обратной задачи с неизвестными начальными условиями для нелинейного уравнения теплопроводности / Н.М. Япарова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2016. – Т. 5, № 2. – С. 43–58. DOI: 10.14529/cmse160204
20. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергия, 1975. – 488 с.

Япарова Наталья Михайловна, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; iaparovannm@susu.ru.

Поступила в редакцию 2 марта 2019 г.

METHOD FOR DETERMINING THE TEMPERATURE STATE OF A CYLINDER AT THE HEAT TREATMENT WITH INCOMPLETE INITIAL DATA

N.M. Yaparova, iaparovnm@susu.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper is devoted to the problem of determining the temperature inside the cylinder based on the surface measurements. The main characteristics of the material such as specific heat, thermal conductivity and material density depend on the temperature at each point of the body. This problem appears in complex heat treatment of products. The mathematical model of heat transfer is presented as nonlinear heat conduction equation with unknown initial condition. In this problem, both the Dirichlet and Neumann boundary conditions are given. The computational scheme of the method is based on the using of finite-difference equations and regularization technique. This approach allows to obtain the temperature inside cylindrical body and then to determine the unknown temperature on the cylinder axis. We investigate the stability of computational method and obtain the dependence of stability on the discretization steps and level error of the initial data. The reliability and the efficiency of the method were confirmed by results of computational experiments.

Keywords: heat transfer, inverse problem; regularization method; data processing method; computational stability, error estimate.

The work was conducted with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation of applied scientific research within the framework of the basic part of the State task “Development, research and implementation of data processing algorithms for dynamic measurements of spatially distributed objects”, Terms of Reference 8.9692.2017/8.9 from 17.02.2017.

References

1. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 280 p.
2. Samarskij A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003. 784 p.
3. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyakh* [The Methods of Control Theory in Dynamic Measurements]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2013. 257 p.
4. Martinson L.K., Chigiryova O.Y. [Thermal Fields of a Cylindrical Body during Cyclic Heating]. Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences, 2015, no. 3 (60). pp. 88–98. (in Russ.)
5. Lukin S.V. [Mode of Slabs Heating and Thermostating in Furnace at Hot Charge]. *Metallurgist*, 2018, no. 7, pp. 54–58. (in Russ.)
6. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 286 p.
7. Dorofeev, K.Y., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. New Approaches to Error Estimation to Ill-posed Problems with Application to Inverse Problems of Heat Conductivity. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2002, vol. 10, no. 2, pp. 155–169. DOI: 10.1515/jiip.2002.10.2.155
8. Kabanihin S.I., Shishlenin M.A. [Direct and Iteration Methods for Solving Inverse and Ill-Posed Problems]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2008, vol. 5, pp. 595–608. (in Russ.)
9. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical Solving an Inverse Boundary Value Problem of Heat Conduction Using Volterra Equations of the First Kind. *Numerical Analysis and Applications*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 267–274. DOI: 10.1134/s1995423915030076

10. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of Computational Mathematics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009. 608 p.
11. Vabishchevich P.N. Monotone Difference Schemes for Convection/Diffusion Problems. *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 3, pp. 466–474.
12. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Moscow St. Univ. Publ., 1999. 799 p.
13. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems]. Moscow, Moscow St. Univ. Publ., 1990. 115 p.
14. Tabarintseva E.V. Estimating the Accuracy of a Method of Auxiliary Boundary Conditions in Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Equation. *Numerical Analysis and Applications*, 2018, vol. 11, iss. 3, pp. 236–255. DOI: 10.1134/s1995423918030059
15. Yaparova N. Method for Temperature Measuring in the Rod with Heat Source under Uncertain Initial Temperature. *2016 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016*. Proceedings 7911716. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911716
16. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. *Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p.
17. Zubchenko A.S., Koloskov M.M., Kashirskiy Yu.V. et al. *Marochnik stali i splavov* [Steel and Alloys: Grade Guide]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 2003. 784 p.
18. Livshits B.G., Kraposhin V.S., Linetskiy Ya.L. *Fizicheskiye svoystva metallov i splavov* [Physical Properties of Metals and Alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1980. 320 p.
19. Yaparova N.M. [Numerical Method for Solving an Inverse Problem for Nonlinear Parabolic Equation with Unknown Initial Conditions]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computational Mathematics and Software Engineering*, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 43–58. (in Russ.) DOI: 10.14529/cmse160204
20. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. *Teploperedacha* [Heat Transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1975. 488 p.

Received 2 March 2019

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Япарова, Н.М. Метод прогнозирования температурного состояния цилиндра при термообработке в условиях неполной исходной информации / Н.М. Япарова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 54–65. DOI: 10.14529/ctr190205

FOR CITATION

Yaparova N.M. Method for Determining the Temperature State of a Cylinder at the Heat Treatment with Incomplete Initial Data. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 54–65. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctr190205