

# Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы

УДК 519.6, 517.9

DOI: 10.14529/ctcr190406

## ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ

*Н.М. Япарова, Т.П. Гаврилова*

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия*

В статье рассмотрена задача измерения, связанная с проблемой определения температуры внутри объекта, подвергаемого внешнему тепловому воздействию. В каждой точке поверхности тепловое воздействие одинаково и изменяется только по времени. В этом случае задача измерения температуры имеет вид задачи теплопереноса в линейном объекте, один конец которого соответствует точке на поверхности тела, а второй – внутренней контрольной точке. Исходные данные в задаче формируются на основе температурных измерений вблизи поверхности объекта.

В данной работе задача теплопереноса сводится к интегральной модели с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа. Полученное интегральное уравнение является уравнением Вольтерра I рода и характеризует прямую зависимость неизвестных температурных функций в контрольной точке от исходных данных. Для построения численного решения интегрального уравнения, устойчивого относительно погрешности исходных данных, в работе предложена вычислительная схема, основанная на регуляризирующем подходе, в котором одним из параметров регуляризации является количество слагаемых в ядре.

С целью получения экспериментальных оценок погрешностей решений задачи измерения был проведен вычислительный эксперимент на основе имитационного моделирования. В ходе эксперимента определены значения температурных функций в контрольной точке объекта и на основании полученных граничных функций найдены значения температуры во внутренних точках объекта. Также в ходе эксперимента выполнен сравнительный анализ найденных температурных функций в контрольной точке с тестовыми значениями. Результаты вычислительного эксперимента приведены в работе и свидетельствуют о достаточной точности предложенного вычислительного метода определения температуры при линейном теплопереносе.

*Ключевые слова: теплоперенос, уравнение теплопроводности, преобразование Лапласа, численный метод, задача измерения.*

### Введение

Развитие современных технологий в металлургии, машиностроении, химической промышленности неразрывно связано с исследованием процессов теплопереноса. Результаты этих исследований служат основой для выбора режима внешнего теплового воздействия, под действием которого формируются требуемые теплофизические характеристики объекта, а также осуществляется температурный контроль процесса теплопереноса.

При реализации многих технологических процессов связанных, например, с вторичной или комплексной термообработкой, прокаткой труб, конструкция оборудования позволяет измерять температурные функции только вблизи поверхности объекта. В этих случаях возникает необходимость в разработке математических моделей и численных методов определения температуры в недоступной для измерений части объекта по результатам поверхностных измерений. Подобные задачи возникают при термообработке, при технической диагностике работы оборудования в паровых и газораспределительных системах.

Задачи, в которых требуемые значения физической величины находят из результатов кос-

венных измерений вблизи поверхности, относят к классу обратных граничных задач. Существенная особенность обратных задач заключается в том, что при применении общепринятых численных алгоритмов [1, 2] получают приближенные решения, неустойчивые относительно погрешности исходных данных, т. е. незначительные погрешности исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к неверному результату. Таким образом, возникает необходимость в разработке численных методов, устойчивых относительно погрешности исходных данных. Основным подходом к построению подобных методов является использование регуляризирующих алгоритмов.

Исследованию обратных граничных задач, связанных с процессами теплообмена, посвящены работы О.А. Алифанова [3], С.И. Кабанихина [4], А.И. Короткого [5], Д. Бека [6]. С разработкой и исследованием численных методов и регуляризирующих алгоритмов связаны работы А.С. Апарцина, А.Б. Бакушинского [7], В.В. Васина [8], Г.И. Марчука [9] и других исследователей [10, 11].

В работе рассмотрена задача теплопереноса, в которой внешнее тепловое воздействие на объект одинаково в каждой точке поверхности. В этом случае задача определения температуры во внутренних точках имеет вид задачи теплопереноса в линейном объекте, один конец которого соответствует точке на поверхности тела, а второй – внутренней контрольной точке. Специфика технологического процесса, связанного с термообработкой, исключает существенные изменения основных теплофизических характеристик материала, поэтому полагаем, что теплопроводность, удельная теплоемкость и плотность являются постоянными величинами. Исходные данные в задаче формируются в соответствии с результатами измерения температуры, полученными от температурных датчиков, расположенных вблизи поверхности объекта.

Математическая модель процесса распределения тепла внутри линейного объекта включает уравнение теплопроводности, значения температуры во внутренних точках линейного объекта в начальный момент времени, граничные условия, которые формируются из результатов измерения температурных функций на одной из границ объекта и вблизи нее.

В рассматриваемой задаче измерения уравнение теплопроводности с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа приводится к интегральному уравнению Вольтерра, представляющему прямую зависимость неизвестной температурной функции от исходных данных. Преобразование Лапласа для приближенного решения уравнения теплопроводности применялось многими исследователями [10, 12, 13].

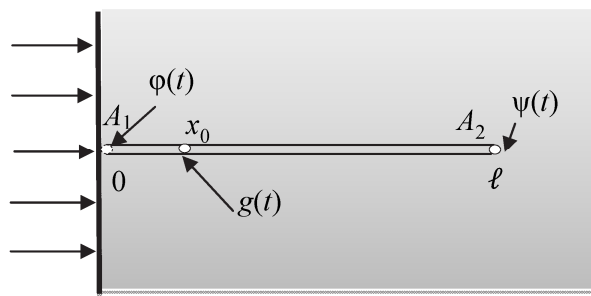
В данной работе, в отличие от известных методов, предложен подход, состоящий из двух этапов. На первом этапе формируется интегральная модель задачи теплопереноса, характеризующая линейную зависимость неизвестной температурной функции от исходных данных, а затем для численного решения полученного уравнения используется метод регуляризации, обеспечивающий устойчивость вычислительной процедуры относительно погрешности исходных данных. Преимущество предложенного подхода заключается в том, что полученное на первом этапе интегральное уравнение Вольтерра I рода напрямую связывает искомую температурную функцию и исходные данные. Теоретические аспекты интегральных уравнений, а также методы их решения являются хорошо исследованной областью. Представленный в работе численный метод решения интегрального уравнения основан на принципах естественной регуляризации и является обобщением результатов, изложенных в работе [11].

С целью оценки эффективности предложенного подхода проведен вычислительный эксперимент, который включает сравнительный анализ найденных значений неизвестной температурной функции и тестовых значений, а также определение температурной функции во внутренних точках линейного объекта на основе вычисленных граничных функций. В работе приведены результаты вычислительного эксперимента, которые свидетельствуют о достаточной точности предложенного вычислительного метода.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу измерения, связанную с процессом теплопереноса в однородном теле, у которого теплофизические характеристики материала: удельная теплоемкость, теплопроводность и плотность несущественно изменяются в пространстве и времени. Полагаем, что объект не содержит внутренних источников энергии. Процесс претерпевает плавные изменения, без фазовых переходов.

Измерения температуры проводятся в граничной области. Схема измерения представлена на рис. 1. Датчики измеряют температуру в точках  $A_1$  и  $x_0$ . В задаче измерения требуется определить изменение температуры внутри тела, вплоть до контрольной точки  $A_2$ . Реализация данной схемы измерения рассмотрена, например, в работе [3].



**Рис. 1. Схема измерения температуры:**  $A_1, x_0$  – точки, в которых проводятся измерения температуры,  $A_2$  – контрольная точка, в которой требуется определить температуру

Введем следующие обозначения:  $t$  – время,  $x$  – расстояние от поверхности до контрольной точки линейного объекта,  $\ell$  – длина линейного объекта  $A_1A_2$ , функция  $u(x, t)$  характеризует значение температуры в точке  $(x, t)$ . Функция  $\varphi(t) = u(0, t)$  формируется по результатам измерения температуры на поверхности тела в точке  $A_1$ , а функция  $g(t) = u(x_0, t)$  – по результатам измерения в точке  $x_0$ . В начальный момент времени температура объекта была постоянной  $C$ . В задаче требуется определить температуру  $u(\ell, t) = \psi(t)$  в контрольной точке  $A_2$ .

Учитывая, что в технологическом процессе недопустимы резкие перепады температур и температурных градиентов, полагаем, что во внутренних точках объекта  $u(x, t) \in H^{2,1}((0, 1) \times (0, T)) \cap C([0, 1] \times [0, T])$  и  $g(t), \varphi(t) \in C^{2+\eta}[0, T]$  при всех  $T > 0$  и  $\eta \in (0, 1)$ . Также существуют постоянные  $C_0, C_1, C_2 \geq 0$  и  $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \geq 0$  такие, что  $|u(x, t)| \leq C_0 e^{\beta_0(x+t)}$ ,  $|\varphi(t)| \leq C_1 e^{\beta_1 t}$  и  $|\psi(t)| \leq C_2 e^{\beta_2 t}$  выполнены при  $x \in [0, \ell]$  и при всех  $t \in [0, \infty)$ . При этом функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют конечное число экстремумов для любого  $t \in [0, T]$  при всех  $T > 0$ , т. е. удовлетворяют условиям Дирихле.

Основываясь на характеристиках теплопереноса, математическая модель рассматриваемой задачи включает: уравнение теплопереноса

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

граничные условия, которые сформированы в соответствии с результатами измерений, полученных от датчиков, расположенных на поверхности и вблизи нее,

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x_0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

а также начальные условия

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, \ell]. \quad (3)$$

В данной задаче требуется найти граничное значение функции

$$u(\ell, t) = \psi(t), \quad (4)$$

и затем, используя  $\psi(t)$ , найти температурные значения вдоль всего линейного объекта. Задача (1)–(4) является обратной граничной задачей, существование и единственность решения которой обоснованы в [3, 7].

При решении поставленной задачи необходимо учитывать наличие отклонений результатов измерений от действительных значений. Представим эту ситуацию следующим образом. Вместо действительных значений  $g_0$  и  $\varphi_0$  известны измеренные значения  $g_\delta$ ,  $\varphi_\delta$  и допустимый уровень отклонений  $\delta > 0$  такой, что  $\max \{ \|\varphi_\delta - \varphi_0\|, \|g_\delta - g_0\| \} \leq \delta$ . Таким образом, требуется разработать метод определения температуры в контрольной точке  $u_\delta(\ell, t) = \psi_\delta(t)$  по исходным данным  $\varphi_\delta$ ,  $g_\delta$ ,  $\delta$  и, основываясь на полученных результатах, определить температуру  $u_\delta(x, t)$  вдоль всего линейного объекта. Получить температурные значения с требуемой точностью можно за счет введения новых алгоритмов обработки результатов измерения, устойчивых относительно погрешности исходных данных.

Задача (1)–(4) относится к классу некорректных задач, когда малые отклонения в исходных данных приводят к значительным отклонениям в конечном результате [15].

В работе предложен следующий подход к построению вычислительной схемы определения температуры в контрольной точке. Сначала переходим к интегральной модели. С этой целью исходная задача с помощью преобразования Лапласа приводится к интегральному уравнению Вольтерра, которое характеризует прямую зависимость неизвестной функции  $\psi(t)$  от исходных данных. Затем для результирующего интегрального уравнения разрабатывается численный метод решения и определяется приближенное значение  $\psi_\delta(t)$ . Далее, основываясь на результатах, прогнозируется значение температурной функции  $u_\delta(x, t)$  во внутренних точках объекта. Идея предложенного подхода к решению обратной граничной задачи является обобщением метода, представленного в работе [11].

### Интегральная модель теплопереноса

В данной работе для получения интегрального уравнения, связывающего исходные данные и искомую функцию  $u(\ell, t) = \psi(t)$ , предложен следующий подход. Сначала находим решение прямой задачи, полагая, что искомая функция  $\psi(t)$  нам известна. Математическая модель прямой задачи имеет вид:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, \ell]. \quad (7)$$

Исходя из характеристик процесса теплопереноса и следуя результатам, представленным в работе [14], применим прямое преобразование Лапласа к задаче (5)–(7). Функциям  $u(x, t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  соответствуют изображения  $\bar{u}(x, p)$ ,  $\bar{\varphi}(p)$  и  $\bar{\psi}(p)$ . Операторное изображение прямой задачи (5)–(7) имеет вид:

$$\bar{u}_{xx} - \frac{p}{a} \bar{u} = -\frac{C}{a}, \quad (8)$$

$$\bar{u}(0, p) = \bar{\varphi}(p), \quad \bar{u}(\ell, p) = \bar{\psi}(p). \quad (9)$$

Решив задачу Коши (8)–(9), получаем, что:

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p) \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}\ell} + \bar{\psi}(p) \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}\ell} - \frac{C}{p} \left( \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}\ell} + \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}\ell} \right) + \frac{C}{p}. \quad (10)$$

Основываясь на результатах, доказанных в [11], получаем:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}\ell} = \frac{\ell-x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(\ell-x)}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2}}, \quad (11)$$

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}\ell} = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2}}. \quad (12)$$

Ряды в правых частях (11) и (12) равномерно сходятся для всех  $x \in (0, \ell)$ . Выполнив соответствующие преобразования в (10), получим, что решению задачи (5)–(7) соответствует следующее изображение:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) = & \bar{\varphi}(p) \frac{\ell - x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \bar{\varphi}(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2}} + \\ & + \bar{\psi}(p) \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \bar{\psi}(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2}} + \\ & + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{C}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) \cdot \frac{p}{p + \frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание, что функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  являются ограниченными и удовлетворяют условиям Дирихле, применим обратное преобразование Лапласа к обеим частям (13), используя теорему о свертке [15, 16], и получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \varphi(t) \frac{\ell - x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau + \\ & + \psi(t) \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau + \\ & + \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} R_1 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau, \\ R_2 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Исследуем сходимость полученных рядов. Из свойств функционалов в линейных нормированных пространствах [17] и функции  $\varphi(t)$  имеем:

$$\left| \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau \right| \leq C_1 \left| \int_0^t e^{\left(\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} + \beta_1\right) \tau} d\tau \right| = \frac{C_1 \ell^2}{(n^2 \pi^2 a + \ell^2 \beta_1)} \left( e^{\left(\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} + \beta_1\right) t} - 1 \right) \leq \frac{C_1 \ell^2 e^{\left(\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} + \beta_1\right) t}}{(n^2 \pi^2 a + \ell^2 \beta_1)},$$

тогда справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) \right| e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \left| \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau \right| \leq \\ \leq \frac{1}{n} \left| \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) \right| e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \cdot \frac{C_1 \ell^2 e^{\left(\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} + \beta_1\right) t}}{(n^2 \pi^2 a + \ell^2 \beta_1)} \leq \frac{C_1 \ell^2 e^{\beta_1 t}}{n(n^2 \pi^2 a + \ell^2 \beta_1)} \leq \frac{C_1 \ell^2 e^{\beta_1 t}}{n^3 \pi^2 a}. \end{aligned}$$

Отсюда, по теореме Вейерштрасса, следует абсолютная сходимость ряда  $R_1$ . Рассуждая аналогично и используя свойства функции  $\psi(t)$ , получим абсолютную сходимость ряда  $R_2$ .

Используя свойства сходящихся рядов, раскрываем оператор  $d/dt$  в (14) и получаем следующее представление для функции  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n(\ell-x)}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}\tau} d\tau + \\
 &+ \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}\tau} d\tau + \\
 &+ \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a}{\ell^2}t}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку два ряда, входящие в формулу (15), являются расходящимися, то, используя идею, представленную в [9, 11], аппроксимируем точное решение задачи (5)–(7) конечным рядом:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}\tau} d\tau + \\
 &+ \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}\tau} d\tau + \\
 &+ \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a}{\ell^2}t}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Так как функция  $u(x_0,t) = g(t)$  известна, обозначив сеточный аналог этой функции через  $g_N(t)$ , получим, что решение задачи (1)–(4) сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) \int_0^t \psi(\tau) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}(t-\tau)} d\tau &= g_N(t) - \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}(t-\tau)} d\tau - \\
 - \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a}{\ell^2}t}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Введем функции  $K(t, \tau)$  и  $L(t, \tau)$  при всех  $t \in [0, T]$ , согласно формулам:

$$K_N(t - \tau) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}(t-\tau)},$$

$$L_N(t - \tau) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\ell^2}(t-\tau)}.$$

Обозначим  $A\psi = \int_0^t K_N(t - \tau)\psi(\tau)d\tau$ , а

$$h_N(t) = g_N(t) - \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a}{\ell^2}t} - \int_0^t L_N(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Тогда эквивалентное представление интегрального уравнения (17) имеет следующий вид:

$$A\psi = h_N(t). \tag{18}$$

Из уравнения (18) при условии, что  $\max\{\|\varphi_\delta - \varphi_0\|, \|g_\delta - g_0\|\} \leq \delta$  для  $\delta > 0$ , находим  $u(\ell, t) = \psi(t)$ , а затем в области  $[0, \ell] \times [0, T]$  определяем значение функции  $u(x, t)$ .

### Вычислительная схема метода

В разделе предложен метод численного решения интегрального уравнения (18), основанный на регуляризирующем подходе. Параметрами регуляризации являются шаг дискретизации по времени  $\tau$  и величины  $N_1$  и  $N_2$ . Основная особенность полученного уравнения Вольтерра заключается в том, что один из рядов в формуле (15) является знакопеременным, и это требует специального подхода к выбору величин  $N_1$  и  $N_2$ . В данном исследовании параметры регуляризации выбираются апостериорно.

Основные этапы численного метода решения интегрального уравнения заключаются в следующем:

- Выберем начальные значения  $s$ ,  $N_1$  и  $N_2$ .
- Для вычисления интегралов введем равномерную сетку с узлами  $t_i$ , где  $t_i = (i-1)\tau$ ,  $\tau = T/s$ ,  $1 \leq i \leq s+1$ .
- Аппроксимируем интегралы, входящие в уравнение (18), суммами, используя метод правых прямоугольников, и в результате получаем систему алгебраических уравнений.
- Решая данную систему уравнений, находим температурную функцию  $\psi_\delta(t)$  в контрольной точке  $A_2$ .
- Итерационный процесс останавливаем, если выполнено условие

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |\psi_\delta(t) - \psi(t)|}{\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|} < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \in (0; 0,1).$$

### Вычислительный эксперимент

С целью проверки эффективности предложенного подхода к решению задачи теплопереноса, получения экспериментальных оценок погрешностей был проведен вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента выполнен сравнительный анализ полученных решений с тестовыми значениями.

На первом этапе вычислительного эксперимента моделируются тестовые значения функции  $u(x, t)$  с помощью конечно-разностных уравнений. Для этого в области  $[0, \ell] \times [0, T]$  введем равномерную сетку с узлами  $(x_i, t_j)$ , где

$$\begin{cases} x_i = (i-1)h_x, & h_x = \ell / r, & 1 \leq i \leq r+1; \\ t_j = (j-1)h_t, & h_t = T / m, & 1 \leq j \leq m+1. \end{cases}$$

Далее моделируют исходные данные для обратной задачи, используя формулу (16), тогда  $g(t_i) = u(x_0, t_i)$ , где  $x_0 = k \cdot \ell$ ,  $\ell \in (0, 1)$ .

Затем генерируются значения  $g_\delta(t_i)$  и  $\varphi_\delta(t_j)$  по формулам

$$g_\delta(t_i) = g(t_i) + \sigma_\delta(t_i) \quad \varphi_\delta(t_j) = \varphi(t_j) + \theta_\delta(t_j),$$

где  $\sigma_\delta(t_i)$  и  $\theta_\delta(t_j)$  являются значениями случайных величин, равномерно распределенных на отрезке  $[-\delta, \delta]$ .

На втором этапе вычислительного эксперимента находят решение  $\psi_\delta(t)$  интегрального уравнения (18) с помощью предложенного численного метода. Функция  $\psi_\delta(t)$  соответствует температурным значениям в контрольной точке.

На третьем этапе оценивают температурные погрешности с помощью функции  $\Delta(t)$  и величин  $\Delta_\psi$ ,  $\varepsilon_\psi$ , определяемых по формулам:

$$\Delta(t) = |\psi_\delta(t) - \psi(t)|, \tag{19}$$

$$\Delta_\psi = \max_{t \in [0, T]} \Delta(t), \quad \varepsilon_\psi = \frac{\Delta_\psi}{\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|}.$$

На следующем этапе эксперимента находят решение  $u_{\delta}(x,t)$  задачи теплопереноса (1)–(4), используя полученную функцию  $\psi_{\delta}(t)$ . Функция  $u_{\delta}(x,t)$  соответствует тепловому полю линейного объекта.

Вычислительный эксперимент проводился в области  $[0, \ell] \times [0, T]$  при  $\ell = 1$  и  $T = 1$ , начальная температура объекта  $u(x, 0) = 0$ ,  $x \in (0, \ell)$ , коэффициент температуропроводности  $a = 1$ .

Результаты вычислительного эксперимента для некоторых тестовых функций представлены в данной работе. В качестве тестовых использовались следующие типы функций:

1) температурная функция на поверхности объекта задана формулой  $\varphi_1(t) = 25(e^{2t} - 1)$ , а в контрольной точке температуру определяет функция  $\psi_1(t) = 100te^{0,8t}$ ;

2) на поверхности тела задана температурная функция  $\varphi_2(t) = 1000t(e^{-t} - e^{-2})$ , а в контрольной точке температуру определяет функция  $\psi_2(t) = 500te^{-t}$ .

На рис. 2а и 4а представлены графики тестовых функций  $\psi(t)$  и графики приближенных численных решений  $\psi_{\delta}(t)$  задачи (1)–(4). На рис. 2б и 4б представлены графики функций температурных погрешностей. На рис. 3а и 5а построены поверхности  $u(x,t)$ , соответствующие решениям прямой задачи (5)–(7), а на рис. 3б и 5б – графики поверхностей  $u_{\delta}(x,t)$ .

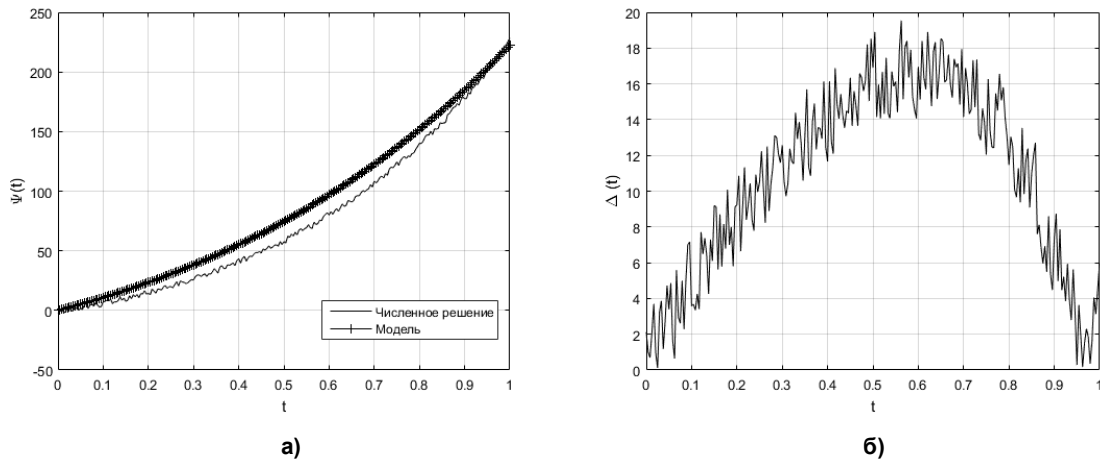


Рис. 2: а – результаты вычислительного эксперимента для тестовых функций  $\varphi_1(t) = 25(e^{2t} - 1)$ ,  $\psi_1(t) = 100te^{0,8t}$ ; б – график функции температурной погрешности  $\Delta(t)$

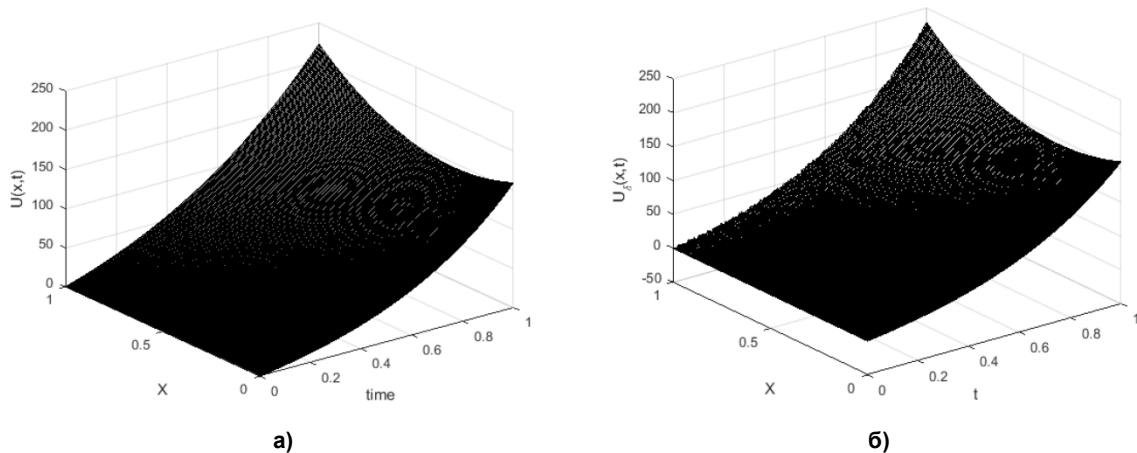


Рис. 3: а – график функции  $u(x,t)$ , соответствующей решению прямой задачи для тестовых функций  $\varphi_1(t) = 25(e^{2t} - 1)$ ,  $\psi_1(t) = 100te^{0,8t}$ ; б – результаты моделирования температуры во всех точках линейного объекта для приближенного решения  $\psi_{\delta}(t)$



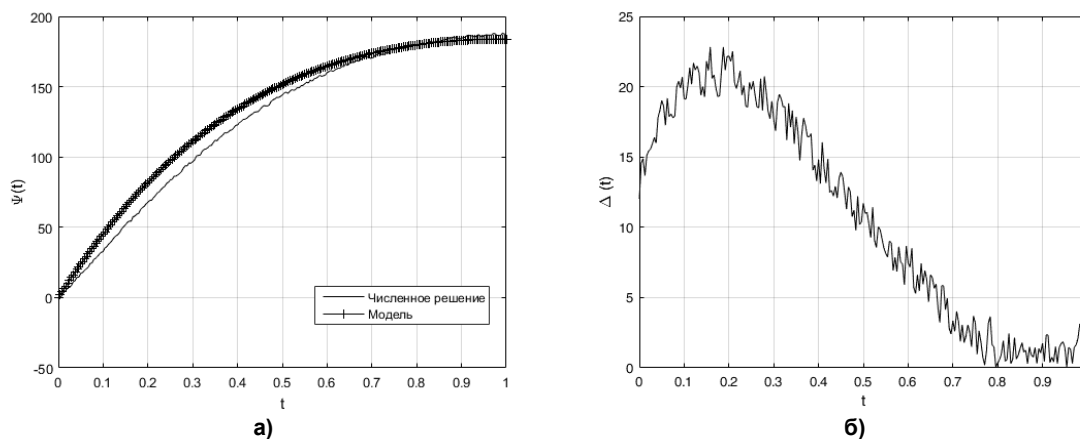


Рис. 4: а – результаты вычислительного эксперимента для тестовых функций  $\varphi_2(t) = 1000t(e^{-t} - e^{-2})$ ,  $\psi_2(t) = 500te^{-t}$ ; б – график функции температурной погрешности  $\Delta(t)$

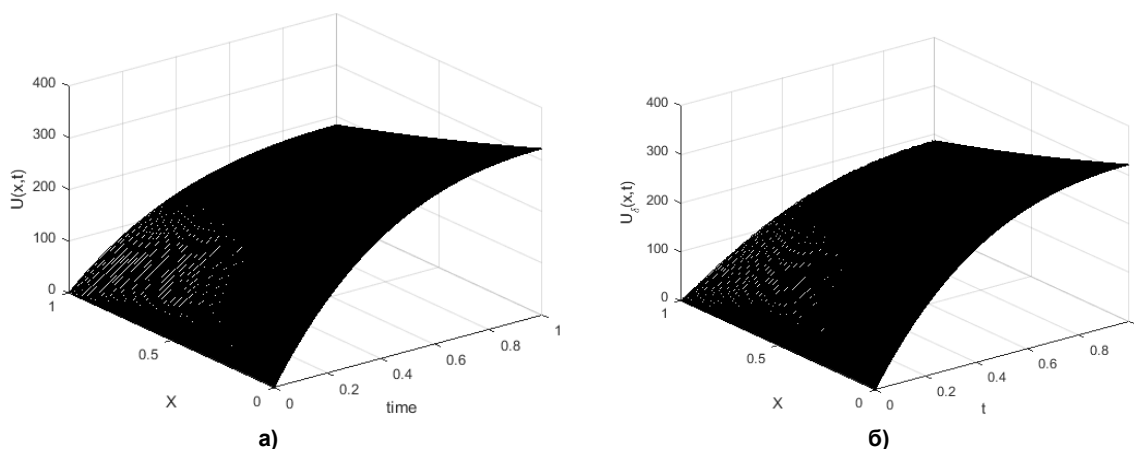


Рис. 5: а – график функции  $u(x,t)$ , соответствующей решению прямой задачи для тестовых функций  $\varphi_2(t) = 1000t(e^{-t} - e^{-2})$ ,  $\psi_2(t) = 500te^{-t}$ ; б – результаты моделирования температуры во всех точках линейного объекта для приближенного решения  $\psi_\delta(t)$

В таблице представлены экспериментальные значения абсолютной погрешности  $\Delta_\psi$  и относительной погрешности  $\varepsilon_\psi$ , полученные при различных значениях параметров регуляризации и  $\delta=0,5$ .

Экспериментальные оценки погрешностей

Тестовые функции	Значения параметров		Погрешности	
	$h$	$N_i$	Абсолютная $\Delta_\psi$	Относительная $\varepsilon_\psi$
$\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$	1/500	$N_1 = 27, N_2 = 26$	85,8134	1,8668
		$N_1 = 57, N_2 = 56$	86,1302	1,8737
		$N_1 = 87, N_2 = 86$	21,7133	0,4724
	1/200	$N_1 = 27, N_2 = 26$	4,2834	0,0932
		$N_1 = 57, N_2 = 56$	3,0929	0,0673
		$N_1 = 87, N_2 = 86$	2,8045	0,0610
$\varphi_2(t)$ и $\psi_2(t)$	1/500	$N_1 = 27, N_2 = 26$	$2,4359 \cdot 10^{11}$	–
		$N_1 = 57, N_2 = 56$	$2,8864 \cdot 10^{10}$	–
		$N_1 = 87, N_2 = 86$	$7,6024 \cdot 10^9$	–
	1/200	$N_1 = 27, N_2 = 26$	2,8892	0,0625
		$N_1 = 57, N_2 = 56$	2,8045	0,0607
		$N_1 = 87, N_2 = 86$	2,7901	0,0604

Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный подход к решению задачи линейного теплопереноса позволяет получать решения с достаточной точностью.

### Заключение

В данной работе рассмотрена задача определения температуры внутри объекта, который подвергается внешнему тепловому воздействию. Основываясь на характеристиках процесса, задача измерения температуры имеет вид задачи теплопереноса в линейном объекте. Математическая модель представлена уравнением теплопроводности с известными на границе и вблизи нее температурными функциями. С помощью применения прямого и обратного преобразования Лапласа эта задача сведена к интегральному уравнению, характеризующему прямую зависимость неизвестной температурной функции от исходных данных. Численный метод решения полученного интегрального уравнения основан на применении многопараметрического регуляризирующего подхода, а для нахождения температурных значений во внутренних точках линейного объекта применялись конечно-разностные уравнения.

В ходе вычислительного эксперимента найдены экспериментальные оценки погрешностей полученных решений. Результаты эксперимента свидетельствуют о достаточной точности предложенного подхода к определению температуры во внутренних точках объекта, недоступных для непосредственного теплового контроля.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части Государственного задания «Разработка, исследование и реализация алгоритмов обработки данных динамических измерений пространственно-распределенных объектов», техническое задание 8.9692.2017/8.9 от 17.02.2017.

### Литература

1. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
2. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергия, 1975. – 485 с.
3. Алифанов, О.М. Обратные задачи теплообмена / О.М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское науч. изд., 2009. – 457 с.
5. Короткий, А.И. Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева // Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. – 168 с.
6. Бек, Д. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Д. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клер мл. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
7. Апарцин, А.С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А.С. Апарцин, А.Б. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т. – 1972. – Вып. 1. – С. 248–258.
8. Васин, В.В. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода / В.В. Васин // Вычислит. технологии. – 2010. – Т. 15, № 2. – С. 15–23.
9. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
10. Cialkowski, M. A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation / M. Cialkowski, K. Grysa // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 48, no. 1. – P. 111–134.
11. Yaparova, N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem / N. Yaparova // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2014. – Vol. 22, no 5. – P. 832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614
12. Кумицкий, Б.М. Математическое моделирование тепловых процессов в условиях промерзания (оттаивания) влажного грунта / Б.М. Кумицкий, Н.А. Саврасова, А.А. Седаев // Науч. журнал строительства и архитектуры. – Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т. – 2018. – № 3 (51). – С. 31–39.

13. Поле температур в гидролизе проточного типа / С.В. Анаников, Р.Т. Валеева, Е.А. Харитонов и др. // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2014. – Т. 17, № 24. – С. 64–69.

14. Лаврентьев, М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 71 с.

15. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд. МГУ, 1999. – 799 с.

16. Диткин, В.А. Операционное исчисление: учеб. пособие для вузов / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – Изд. 2-е, доп. – М.: Высш. шк., 1975. – 407 с.

17. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 302 с.

**Япарова Наталья Михайловна**, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, [iaparovnm@susu.ru](mailto:iaparovnm@susu.ru).

**Гаврилова Татьяна Петровна**, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, [gavrilovatp@susu.ru](mailto:gavrilovatp@susu.ru).

*Поступила в редакцию 30 августа 2019 г.*

---

DOI: 10.14529/ctcr190406

## INTEGRAL MODEL AND NUMERICAL METHOD DETERMINATION OF TEMPERATURE AT LINEAR HEAT TRANSFER

*N.M. Yaparova, [iaparovnm@susu.ru](mailto:iaparovnm@susu.ru),*

*T.P. Gavrilova, [gavrilovatp@susu.ru](mailto:gavrilovatp@susu.ru)*

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

The work deals with the measurement problem associated with the problem of determining the temperature inside the object exposed to external heat. At each point of the surface, the thermal effect is the same and only changes over time. In this case, the temperature measurement problem has the form of a heat transfer problem in a linear object, one end of which corresponds to a point on the surface of the body, and the other end corresponds to the internal control point. The initial data of the problem are formed on the basis of temperature measurements near the object surface.

In this research, the problem of heat transfer is reduced to an integral model using the direct and inverse Laplace transform. The obtained integral equation is a Volterra equation of the first kind and characterizes the direct dependence of the unknown temperature functions at the control point on the initial data. To construct a numerical solution of an integral equation that is stable with respect to the error of the initial data, a computational scheme based on a regularizing approach including a multiparameter algorithm is proposed.

In order to obtain experimental estimates of the errors of the solutions to the measurement problem, a computational experiment was carried out on the basis of simulation modeling. During the experiment, the values of temperature functions at the control point of the object were determined and, on the basis of the obtained boundary functions, the temperature values were found at the internal points of the object. Also, in the course of the experiment, a comparative analysis of the temperature functions found in the test point with test values was performed. The results of the computational experiment are presented in the work and testify to the sufficient accuracy of the proposed computational method for determining the temperature during linear heat transfer.

*Keywords: heat transfer, heat equation, Laplace transform, numerical method, measurement problem.*

The work was conducted with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation of the basic part of the State task “Development, research and implementation of data processing algorithms for dynamic measurements of spatially distributed objects”, Terms of Reference 8.9692.2017/8.9 from 17.02.2017.

### References

1. Karlsruh G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdyh tel* [Thermal Conductivity of Solids]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.
2. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. *Teploperedacha* [Heat Transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1975. 485 p.
3. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 280 p.
4. Kabanihin S.I. *Obratnye i nekorrektnyye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Siberian Scientific Publ. House, 2009. 457 p.
5. Korotkij A.I., Starodubtseva Ju.V. *Modelirovanie prjamyh i obratnyh granichnyh zadach dlja stacionarnykh modelej teplomassoperenosa* [Simulation of Direct and Inverse Boundary Value Problems for Stationary Models of Heat and Mass Transfer]. Ekaterinburg, Ural. University Publ., 2015. 168 p.
6. Bek D., Blakuell B., Sent-Kler Ch, ml. *Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti* [Incorrect Inverse Heat Conduction Problems]. Moscow, Mir Publ., 1989. 312 p.
7. Apartsyn A.S., Bakushinskii A.B. [Approximate Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind by the Quadratures Method]. *Diferential and Integral Equations*, Irkutsk State University, 1972, vol. 1, pp. 248–258. (in Russ.)
8. Vasin V.V. [Regular Algorithm for Approximation of Non-Smooth Solutions for Fredholm Integral Equations of the First Kind]. *Comp. Technologies*, 2010, vol. 15, no 2, pp. 15–23. (in Russ.)
9. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 287 p.
10. Cialkowski M., Grysa K. A Sequential and Global Method of Solving an Inverse Problem of Heat Conduction Equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 111–134.
11. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, vol. 22, no. 5, pp. 832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614
12. Kumitskiy B.M., Savrasova N.A., Sedaev A.A. [Mathematical Modeling of Thermal Processes in the Conditions of Freezing (Thawing) of Wet Soil]. *Scientific Journal of Construction and Architecture*. Voronezh, Voronezh State Technical University, 2018, no. 3 (51), pp. 31–39. (in Russ.)
13. Ananikov S.V., Valeeva R.T., Haritonov E.A., Nursubin M.S., Galeeva V.V. [Temperature Field in Flow Type Hydrolysis]. *Bulletin of Kazan Technological University*, 2014, vol. 17, no. 24, pp. 64–69. (in Russ.)
14. Lavrentiev M.M. *Uslovno korrektnye zadachi dlya differentsialnykh uravnenij* [Conditionally Correct Problems for Differential Equations]. Novosibirsk, Novosibirsk Government University Publ., 1973, 71 p.
15. Tihonov A.N. Samarskij A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1999. 799 p.
16. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operatsionnoe ischislenie. Ucheb. posobie dlja vtuzov* [Operational Calculus. Textbook for Technical Schools]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1975. 407 p.
17. Krasnov M.L. *Integralnye uravneniya. Vvedenie v teoriyu* [Integral Equations. Introduction to the Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 302 p.

Received 30 August 2019

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Япарова, Н.М. Интегральная модель и численный метод определения температуры при линейном теплопереносе / Н.М. Япарова, Т.П. Гаврилова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2019. – Т. 19, № 4. – С. 60–71. DOI: 10.14529/ctcr190406

### FOR CITATION

Yaparova N.M., Gavrilova T.P. Integral Model and Numerical Method Determination of Temperature at Linear Heat Transfer. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 60–71. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr190406