УДК 338.242 DOI: 10.14529/ctcr200203

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ДИСКРЕТНОГО ТИПА МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С.А. Баркалов[1], А.Ю. Глушков[1], С.И. Моисеев[1, 2]

[1] Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия,

[2] Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Воронежский филиал, г. Воронеж, Россия

Введение. При планировании проектов, комплексов работ часто приходится решать задачи распределительного типа, связанные с оптимальным распределением ресурсов. Существующие методы решения подобных задач предполагают наличие аналитической зависимости непрерывного типа между объемами распределяемого ресурса и показателями эффективности. Однако оптимизационные задачи становятся не применимыми, когда ресурс дискретный и зависимости задаются табличными способами. **Цель исследования**. Разработать математическую модель решения задачи оптимального распределения ресурсов дискретного типа с таблично заданными критериями оптимальности методами линейного программирования. Описать методику численного решения задачи с использованием вычислительной техники. **Материалы и методы.** Решить поставленную задачу удается путем формирования аналитической зависимости кусочно-непрерывного типа между объемом распределенного ресурса и критерием оптимальности. Это позволяет сформулировать оптимизационную задачу, решаемую методами математического программирования. Построить аналитическую целевую функцию удается с помощью введения дополнительных параметров и ограничений. Численное решение задачи можно получить как с помощью математических пакетов прикладных программ, таких как, например, Mathcad, так и с использованием систем программирования. В работе описана методика решения задачи в среде MS Excel с использованием надстройки «Поиск решений». **Результаты.** Разработана математическая модель решения дискретной распределительной задачи для критерия оптимальности, заданного таблично, методами целочисленного линейного программирования. Описана методика численного решения в среде MS Excel. **Заключение.** Ранее подобные задачи решались методами динамического программирования, что более затруднительно в вычислительном плане. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую точность вычислений по модели и устойчивость к изменению исходных данных.

Ключевые слова: ресурсы, оптимизация, распределение, линейное программирование, математическое моделирование.

Введение

Задачи распределения ресурсов занимают значительный сегмент среди оптимизационных задач. К ним относятся такие задачи, как транспортная, о назначениях, планирование производством, распределение на сетевых графиках и многие другие. Для их решения разработано большое количество математических методов, большинство из которых относятся к методам математического программирования [1–3].

Особую роль в данной области занимают задачи распределения ресурсов, количество которых является дискретным [4, 5]. Общая формулировка таких задач сводится к тому, что имеется некоторый ограниченный ресурс, который нужно оптимально распределить по нескольким направлениям, при этом как общее количество ресурса, так и распределяемого по каждому направлению, является целым или дискретным некоторому числу.

Особенностью таких задач является то, что критерий эффективности, на основании которого ищется оптимальное распределение, в таких задачах, как правило, не является аналитической функцией. Для определения этого критерия либо задается дискретный закон распределения, либо зависимость эффективности от размера выделенного ресурса определяется табличной функцией [5, 6]. Ввиду этого применять методы математического программирования с аналитической целевой функцией для таких задач считалось невозможным и для решения предлагались пошаговые методы, такие, например, как методы динамического программирования. Однако эти методы, как правило, более сложные и трудоемкие в вычислительном плане, чем методы, основанные на аналитической целевой функции.

В данной работе предлагается оригинальный подход к решению задач распределения ресурсов, количество которых дискретно и критерий оптимальности определен с помощью табличной функции, методами линейного программирования. Построить аналитическую целевую функцию при этом удается с помощью введения дополнительных параметров и ограничений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель задачи.

Пусть имеется некоторый ресурс, который необходимо распределить между k объектами, работами, организациями или системами, которые в дальнейшем будем называть проектами. Количество распределяемого ресурса равно n единиц, причем распределение ресурса в каждый проект кратно единице. Также будем предполагать, что в каждый проект нельзя распределить более m единиц ресурса.

Перейдем к определению критерия оптимальности. Предположим, что при распределении в j-й проект i единиц ресурса, будет получаться некоторая прибыль в количестве $z_j(i)$, $i = 0,1, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, k$. Функция $z_j(i)$ задана таблично. Тогда критерий оптимальности будет определяться матрицей $A = a_{ij} = z_j(i)$, которая задана в соответствии с табл. 1, при этом учтено, что $a_{0j} = 0$.

В дальнейшем будем считать, что критерий оптимальности максимизируется, поэтому назовем a_{ij} матрицей прибыли. Если критерий оптимальности минимизируется (матрица затрат), то, вычитая из максимального элемента матрицы a_{ij} все остальные его элементы, получим матрицу прибыли с максимизацией критерия.

Таблица 1

Критерий оптимальности *A* при распределении ресурсов

Table 1

Optimality criterion *A* for resource allocation

Объем выделенного ресурса	Проект			
	1	**2**	**…**	***k***
0	0	0	…	0
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}
…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mk}

Будем считать, что суммарная прибыль от распределения ресурсов аддитивно складывается из прибыли от каждого проекта: $F = \sum_{j=1}^{k} z_j$. Ставится задача так распределить ресурсы между проектами, чтобы суммарная прибыль была максимальная.

Как было сказано, ранее подобная задача была решена методами динамического программирования, что отражено в публикациях [5–9].

2. Математическая модель задачи

Рассмотрим метод решения данной задачи методами целочисленного линейного программирования. Для этого введем переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в } j\text{-й проект распределено не менее } i \text{ единиц ресурса;} \\ 0, & \text{если в } j\text{-й проект распределено менее } i \text{ единиц ресурса,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, k.$

Для построения целевой функции введем матрицу эффективности $\Delta A = \Delta a_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, k$, которая имеет смысл дополнительной прибыли, полученной от распределения в j-й проект дополнительной единицы ресурса.

Сформулируем условие связности распределения ресурсов, заключающееся в том, что если в j-й проект распределили h единиц ресурса (то есть если $x_{hj} = 1$), то и все переменные, для которых первый индекс меньше h, должны быть единицами: $x_{ij} = 1$ при $i \le h$. Для соблюдения этого условия введем еще одну матрицу $\Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i-1,j}$, $i = 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, k$. Тогда для выполнения условия связности все элементы матрицы Δx_{ij} должны быть неположительными.

Строим математическую модель целочисленного линейного программирования для данной задачи. Целевая функция будет иметь вид

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \Delta a_{ij} \cdot x_{ij} \to \max . \tag{1}$$

Ограничения связаны с тем, что все переменные x_{ij} должны быть равны либо нулю, либо единице:

$$x_{ij} \le 1;\;\; x_{ij} \ge 0;\;\; x_{ij} - \text{ целое};\;\; i = 1, 2, \ldots, m;\;\;\; j = 1, 2, \ldots, k , \tag{2}$$

причем условие (2) можно заменить ограничением x_{ij} – двоичное.

В качестве следующего ограничения примем то, что количество распределяемого ресурса суммарно не должно превышать общий объем ресурса:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le n . \tag{3}$$

Учитывая то, что в каждый проект не может быть распределено средств более m единиц ресурса, введем ограничение

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le m,\;\; j = 1, 2, \ldots, k. \tag{4}$$

Также необходимо требовать, чтобы не нарушалось условие связности распределений ресурса:

$$\Delta x_{ij} \le 0 . \tag{5}$$

В результате получаем оптимизационную задачу целочисленного линейного программирования (1)–(5), решение которой даст оптимальное распределение ресурсов по проектам и которая имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \Delta a_{ij} \cdot x_{ij} \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le n; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le m,\;\; j = 1, 2, \ldots, k; \\ \Delta x_{ij} \le 0,\;\;\; i = 2, 3, \ldots, m;\;\; j = 1, 2, \ldots, k; \\ x_{ij} \le 1;\;\; x_{ij} \ge 0;\;\; x_{ij} - \text{ целое};\;\; i = 1, 2, \ldots, m;\;\;\; j = 1, 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{6}$$

Целевая функция (1) с ограничениями (2)–(4) составляет задачу целочисленного линейного программирования, решение которой даст оптимальное распределение ресурсов по проектам.

Следует отметить, что таких решений может быть несколько с одинаковыми суммарными прибылями, и это нужно учесть при его нахождении [4].

Найдя переменные x_{ij}^{*} при оптимальном решении, объемы распределенных ресурсов для каждого проекта I_j^{*}, дающие максимальную прибыль, будут равны

$$I_j^{*} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{*} .$$

Рассмотрим далее методику решения оптимизационной задачи (6).

3. Методика решения задачи в MS Excel

Задачу линейного программирования (6) рационально решать численно с использованием программных продуктов, адаптированных для решения оптимизационных задач. Обзор программных средств для решения оптимизационных задач представлен в работах [10–12]. При этом для решения задач оптимизации возможно как использование математических пакетов применение средств программирования, таких как, например, Mathcad [13], так и систем программирования [14]. В данной работе рассмотрим на примере методику решения в среде MS Excel с использованием надстройки «Поиск решений» [15, 16].

Пример. Некоторый ресурс в объеме 25 единиц необходимо распределить между 6 имеющимися проектами, при этом в каждый проект можно распределить не более 7 единиц ресурса.

Матрица прибылей представлена в табл. 2. Для удобства дальнейших расчетов строки таблицы пронумеруем снизу вверх, а не сверху вниз, как принято для матриц.

Таблица 2

Матрица прибылей *A* для приведенного примера

Table 2

Profit Matrix *A* for the example

Объем выделенного ресурса	Проект					
	1	2	3	4	5	6
7	22	21	20	21	22	23
6	17	20	18	19	18	17
5	16	15	15	16	17	16
4	12	13	14	14	13	13
3	10	11	10	9	9	12
2	7	8	6	8	9	7
1	4	3	5	7	6	5
0	0	0	0	0	0	0

Математическая модель задачи линейного программирования будет иметь вид:

$$4x_{11}+3x_{12}+\ldots+22x_{75}+23x_{76}\to\max;$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{6}x_{ij}\le 25;\\ \sum_{i=1}^{7}x_{ij}\le 7,\ \ j=1,2,\ldots,6;\\ \Delta x_{ij}\le 0,\ \ i=2,3,\ldots,7;\ j=1,2,\ldots,6;\\ x_{ij}\le 1;\ \ x_{ij}\ge 0;\ \ x_{ij}-\text{ целое};\ \ i=1,2,\ldots,7;\ \ j=1,2,\ldots,6.\end{cases}$$

На рабочем листе Excel вводим в диапазон ячеек B5-G12 значения матрицы прибыли из табл. 2. Находим значения матрицы эффективности, для этого в ячейку J5 задаем формулу =B5-B6 и с помощью автоматического заполнения копируем ее на диапазон ячеек J5-O11.

Рассчитанные значения матрицы эффективности ΔA представлены в табл. 3.

Таблица 3

Матрица эффективности ΔA для данных из табл. 2

Table 3

Efficiency matrix ΔA for data from Table 2

Объем выделенного ресурса	Проект					
	1	2	3	4	5	6
7	5	1	2	2	4	6
6	1	5	3	3	1	1
5	4	2	1	2	4	3
4	2	2	4	5	4	1
3	3	3	4	1	0	5
2	3	5	1	1	3	2
1	4	3	5	7	6	5

Под переменные оптимизационной задачи (6) x_{ij} выделяем область ячеек B17-G23, в которую вводим произвольные числа, например единицы. Для контроля условия (4) вводим в B24 формулу =СУММ(B17:B23), которую копируем с помощью автозаполнения на диапазон B24-G24.

Для проверки условия связности распределяемого ресурса (5) выделяем диапазон J17-O22, вводим в J17 формулу =B17-B18 и с помощью автозаполнения копируем ее на указанный диапазон. Вычисляем суммарное количество распределяемого ресурса (3) с помощью формулы =СУММ(B17:G23) в ячейке E25. Целевая функция (1) задается в ячейке L25 формулой =СУММПРОИЗВ(J5:O11;B17:G23). Результаты описанных действий изображены на рис. 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		**Количество ресурса**				**25**		**Максимальное количество на проект**						**7**	
2		**Матрица прибылей А**								**Матрица эффективности ΔА**					
3	Выделенный			Проект					Выделенный			Проект			
4	ресурс	1	2	3	4	5	6		ресурс	1	2	3	4	5	6
5	7	22	21	20	21	22	23		7	5	1	2	2	4	6
6	6	17	20	18	19	18	17		6	1	5	3	3	1	1
7	5	16	15	15	16	17	16		5	4	2	1	2	4	3
8	4	12	13	14	14	13	13		4	2	2	4	5	4	1
9	3	10	11	10	9	9	12		3	3	3	4	1	0	5
10	2	7	8	6	8	9	7		2	3	5	1	1	3	2
11	1	4	3	5	7	6	5		1	4	3	5	7	6	5
12	0	0	0	0	0	0	0								
13															
14		**Переменные оптимизационной задачи xij**								**Проверка условия связности Δxij**					
15	Выделенный			Проект					Выделенный			Проект			
16	ресурс	1	2	3	4	5	6		ресурс	1	2	3	4	5	6
17	7	1	1	1	1	1	1		7	0	0	0	0	0	0
18	6	1	1	1	1	1	1		6	0	0	0	0	0	0
19	5	1	1	1	1	1	1		5	0	0	0	0	0	0
20	4	1	1	1	1	1	1		4	0	0	0	0	0	0
21	3	1	1	1	1	1	1		3	0	0	0	0	0	0
22	2	1	1	1	1	1	1		2	0	0	0	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1	Всего							
24	Сумма	7	7	7	7	7	7	42							
25	**Распределено ресурсов**				**42**		**Целевая функция (прибыль)**					**129**			

Рис. 1. Исходные данные в MS Excel для решения задачи распределения ресурса с критерием оптимизации из табл. 2
Fig. 1. Source data in MS Excel to solve resource allocation problem with optimization criterion from Table 2

Для решения оптимизационной задачи запускаем надстройку «Поиск решений» (Solver), окно которой заполняем в соответствии с рис. 2.

В результате выполнения надстройки «Поиск решений» в ячейках B17-G23 получаем оптимальное распределение ресурса между проектами, которое представлено в табл. 4. Данное распределение проиллюстрировано на рис. 3.

Проверка связности распределения ресурса указано в диапазоне ячеек J17-O22, где не должно быть положительных чисел. В результате численного решения в Excel значения параметров Δx_{ij}^* при оптимальном решении приведены в табл. 5. Как видно из табл. 5, условие связности (5) выполняется.

В результате найдено оптимальное решение x_{ij}^*, матрицу которого приводим в табл. 4.

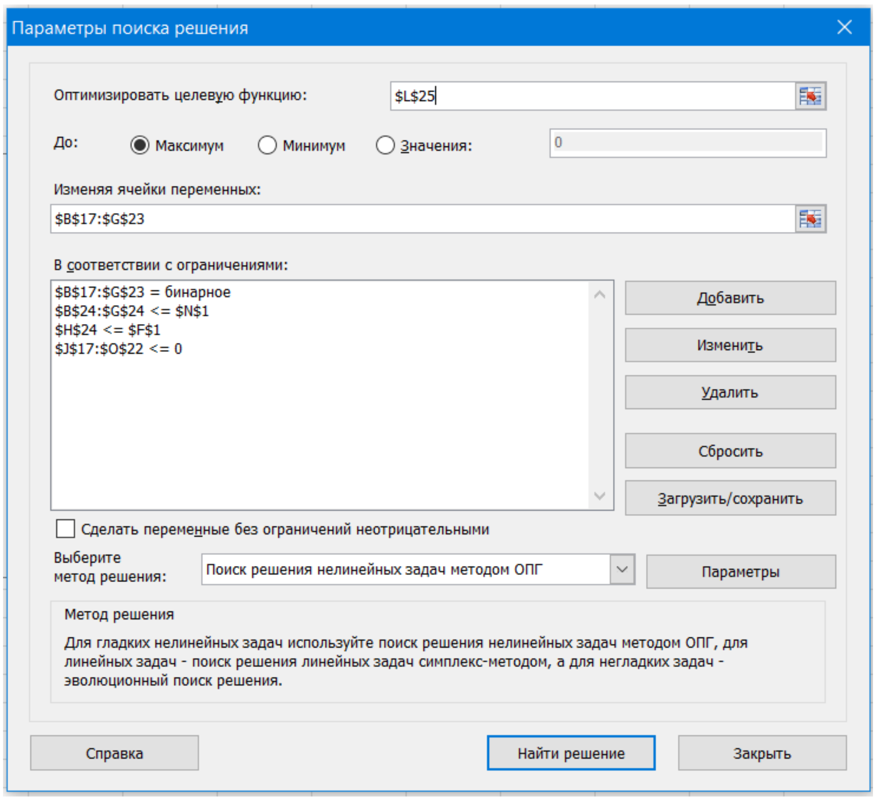

Рис. 2. Окно надстройки «Поиск решений» для решения оптимизационной задачи (6)
Fig. 2. Find Solutions Add-in Window to solve optimization problem (6)

Таблица 4

Оптимальное решение x_{ij}^*, полученное в Excel для данных из табл. 2

Table 4

Optimal Solution x_{ij}^* from Excel for data from Table 2

Объем выделенного ресурса	Проект					
	1	2	3	4	5	6
7	0	0	0	0	0	1
6	0	1	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	1
4	1	1	1	0	0	1
3	1	1	1	0	0	1
2	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Таблица 5

Проверка выполнения условия связности при распределении ресурса

Table 5

Implementation check of connectivity condition at distribution resource

Объем выделенного ресурса	Проект					
	1	2	3	4	5	6
7	0	–1	0	0	0	0
6	–1	0	0	0	0	0
5	0	0	–1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	–1	0
2	0	0	0	–1	0	0

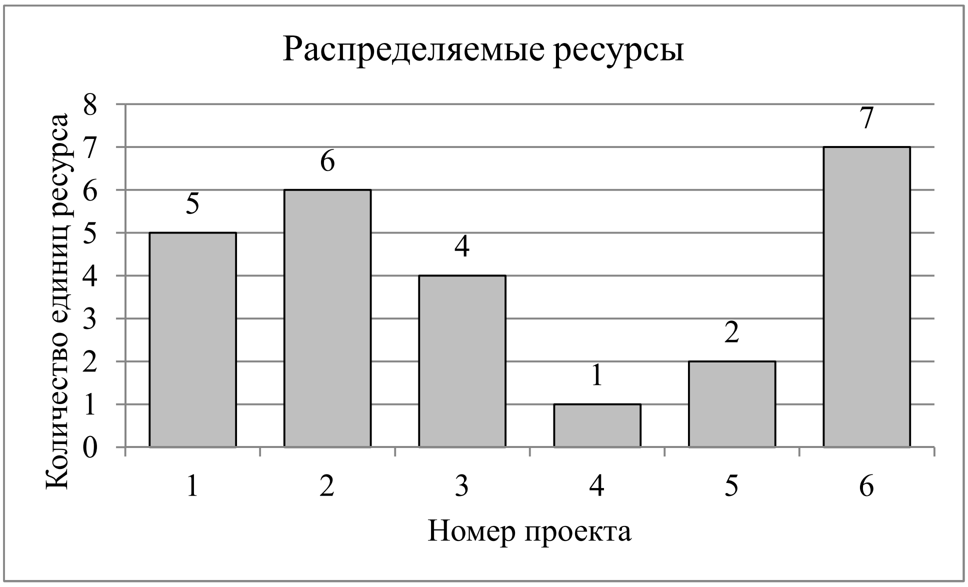

Рис. 3. Оптимальное распределение ресурса между проектами по критерию оптимальности из табл. 2
Fig. 3. Optimal resource allocation among projects according to the criterion of optimality in Table 2

Заключение

Таким образом, рассмотрена методика решения дискретной распределительной задачи для критерия оптимальности, заданного таблично, методами целочисленного линейного программирования. Ранее подобные задачи решались методами динамического программирования, что более затруднительно в вычислительном плане, в том числе и с привлечением численных методов и вычислительной техники.

На примере рассмотрена методика численного решения задачи распределения ресурса между несколькими проектами с помощью табличного процессора MS Excel.

Стоит заметить, что описанная модель будет находить оптимальное решение и в случае, когда объемы ресурсов дискретны не единице, а любым, даже дробным числам, а критерий эффективности задан таблично.

Литература

1. Соколов, А.В. Методы оптимальных решений. В 2 т. Т. 1: Общие положения. Математическое программирование / А.В. Соколов, В.В. Токарев. – М.: Физматлит, 2012. – 564 с.

2. Юдин, Д.Б. Задачи и методы линейного программирования. Математические основы и практические задачи / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Либроком, 2016. – 322 с.

3. Карзаева, Н.Н. Математическое программирование в экономике: учеб.пособие / Н.Н. Карзаева. – М.: Финансы и статистика, 2010. – 240 с.

4. Карманов, В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Физматлит, 2008. – 264 с.

5. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике: учеб. для вузов / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2013. – 438 с.

6. Баркалов, С.А. Математические методы и модели в управлении и их реализация в MS Excel / С.А. Баркалов, С.И. Моисеев, В.Л. Порядина. – Воронеж: Воронежский ГАСУ, 2015. – 265 с.

7. Математические и инструментальные методы экономики: учеб. пособие / П.В. Акинин и др. – М.: КноРус, 2016. – 151 с. – (Для бакалавров).

8. Моисеев, С.И. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / С.И. Моисеев, А.В. Обуховский. – Изд. 2-е, испр. – Воронеж: АОНО ВПО «Ин-т менеджмента, маркетинга и финансов», 2009. – 160 с.

9. Барлаков, С.А. Модели и методы в управлении и экономике с применением информационных технологий [Электронный ресурс]: учеб. пособие / С.А. Барлаков, С.И. Моисеев, В.Л. Порядина. – СПб.: Интермедия, 2017. – 264 с.

10. Fourer, R. AMPL: A Modelling Language for Mathematical Programming / R. Fourer, D.M. Gay, B.W. Kernighan. – 2nd ed. – Duxbury, 2002. – http://ampl.com/resources/the-ampl-book/chapterdownloads/

11. Симаков, Е.Е. Методика решения математических задач с помощью программирования и компьютерного моделирования / Е.Е. Симаков // Информатизация образования и науки. – 2016. – № 4 (32). – С. 126–140.

12. Тарасов, В.Н. Математическое программирование: теория, алгоритмы, программы: учеб. пособие / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахареева. – Самара: Поволжский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики, 2007. – 222 с.

13. Киселев, Н.Г. Применение математического пакета MATHCAD для решения задач линейного программирования / Н.Г. Киселев // Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования: материалы науч.-практ. семинара молодых ученых и студентов. – 2017. – С. 169–172.

14. Решение оптимизационных задач на языке программирования VISUAL C# с использованием математических пакетов / И.А. Гурин, Н.А. Спирин, В.В. Лавров, М.В. Бякова // Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах: тр. IV Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. – 2016. – С. 70–74.

15. Леоненков, А.В. Решение оптимизационных задач в среде MS Excel / А.В. Леоненков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 704 с.

16. Аверина, Т.А. Модели распределения ресурсов в программе антикризисного управления / Т.А. Аверина, С.А. Баркалов, О.Л. Смольянова // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2019: материалы двенадцатой междунар. конф. Науч. электрон. изд. / под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – 2019. – С. 1162–1164. DOI: 10.1109/MLSD.2019.8911048

Баркалов Сергей Алексеевич, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой управления, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж; barkalov@ vgasu.vrn.ru.

Глушков Александр Юрьевич, старший преподаватель, аспирант кафедры управления, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж; alex-maslovra@mail.ru.

Моисеев Сергей Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий в экономике, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Воронежский филиал; доцент кафедры управления, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж; mail@moiseevs.ru.

Поступила в редакцию 10 февраля 2020 г.

DOI: 10.14529/ctcr200203

SOLUTION OF THE DISCRETE RESOURCES DISTRIBUTION PROBLEM BY METHODS OF LINEAR PROGRAMMING

***S.A. Barkalov*[1]**, *barkalov@ vgasu.vrn.ru,*
***A.Yu. Glushkov*[1]**, *alex-maslovra@mail.ru,*
***S.I. Moiseev*[1,2]**, *mail@moiseevs.ru*

[1] *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation,*
[2] *Plekhanov Russian University of Economics, Voronezh branch, Voronezh, Russian Federation*

Introduction. When planning projects, work packages, one often has to solve distribution-type problems associated with the optimal allocation of resources. Existing methods for solving such problems suggest the presence of an analytical dependence of a continuous type between the volumes of the distributed resource and performance indicators. However, optimization problems become inapplicable when the resource is discrete and dependencies are specified in tabular ways. **Aim.** To develop a mathematical model for solving the problem of the optimal distribution of resources of a discrete type with table-defined optimality criteria using linear programming methods. Describe the method of numerical solution of the problem using computer technology. **Materials and methods.** It is possible to solve the problem by forming an analytical dependence of a piecewise-continuous type between the volume of the distributed resource and the optimality criterion. This allows us to formulate an optimization problem solved by mathematical programming methods. It is possible to construct an analytical objective function by introducing additional parameters and restrictions. A numerical solution to the problem can be obtained both using mathematical packages of applied programs, such as, for example, "Mathcad", and using programming systems. The paper describes the methodology for solving problems in the MS Excel environment using the add-on "Solver". **Results.** A mathematical model is developed for solving a discrete distribution problem for the optimality criterion given in a table by integer linear programming methods. The technique of numerical solution in the MS Excel environment is described. **Conclusion.** Previously, such problems were solved by dynamic programming methods, which is more difficult in the computational plan. Conducted computational experiments showed high accuracy of model calculations and resistance to changes in the source data.

Keywords: resources, optimization, distribution, linear programming, mathematical modeling.

References

1. Sokolov A.V., Tokarev V.V. *Metody optimal'nykh resheniy. V 2 t. T. 1: Obshchiye polozheniya. Matematicheskoye programmirovaniye* [Methods of Optimal Solutions. In 2 Vols. Vol. 1: Generalities. Mathematical Programming]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 564 p.

2. Yudin D.B., Holstein E.G. *Zadachi i metody lineynogo programmirovaniya. Matematicheskiye osnovy i prakticheskiye zadachi* [Problems and Methods of Linear Programming. Mathematical Foundations and Practical Problems]. Moscow, Librokom Publ., 2016, 322 p.

3. Karsaev N.N. *Matematicheskoye programmirovaniye v ekonomike: uchebnoye posobiye* [Mathematical Programming in the Economy: Textbook]. Moscow, Finance and statistics Publ., 2010, 240 p.

4. Karmanov V.G. *Matematicheskoye programmirovaniye* [Mathematical Programming]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 264 p.

5. Kremer N.Sh. *Issledovaniye operatsiy v ekonomike : uchebnik dlya vuzov* [Operations Research in Economics: A Textbook for High Schools]. Moscow, Yurayt Publ., 2013, 438 p.

6. Barkalov S.A., Moiseev S.I., Poryadina V.L. *Matematicheskie metody i modeli v upravlenii i ih realizacija v MS Excel* [Mathematical Methods and Models in Management and Their Implementation in MS Excel]. Voronezh, SUACE Publ., 2015, 265 p.

7. Akinin P.V. et al. *Matematicheskiye i instrumental'nyye metody ekonomiki (dlya bakalavrov)* [Mathematical and Instrumental Methods of Economics (for Bachelors)]. Moscow, KnoRus Publ., 2016, 151 p.

8. Moiseev S.I., Obukhovsky A.V. *Matematicheskiye metody i modeli v ekonomike: uchebnoye posobiye* [Mathematical Methods and Models in Economics: Textbook]. Voronezh, AONO VO Institute of Management, Marketing and Finance Publ., 2009, 160 p.

9. Barkalov S.A., Moiseev S.I., Poryadina V.L. *Modeli i metody v upravlenii i ekonomike s primeneniyem informatsionnykh tekhnologiy: uchebnoye posobiye* [Models and Methods in Management and Economics Using Information Technology: Textbook]. St. Petersburg, Intermedia Publ., 2017, 264 p.

10. Robert Fourer, David M. Gay, Brian W. Kernighan. AMPL: A Modelling Language for Mathematical Programming. 2nd ed. Duxbury, 2002. Available at: http://ampl.com/resources/the-ampl-book/chapterdownloads/

11. Simakov E.E. [Methods of Solving Mathematical Problems Using Programming and Computer Modelling]. *Informatization of Education and Science*, 2016, no. 4 (32), pp. 126–140. (in Russ.)

12. Tarasov V.N. Bakhareva N.F. *Matematicheskoye programmirovaniye: teoriya, algoritmy, programmy: uchebnoye posobiye* [Mathematical Programming: Theory, Algorithms, Programs: Textbook]. Samara, Volga State University of Telecommunications and Informatics Publ., 2007, 222 p.

13. Kiselev N.G. [Application of Mathematical Package MATHCAD for Solving Problems of Linear Programming]. *Modelirovaniye i naukoyemkiye informatsionnyye tekhnologii v tekhnicheskikh i sotsial'no-ekonomicheskikh sistemakh: trudy IV Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem* [Control Systems, Technical Systems: Stability, Stabilization, Ways and Methods of Research: Materials of a Scientific and Practical Seminar of Young Scientists and Students], 2017, pp. 169–172. (in Russ.)

14. Gurin I.A., Spirin N.A., Lavrov V.V., Byakova M.V. [Solution of Optimization Problems in the VISUAL C# Programming Language Using Mathematical Packages]. *Modelirovaniye i naukoyemkiye informatsionnyye tekhnologii v tekhnicheskikh i sotsial'no-ekonomicheskikh sistemakh* [Modeling and High-Tech Information Technologies in Technical and Socio-Economic Systems], 2016, pp. 70–74. (in Russ.)

15. Leonenkov A.V. *Resheniye optimizatsionnykh zadach v srede MS Excel* [Solution of Optimization Problems in MS Excel]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2005, 704 p.

16. Averina T.A., Barkalov S.A., Smolyanova O.L. Resource Allocation Models in a Crisis Management Program. *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem MLSD'2019. Materialy dvenadcatoj mezhdunarodnoj konferencii. Nauchnoe elektronnoe izdanie.* [Management of Large-Scale Systems Development MLSD'2019 Materials of the Twelfth International Conference. Scientific Electronic Publication], 2019, pp. 1162–1164. (in Russ.) DOI: 10.1109/MLSD.2019.8911048

Received 10 February 2020

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Баркалов, С.А. Решение задачи распределения ресурсов дискретного типа методами линейного программирования / С.А. Баркалов, А.Ю. Глушков, С.И. Моисеев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 26–35. DOI: 10.14529/ctcr200203

FOR CITATION

Barkalov S.A., Glushkov A.Yu., Moiseev S.I. Solution of the Discrete Resources Distribution Problem by Methods of Linear Programming. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 26–35. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr200203