УДК 330.3 + 519.86 DOI: 10.14529/em090314

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Шмидт, В.А. Чурюкин

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Рассмотрены вопросы конструирования стохастических моделей экономических систем на основе марковских случайных процессов с дискретными состояниями и дискретным временем. В статье уточнено понятие состояние экономической системы. В качестве параметра системы, характеризующего ее состояние, предложены такие информативные параметры, как объем продаж и добавленная стоимость. Приведены условия, с учетом которых назначается длина этапа в модели экономической системы: на длине этапа система при переходе в соседнее состояние должна успеть сделать этот переход; вероятность нескольких переходов на этапе должна быть малой величиной, которой можно пренебречь. Названы основные события, которые могут поменять вероятность перехода экономической системы в новое состояние.

Стохастические модели, рассмотренные в статье, создают необходимую базу для определения эволюции распределения вероятностей состояний системы во времени, выбора стратегии, максимизирующей параметры системы, анализа экономической устойчивости системы. Анализ экономической устойчивости связан с рассмотрением ожидаемых движений системы. Признаками устойчивости являются нахождение системы на каждом шаге расчета в эффективных состояниях и попадание значения наращенного за прогнозный период результата системы в область цели.

Ключевые слова: экономическая система, состояние системы, фазовое пространство состояний системы, объем продаж, эволюция экономической системы, моделирование, стохастическая модель, случайный процесс, цепь Маркова, экономическая устойчивость.

В экономических системах с протекающими случайными процессами возникает ряд специфических эффектов, существенно влияющих на их работу. Учитывать (или не учитывать) случайность процесса необходимо в соответствии с целью исследования. По мере углубления и уточнения наших знаний об экономике, все большее число процессов приходится рассматривать как случайные, учитывая не только их поведение «в среднем», но и случайные отклонения от этого среднего. Появилось много хороших работ, рассматривающих экономические системы в вероятностном аспекте [2–6, 8]. В данной работе рассматривается первый этап процесса моделирования – конструирование стохастических моделей экономических систем.

В экономических стохастических расчетах часто используется случайная последовательность, то есть случайный процесс с дискретными состояниями и временем, так как параметры экономических систем фиксируются и измеряются, как правило, в дискретные моменты времени. Случайные последовательности удобны и для моделирования на ЭВМ. Благодаря сравнительной простоте и наглядности математического аппарата, высокой достоверности и точности получаемых решений, марковские процессы заслуживают особое внимание специалистов, занимающихся моделированием экономических процессов.

Модель эволюции экономической системы. Принятые допущения: система допускает классификацию на конечное (или счетное) число состояний; случайный процесс, протекающий в системе, обладает свойством отсутствия последействия.

Для описания поведения системы в виде Марковской модели следует определиться с понятием «состояние системы», выявить все состояния, в которых может находиться система, задать начальное состояние системы, установить механизм перехода системы из одного состояния в другое. Понятие «состояние системы» является основными для марковских моделей. Считаем, что система может находиться в одном из несовместимых состояний конечного пространства возможных состояний U. Из всех возможных состояний выделяем множество G таких состояний, которые различаются по результату деятельности системы, либо по макропараметрам, макросвойствам системы [1]. Множество G назовем фазовым пространством состояний системы. В зависимости от решаемых задач выбираются различные фазовые пространства состояний, размерность и свойства пространства зависят от выбранной расчетной схемы.

Состояние экономической системы – это характеристика системы на данном этапе ее функционирования, совокупность значений величин, характерных для данной системы, называемых параметрами состояния. Общество полагается на стремление экономической системы к прибыли, поэтому состояние экономической системы для целей моделирования, как правило, характеризуется прибылью [7]. В случае, если система готова пожертвовать некоторой частью прибыли ради сохранения на рынке своих позиций, имиджа крупной развивающейся системы, альтернативным прибыли параметром системы может быть объем продаж, который зримо характеризует состояние экономической системы. Параметрами экономической системы, также могут быть добавленная стоимость, риск и т. п. Состояния системы могут описываться качественно или количественно, качественное описание состояния системы, по своей сути, всегда дискретно, что удобно для рассматриваемой модели.

Пусть имеется система S с дискретными состояниями $S_1, S_2, \ldots S_m$ и дискретным временем $t_1, t_2, \ldots, t_n$. В качестве аргумента, от которого зависит процесс, можно принять не время t, а номер шага 1, 2, ..., n. Последовательность состояний S_i, $t_i \geq t_1$ можно рассматривать как траекторию случайного процесса, а движение системы (изменение ее параметров) можно трактовать как процесс «блуждания» системы по множеству состояний G. В результате конкретизируется случайный процесс, описывающий эволюцию системы во времени. Движение системы – это некая абстракция, описывающая изменение ее состояния. Переходы системы из состояния в состояние в марковских цепях возможны в строго определенные, заранее фиксированные моменты времени, «перескок» осуществляется мгновенно, в любой момент времени система может находится только в одном из своих состояний [7]. В промежутки времени между этими моментами система сохраняет свое состояние. Считаем, что случайные переходы системы из состояния в состояние могут происходить в начале этапа. Эти моменты называются шагами процесса, время между двумя соседними шагами называется этапом.

Длина этапа t_1 экономической системы назначается с учетом следующих условий:

- на длине этапа система при переходе в соседнее состояние должна успеть сделать этот переход;
- вероятность нескольких переходов на этапе должна быть малой величиной, которой можно пренебречь.

Первое условие ограничивает минимальное значение длительности этапа t_{1min}, второе условие ограничивает максимальную длительность этапа t_{1max}. Если время этапа, определенное по первому условию, окажется больше длительности этапа, определенного по второму условию $t_{1min} > t_{1max}$, то длину этапа принимают в соответствии с первым условием, то есть равной t_{1min}. Длину этапа допускается увеличивать для согласования с отчетными периодами, принятыми в экономической системе (месяц, квартал, год). От длины этапа зависят величины условных вероятностей перехода системы из одного состояния в другое [10].

Для описания случайного процесса, протекающего в системе с дискретными состояниями, пользуются вероятностями состояний $P_i(k)$, где $P_i(k)$ $(i = 1, 2,\ldots, m)$ – вероятность того, что на этапе k система находится в состоянии S_i $(i = 1, 2,\ldots, m)$.

Марковская цепь задается вектор-строкой вероятностей начальных «стартовых» состояний системы

$$P_{<m>}(0) = < P_1(0), P_2(0),\ldots, P_m(0) > \quad (1)$$

и матрицами переходных вероятностей

$$\Pi(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \ldots & p_{1m}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \ldots & p_{2m}(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1}(k) & p_{m2}(k) & \ldots & p_{mm}(k) \end{bmatrix}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n). \quad (2)$$

Каждая строка характеризует выбранное состояние системы (S_i), а ее элемент p_{ij} равен вероятности перехода системы за один шаг из выбранного состояния S_i в состояние S_j $(j = 1,2,\ldots,m)$. По главной диагонали матрицы стоят вероятности задержки системы $(p_{11}, p_{22}, p_{33}$ и т. д.)

Расчеты эволюции системы выполняют на основе расчетных схем, в которых используются статистические данные. При отсутствии или недостаточности статистических данных используют экспертные оценки. Такие события, как выпуск новой продукции, изменение технологии, приобретение нового оборудования, реклама, новые методы управления, изменение спроса, вкусов покупателей, изменение позиций конкурентов, выход на рынок новых конкурентов и т. п. могут поменять вероятность перехода системы в новое состояние. События можно классифицировать на внешние (повышающие или снижающие рыночные возможности системы) и внутренние (способствующие улучшению или ухудшению параметров системы).

Для задания начального состояния системы существуют два способа: детерминированный (неслучайный) и случайный. В первом способе из каких-либо соображений (требований к системе, условий эксплуатации) выбирается одно начальное состояние, вероятность которого равна единице. Во втором способе на основе наблюдений устанавливаются вероятности стартовых состояний $P_i(0)$, $i = 1,\ldots, m$. Очевидно, если одна из вероятностей будет равна единице, то остальные будут равны нулю, и случайный способ задания начальных вероятностей переходит в детерминированный.

Переходные вероятности могут быть как неизменными на всех шагах, в этом случае марковская цепь называется однородной, так и переменными. Все переходные вероятности являются условными, так как каждая из них связана с переходом из одного определенного состояния в другое.

Вероятности состояний системы на первом шаге определяются как произведение вектор-строки начальных вероятностей на матрицу перехода. Вероятности состояний системы на k-м шаге

$$P_{<m>}(k) = P_{<m>}(k-1)\,\Pi(k). \quad (3)$$

Уравнения (3) относятся к классу так называемых рекуррентных соотношений, позволяющих вычислить вероятности состояний марковского случайного процесса на любом шаге при наличии информации о предшествующих состояниях.

Трудности моделирования экономических систем связаны с большим числом их возможных состояний и множеством связей состояний. Для упрощения модели (уменьшения числа состояний) во многих процессах целесообразно по возможности учитывать переходы лишь между соседними состояниями. Если переходы системы осуществляются лишь между соседними состояниями, то такая схема случайного процесса называется схемой гибели и размножения.

Алгоритм построения модели по схеме марковских цепей: выбрать исследуемое свойство экономической системы; определить число возможных состояний системы; рассмотреть возможность сокращения числа состояний системы; составить граф состояний; определить вектор начальных вероятностей; определить воздействия (события); определить матрицу вероятностей переходов, элементы которой характеризуют вероятности перехода процесса из одного состояния в другое; определить искомые вероятности состояний системы.

В некоторых системах со временем устанавливается стационарный режим, во время которого система меняет свои состояния, но средняя доля времени, которую система проводит в различных состояниях, не меняется. То есть вероятности этих состояний не зависят от номера шага. Для экономических систем стационарный режим можно допустить только на ограниченном интервале. Такие вероятности называются предельными (или финальными) вероятностями цепи Маркова. Условиями существования стационарного режима для системы S с конечным числом состояний, в которой протекает марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем являются:

1. Множество всех состояний системы должно быть связанным.
2. Цепь Маркова должна быть однородной.
3. Цепь Маркова должна быть «достаточно хорошо перемешиваемой» (не должна быть «циклической»).

Цепи Маркова, отвечающие этим условиям, называют эргодическими. Первое условие означает, что при блуждании системы по своим состояниям она рано или поздно попадет в любое состояние, выйдет из него и вновь в него вернется. Второе условие означает, что переходные вероятности должны быть постоянными (одинаковыми) на всех этапах. Третье условие означает, что необходимо, чтобы моменты попадания в отдельные состояния или в группы состояний не образовывали циклов (периодов).

Если все условия существования стационарного режима выполняются, то финальные вероятности не зависят от того, каково было состояние системы или каковым было распределение вероятностей в начальный момент. Для стационарного режима искомые вероятности состояний P_1, P_2, …, P_m не изменяются при переходе системы от одного этапа к другому

$$P_{<m>}(k-1)\,\Pi(k) = P_{<m>}(k). \qquad (4)$$

Отсюда получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_1p_{11} + P_2p_{21} + \ldots + P_mp_{m1};\\
P_2 &= P_1p_{12} + P_2p_{22} + \ldots + P_mp_{m2};\\
&\ldots\\
P_m &= P_1p_{1m} + P_2p_{2m} + \ldots + P_mp_{mm}.
\end{aligned}$$

Добавив к системе уравнений нормировочное условие

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_m = 1$$

и взамен удалив одно любое уравнение, получим систему m неоднородных линейных уравнений, имеющих единственное решение для P_1, P_2, … P_m.

Финальную вероятность можно истолковать:

- как среднюю долю времени, которую в стационарном режиме проводит система в состоянии S_i ($i = 1, 2, \ldots, m$);
- как вероятность застать систему в состоянии S_i, если мы посмотрим на нее в случайный момент времени.

Результатом анализа модели эволюции экономической системы являются: распределения вероятностей состояний системы, изменение от шага к шагу вероятностей состояний, установившиеся значения этих вероятностей.

Модель экономических систем с пошаговым доходом. Марковские цепи называются управляемыми (с доходами), если имеется возможность до определенной степени управлять законами распределения или параметрами переходных вероятностей [7]. В качестве примера такого процесса можно привести любое производство, у которого вероятность получения эффекта может зависеть от мероприятий по улучшению качества, рекламы, выбора рынка сбыта и т. д.

Рассмотрим марковскую цепь, в которой каждый переход сопровождается доходом или убытком. Величина генерируемого денежного потока зависит от состояния, в котором находится экономическая система. Очевидно, что в благополучном состоянии генерируется больший денежный поток, чем в неблагополучном состоянии. Кроме этого переход системы из одного состояния в другое, вызванный возникновением ущерба или его компенсацией, сопровождается потерей части денежных средств. Для определения прогнозируемого денежного потока в случае марковского процесса с дискретным временем дадим вероятностям перехода p_{ij} оценку d_{ij}, являющуюся прогнозным значением денежного потока, генерируемого системой на данном этапе при переходе из состояния S_i в состояние S_j. Сумма значений денежных потоков на всех переходах рассматриваемого этапа определяет денежный поток на данном этапе

$$CF_{<m>}(i) = P_{(m)}(i-1)\begin{bmatrix} p_{11}d_{11} & p_{12}d_{12} & \cdots & p_{1m}d_{1m}\\ p_{21}d_{21} & p_{22}d_{22} & \cdots & p_{2m}d_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{m1}d_{m1} & p_{m2}d_{m2} & \cdots & p_{mm}d_{mm}\end{bmatrix} =$$

$$< CF_1(i), CF_2(i),\dots, CF_m(i) > (i = 1,\dots, n), \quad (5)$$

где $CF_{<m>}(i)$ – вектор значений денежного потока на i-м этапе.

Значения p_{ij} и d_{ij} могут быть как постоянными на всех этапах, так и переменными, что является более реалистичным.

Среднее значение денежного дохода на i-м этапе

$$M[CF (i)] = CF_1(i) + CF_2(i) +,\dots,+CF_m (i). \quad (6)$$

Дисконтированный доход рассчитывается по формуле

$$М[Д] = \sum_{i=1}^{n} \frac{M[CF(i)]}{(1+z_i)^i}, \quad (7)$$

где z_i – безрисковая норма дисконта на i-м шаге; $n = t_n/t_1$ – число рассматриваемых шагов в прогнозном периоде; t_n, t_1 – время прогнозного периода и длительность шага расчета.

На величину дохода влияет выбранное управление. Назовем решение, принимаемое в конкретный момент, частным управлением. Тогда управление есть последовательность частных решений в моменты i = 1, 2, ..., n. Управление системой заключается в выборе на каждом шаге и в каждом состоянии стратегии, которой соответствуют строки матрицы переходных вероятностей

$$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im})$$

и строки матрицы доходов

$$d_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im}),$$

максимизирующей параметры системы.

Модель устойчивости экономической системы. Аппарат марковских случайных процессов удобен для моделирования устойчивости экономической системы [9, 10]. Устойчивость – это способность системы в условиях неопределенности окружающей среды и внутреннего состояния удерживать заданные параметры в допустимой области и достигать планируемых результатов. Анализ устойчивости связан с рассмотрением ожидаемых движений системы при различных возмущениях. Если система не может своими силами вернуться или приблизиться к траектории заданного (исходного) движения, то система неустойчива. Для того чтобы повысить устойчивость, необходимо совершенствовать объект изнутри. Поддержание устойчивости объекта составляет в основном его внутреннюю цель – это одна из основных целей управляющей подсистемы.

Признаками устойчивости являются:

– нахождение системы на каждом шаге расчета в эффективных состояниях (вероятность нахождения системы в неэффективном состоянии должна быть малой величиной, которой можно пренебречь);

– попадание значения наращенного за прогнозный период результата системы в область цели.

То есть система экономически устойчива, если выполняются два условия:

$$P_{Sm}(k) \langle P_k^* \qquad k = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$М[Д] \in W, \quad (9)$$

где $P_{Sm}(k)$ – вероятность нахождения системы в неэффективном состоянии на этапе k; P_k^* – допустимая вероятность нахождения системы в неэффективном состоянии; W – область допустимых значений наращенного результата системы за прогнозный период (область цели).

Выполнение первого условия (проверяется по формуле (3)) свидетельствует о локальной устойчивости системы на этапах, выполнение второго условия (проверяется по формуле (7)) свидетельствует об устойчивости системы относительно цели.

Модели эволюции экономической системы во времени на основе управляемых цепей Маркова создают необходимую базу в более обоснованном определении траектории движения систем, анализа их устойчивости, выборе стратегии, максимизирующей параметры системы.

Литература

1. Волкова, В.Н. Теория систем: учеб. пособие/ В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – М.: Высш. шк., 2006. – 511 с.

2. Глазкова, И.Ю. Построение стохастической модели анализа риска инвестиций / И.Ю. Глазкова, И.Б. Брежнева, В.А. Королев // Экономический анализ: теория и практика. – 2007. – № 1(82).

3. Кельберт, М.Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения / М.Я. Кельберт, Ю.М. Сухов. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 560 с.

4. Маркелова, И.В. Одноплановые стохастические задачи в экономике / И.В. Маркелова, И.А. Гарькина // Молодой ученый. – 2014. – № 4. – С. 31–33.

5. Матвеев, Б.А. Спектральная теория рисков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Экономика и менеджмент». – 2014. – Т. 8, № 2. – С. 20–24.

6. Секерин, А.Б. Вероятностная модель управления риском экономической несостоятельности промышленного предприятия и методические рекомендации по ее применению / А.Б. Секерин. – Орел: ОГУ, 2006. – 24 с.

7. Соколов, Г.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике / Г.А. Соколов, Н.А. Чистякова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 248 с.

8. Соловьёв, В.И. Односекторная стохастическая динамическая модель экономики // Математические методы исследования сложных систем, процессов и структур: сборник научных трудов. – М.: Изд-во МГОПУ, 2000. – Вып. 3. – С. 101–112.

9. Шмидт, А.В. Алгоритм оценки и прогнозирования экономической устойчивости промышленного предприятия с применением аппарата

Марковских случайных процессов / А.В. Шмидт, Т.А. Худякова, В.А. Чурюкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Экономика и менеджмент». – 2007. – № 10 (82), вып. 2. – С. 65–71.

10. Чурюкин, В.А. Марковская модель устойчивости экономической системы / В.А. Чурюкин // Mechanism of Sustainable Development of Economic Systems Formation – Collective monograph. Vol. 2. – Verlag SWG imex GmbH, Nürnberg, Deutschland, 2014. – P. 363–368.

Шмидт Андрей Владимирович. Доктор экономических наук, доцент, проректор по учебной работе, заведующий кафедрой экономики и менеджмента туризма, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), kafedra.ems@yandex.ru.

Чурюкин Валерий Алексеевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Экономика и финансы», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), vchuryukin@mail.ru.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

DOI: 10.14529/em090314

MARKOV'S MODELS OF ECONOMIC SYSTEMS

A.V. Shmidt, V.A. Churyukin

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The article describes the problems of development of stochastic models of economic systems based on Markov's random processes with discrete conditions and discrete time. The concept of economic system is detailed. As a system parameter, characterizing its condition, such informative parameters as sales volume and added value are proposed. The article investigates such conditions with the help of which the stage length of the economic system is defined: at the stage length the system when transferring to the neighbor condition shall manage to do this transfer; probability of several transitions at the stage should present a small value which can be neglected. General events that can change the probability of economic system transition to the new stage are specified in the article.

Stochastic models, considered in the article, create an essential base for designation of evolution of system conditions distributions through time, strategy selection, maximizing system parameters and the analysis of economic stability of the system. The analysis of economic stability is connected with expected movements of the system. Stability characteristics are the following: system location in effective conditions on every step of calculation and entering of accumulated during the forecast period value into the target area.

Keywords: economic system, system condition, phase space of system condition, sales volume, economic system evolution, modeling, stochastic model, random process, Markov chain, economic stability.

References

1. Volkova V.N., Denisov A.A. *Teoriya sistem* [Systems theory]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2006. 511 p.

2. Glazkova I.Yu., Brezhneva I.B., Korolev V.A. Postroenie stokhasticheskoy modeli analiza riska investitsiy [Stochastic models building of investments risk analysis]. *Ekonomicheskiy analiz: teoriya i praktika* [Economic analyses: theory and practice], 2007, no. 1(82).

3. Kel'bert M.Ya., Sukhov Yu.M. *Veroyatnost' i statistika v primerakh i zadachakh. Tom 2. Markovskie tsepi kak otpravnaya tochka teorii sluchaynykh protsessov i ikh prilozheniya* [Probability and statistics in examples and tasks. Volume 2. Markov's chains as a starting point in the theory of random processes and their supplements]. Moscow, 2009. 560 p.

4. Markelova I.V., Gar'kina I.A. Odnoplanovye stokhasticheskie zadachi v ekonomike [Single-planned stochastic tasks in economics]. *Molodoy uchenyy* [Young scientist], 2014, no. 4, pp. 31–33.

5. Matveev B.A. Spectral Theory of Risk. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Economics and Management*, 2014, vol. 8, no. 2, pp. 20–24.

6. Sekerin A.B. *Veroyatnostnaya model' upravleniya riskom ekonomicheskoy nesostoyatel'nosti promyshlennogo predpriyatiya i metodicheskie rekomendatsii po ee primeneniyu* [Probabilistic model of risk management for economic insolvency of industrial enterprise and methodological recommendations for use]. Orel, 2006. 24 p.

7. Sokolov G.A., Chistyakova N.A. *Teoriya veroyatnostey. Upravlyaemye tsepi Markova v ekonomike* [Probability theory. Controlled Markov's chains in economics]. Moscow, 2005. 248 p.

8. Solov'ev V.I. Odnosektornaya stokhasticheskaya dinamicheskaya model' ekonomiki [One-sector stochastic dynamic model of economics]. *Matematicheskie metody issledovaniya slozhnykh sistem, protsessov i struktur* [Mathematic methods for difficult systems, processes and structures investigation]. Moscow, 2000, iss. 3, pp. 101–112.

9. Shmidt A.V., Khudyakova T.A., Churyukin V.A. Algoritm otsenki i prognozirovaniya ekonomicheskoy ustoychivosti promyshlennogo predpriyatiya s primeneniem apparata Markovskikh sluchaynykh protsessov [Algorithms of assessment and forecasting of economic stability of the industrial enterprise using Markov's random processes device]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Economics and Management*, 2007, no. 10 (82), iss. 2, pp. 65–71.

10. Churyukin V.A. Markovskaya model' ustoychivosti ekonomicheskoy sistemy [Markov model of stability of the economic system]. *Mechanism of Sustainable Development of Economic Systems Formation. Collective monograph*. Verlag SWG imex GmbH, Nürnberg, Deutschland, 2014, vol. 2, pp. 363–368.

Shmidt Andrey Vladimirovich. Doctor of Science (Economics), associate professor, vice-rector for academic affairs, head of the Department of Tourism Management and Economics, South Ural State University (Chelyabinsk), kaferda.ems@yandex.ru.

Churyukin Valery Alekseevich. Candidate of Science (Engineering), associate professor Department of Economics and Finance, South Ural State University (Chelyabinsk), vchuryukin@mail.ru.

Received 10 June 2015

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Шмидт, А.В. Марковские модели экономических систем / А.В. Шмидт, В.А. Чурюкин// Вестник ЮУрГУ. Серия «Экономика и менеджмент». – 2015. – Т. 9, № 3. – С. 100–105. DOI: 10.14529/em090314

FOR CITATION

Shmidt A.V., Churyukin V.A. Markov's Models of Economic Systems. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Economics and Management*, 2015, vol. 9, no. 3, pp. 100–105. (in Russ.) DOI: 10.14529/em090314