

Расчет и конструирование

УДК 621.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИНТЕЗ ЗАМКНУТЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МНОГОКРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ НА ОСНОВЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТРУКТУРНОГО УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

В.И. Пожбелко, Е.Н. Ермошина

MODELLING AND SYNTHESIS CLOSED MECHANICAL SYSTEMS WITH MANY-SIDED CONNECTIONS ON BASE WHOLE-NUMERATION SOLUTIONS OF STRUCTURAL EQUATION

V.I. Pozhbelko, E.N. Ermoshina

Рассматривается методика и примеры синтеза многозвенных механических систем на основе полученных целочисленных решений исходного структурного уравнения механики. Установлено, что данное алгебраическое уравнение с двумя неизвестными имеет конечное множество из девяти решений в целых числах, которые могут быть использованы для построения (на основе этих решений) возможных структур механических систем взаимосвязанных твердых тел.

Ключевые слова: механические системы, структурный синтез, целочисленное решение уравнения, диофантов анализ.

The paper presents structural synthesis of mechanical systems with many-sided connections which using in technics. Result examples of creation such systems on base whole-numeration solutions of structural equation.

Keywords: mechanical systems, structural synthesis.

1. Постановка задачи и предлагаемый путь ее решения

Математические выражения (уравнения, неравенства и другие зависимости переменных величин) являются основным средством формализации и познания при моделировании физических явлений и строения окружающего мира, представляющего собой различные механические системы [1–4], состоящие из целого числа взаимосвязанных твердых тел (рис. 1). Таким образом, в механике возникает проблема решения уравнений прикладной математики именно в целых числах, относящаяся к достаточно сложным задачам аналитической теории чисел [5–7] и получившая название «диофантов анализ уравнений» (по имени древнегреческого математика Диофанта).

В работах [5–7] отмечено, что в первую очередь такие проблемы возникают, когда приходится искать целочисленные решения уравнений, где число неизвестных *превышает* число уравнений (например, два и более неизвестных в одном уравнении) и которые содержат:

а) более простую задачу – установление существования конечного (или бесконечного) количества целочисленных решений данного уравнения или системы исходных уравнений (или полного отсутствия таких решений в целых числах);

б) более сложную задачу – определение расчетным путем точного количества этих целочисленных решений при увеличенном (два и более) числе неизвестных в рассматриваемом уравнении;

в) рассматриваемую в данной работе предельно сложную задачу – нахождение всех этих решений в целых числах для количественного описания, а также последующее моделирование и целенаправленное создание (на основе этих решений) возможных структур механических систем взаимосвязанных твердых тел:

– как уже существующих (образовавшихся в природе окружающего мира в виде различных химических соединений и живых биологических объектов);

– так и искусственно создаваемых человеком разнообразных подвижных и неподвижных механических устройств (например, движущиеся механизмы машин и неподвижные шарнирно-рычажные фермы).

Отметим, что разнообразные механические системы взаимосвязанных твердых тел могут содержать как только простые (simple joints) соединения между собой двух отдельных компонентов (звеньев) системы (это будет частный случай – обозначим его $v = 0$), так и сложные многократные (complex many-sided) соединения между собой трех и более отдельных компонентов (звеньев) системы (этот более общий случай ее строения обозначим $v \neq 0$). Некоторые примеры возможных подвижных соединений (связей) звеньев между собой в различных замкнутых механических системах даны на рис. 2 (где кратность j образующихся соединений будет на единицу меньше числа сходящихся в узле звеньев механической системы).

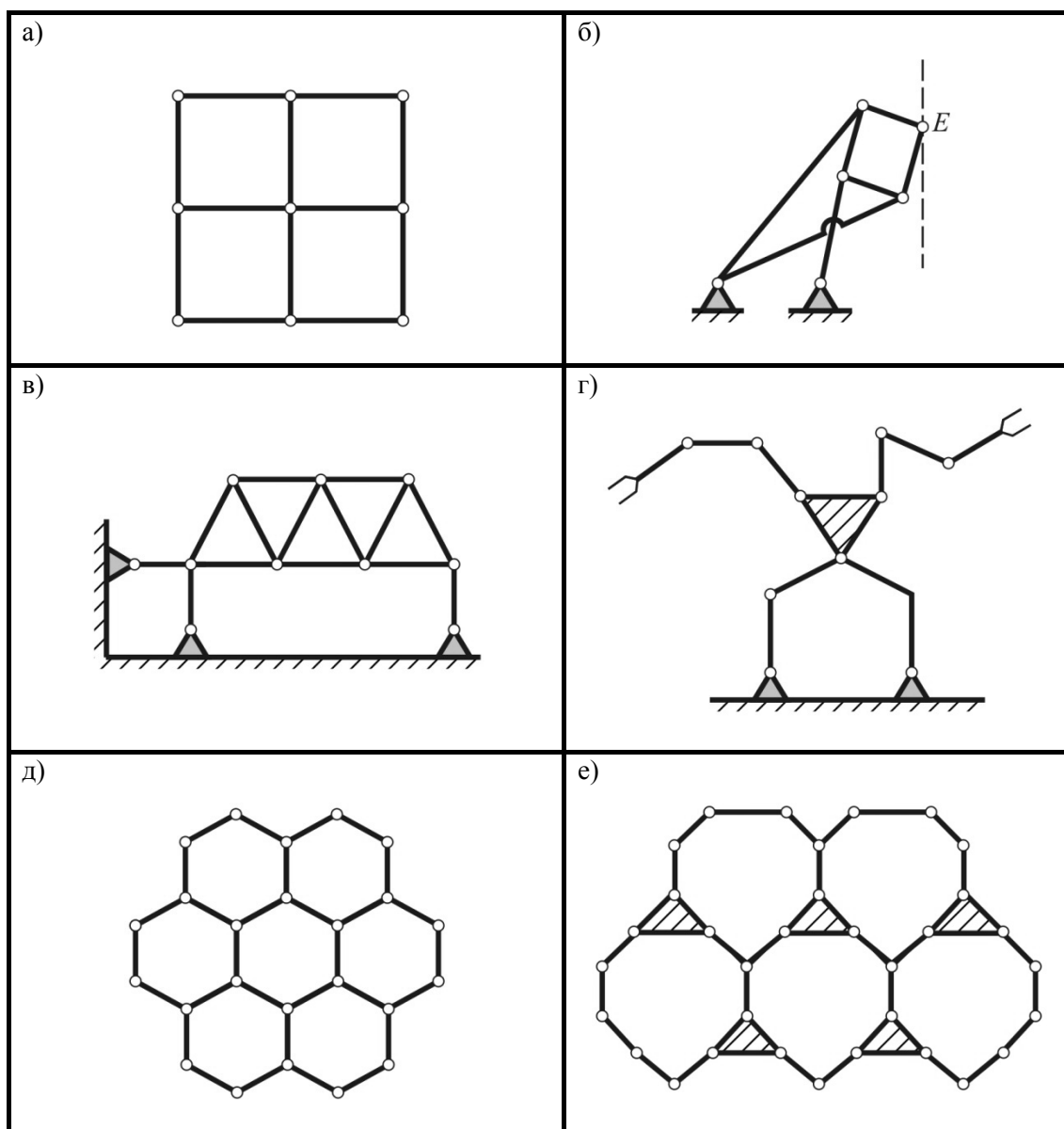


Рис. 1. Примеры механических систем с многократными связями, созданных природой и изобретенных человеком (на основе познания закономерностей окружающего мира): а – кристаллическая решетка твердых веществ [3]; б – шарнирный прямолинейно направляющий механизм [1]; в – стержневая ферма однопролетного моста [1]; г – человекоподобный робот-манипулятор; д – сотовые конструкции пчелиных ульев (с ячейками шестигранной формы); е – сотовые конструкции решеток охлаждения современных ядерных реакторов (с ячейками девятигранной формы) [4]

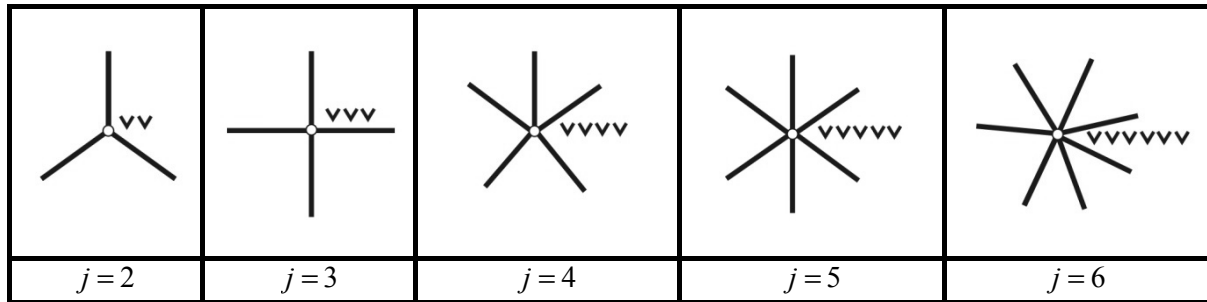


Рис. 2. Варианты многократных связей элементов механических систем (узлов с кратностью $j \geq 2$)

Для формализации строения многозвенных механических систем используем полученное в работе [2] уравнение многократных связей замкнутых механических систем (исходное структурное уравнение механики), которое в общем случае ($v \neq 0$) имеет вид

$$v_2 + 2v_3 + 3v_4 + 4v_5 + \dots + (k-1)v_k = v; \quad v \leq C = 2(K-1), \quad (1)$$

где v_j – число j -кратных соединений звеньев замкнутой механической системы ($j_{\max} = K$); K – число образуемых звеньями системы взаимно независимых замкнутых контуров ($K \geq 1$); v – приведенное число многократных соединений звеньев (узлов) механической системы; параметр k в последнем слагаемом данного уравнения зависит от величины K и равен $k = K + 1$ (при $C \leq K$ в области $K \leq 2$) или равен $k = K$ (при $C > K$ в области $K > 2$).

Решение исходного уравнения (1) заключается в определении всех целочисленных значений неизвестных ($v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_k$) при заданной целой величине $K = 1; 2; 3; \dots$ и соответствующей ей целой константе $C = 2(K-1)$, задающей диапазон изменения $v \leq C$. На рис. 3 даны примеры разнообразных механических систем, структура которых удовлетворяет граничному $v = C$.

С математической точки зрения исходная зависимость (1) представляет собой линейное алгебраическое уравнение 1-й степени с целой константой C и постоянными целыми коэффициентами c_i , образующих арифметическую прогрессию (число слагаемых которой зависит от задаваемой величины $K = 1; 2; 3; \dots$):

$$(c_0 y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + c_3 y_4 + c_4 y_5 \dots + c_i y_i) - C = 0, \quad (2)$$

где $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 4, \dots, c_i = (k-1)$;

$$y_2 = v_2, y_3 = v_3, y_4 = v_4, y_5 = v_5, \dots, y_i = v_k.$$

Предлагаемый алгоритм поиска всех решений уравнения (1) состоит из трех этапов;

а) определение диапазона возможных целочисленных значений неизвестных (I этап);

б) составление аналитической зависимости между неизвестными (II этап);

в) определение всех решений искомого уравнения в целых числах – из совместного рассмотрения пунктов а и б (III этап).

2. Решение структурного уравнения механики в целых числах

Применим предлагаемый трехэтапный алгоритм для решения в целых числах исходного структурного уравнения механики (1) при $K = 1, K = 2, K = 3$.

I. $K = 1$

Исходное структурное уравнение механики (1) при $K = 1$ вырождается ($v = v_2, C = 0$) и имеет единственное решение

$$v_2 = v = 0,$$

которое представлено на рис. 4 в виде одноконтурной замкнутой механической системы.

II. $K = 2$

Исходное структурное уравнение механики (1) при $K = 2$ примет вид

$$v_2 + 2v_3 = v; \quad v \leq 2(K-1) = 2$$

и в диапазоне возможных целочисленных значений неизвестных $0 \leq v_2 \leq 2, 0 \leq v_3 \leq 1$ имеет следующие 4 решения в четных и нечетных числах:

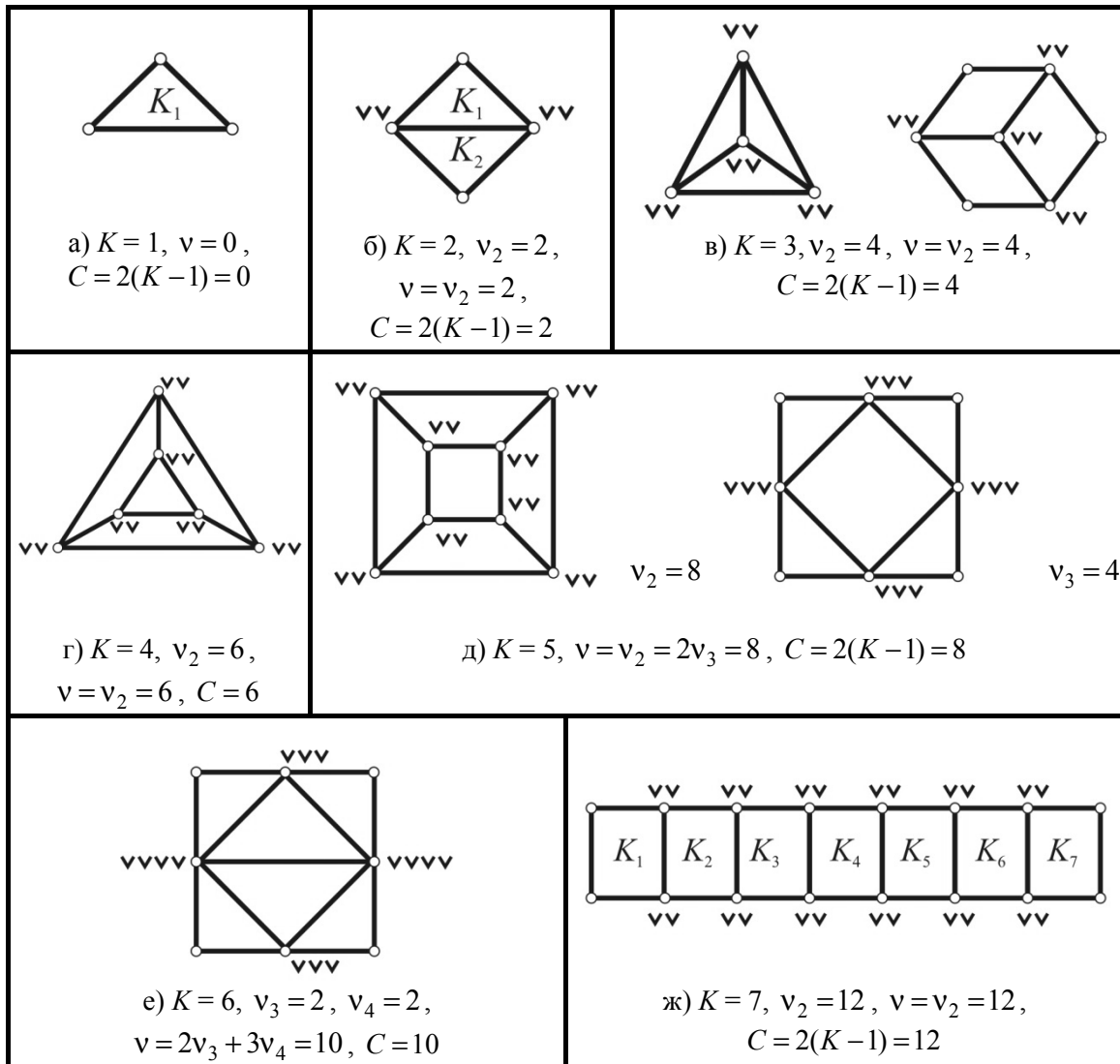


Рис. 3. Моделирование строения замкнутых одноконтурных ($K = 1$) и многоконтурных ($K \geq 2$) шарнирно-рычажных структур (выполнение граничного условия структурного уравнения механики (1) вида $v = C$)

$v_2 = 0, v_3 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0, v_2 = 2, v_3 = 0, v_2 = 0, v_3 = 1$
(представленные на рис. 4 в виде различных двухконтурных механических систем).

III. $K = 3$

Исходное структурное уравнение механики (1) при $K = 3$ примет вид

$$v_2 + 2v_3 = v; v \leq 2(K - 1) = 4$$

и в пределах $v \leq 4$ может иметь только 5 значений величины v :

$$v = C_1 = 0; v = C_2 = 1; v = C_3 = 2; v = C_4 = 3; v = C_5 = 4,$$

приводящих к следующей совокупности целочисленных решений уравнения (1), определяющих возможные варианты структуры трехконтурных механических систем:

а) $C_1 = 0$:

$$v_2 + 2v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = 0, v_3 = 0 \text{ (первое решение);}$$

б) $C_2 = 1$:

$$v_2 + 2v_3 = 1 \Rightarrow v_3 = \frac{1 - v_2}{2} \Rightarrow \text{из условия } v_3 \geq 0 \text{ величина } v_2 \text{ может быть только нечетной и равной } v_2 = 1, v_3 = 0 \text{ (второе решение);}$$

Расчет и конструирование

в) $C_3 = 2$:

$v_2 + 2v_3 = 2 \Rightarrow v_3 = 1 - \frac{v_2}{2} \Rightarrow$ из условия $v_3 \geq 0$ величина v_2 может быть только *четной* и в пределах $v_2 \leq 2$ таких четных цифр только две: $v_2 = 0, v_3 = 1$ (третье решение); $v_2 = 2, v_3 = 0$ (четвертое решение);

г) $C_4 = 3$:

$v_2 + 2v_3 = 3 \Rightarrow v_3 = \frac{3 - v_2}{2} \Rightarrow$ из условия $v_3 \geq 0$ величина v_2 может быть только *нечетной* и в пределах $v_2 \leq 3$ таких нечетных цифр только две (1; 3): $v_2 = 1, v_3 = 1$ (пятое решение); $v_2 = 3, v_3 = 0$ (шестое решение);

д) $C_5 = 4$:

$v_2 + 2v_3 = 4 \Rightarrow v_3 = 2 - \frac{v_2}{2} \Rightarrow$ из условия $v_3 \geq 0$ величина v_2 может быть только *четной* и в пределах $v_2 \leq 4$ таких четных цифр только три (это 0; 2; 4): $v_2 = 0, v_3 = 2$ (седьмое решение); $v_2 = 2, v_3 = 1$ (восьмое решение); $v_2 = 4, v_3 = 0$ (девятое решение).

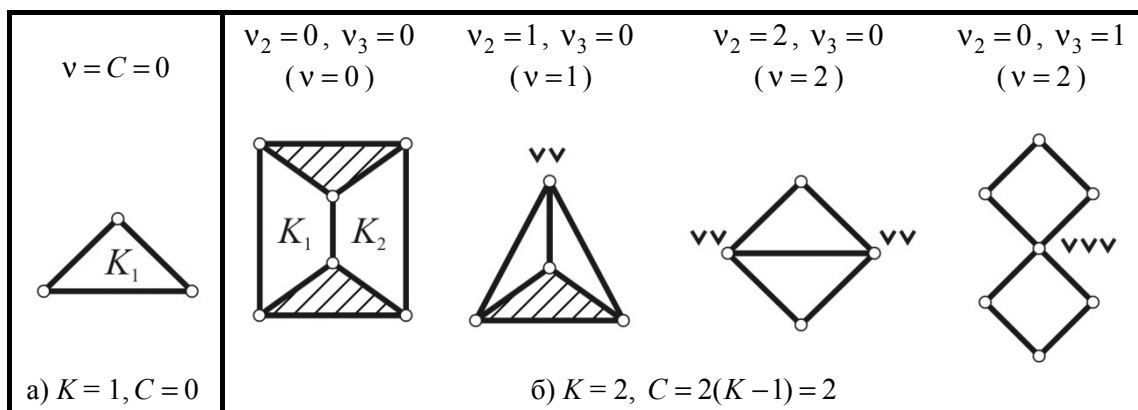


Рис. 4. Создание одноконтурных ($K = 1$) и двухконтурных ($K = 2$) замкнутых механических систем (на основе решений в целых числах структурного уравнения механики (1) в случае $C \leq K$)

Таким образом, исходное уравнение механики (1) при $K = 3$ содержит 2 неизвестных (v_2, v_3) и имеет только 9 решений в целых числах (представленных на рис. 5 в виде трехконтурных замкнутых механических систем).

3. Теорема о конечном множестве целочисленных решений структурного уравнения механики с несколькими неизвестными

Анализ полученных в п. 2 целочисленных решений линейного структурного уравнения механики (1) позволяет предположить, что их различное число предопределено разными наборами четных и нечетных цифр согласно предлагаемой ниже теореме.

Теорема

Линейное структурное уравнение механики вида

$$v_2 + 2v_3 + 3v_4 + 4v_5 + \dots + (k-1)v_k = v; \quad v \leq C = 2(K-1) \Rightarrow v_2 + 2v_3 \leq C_0 \quad (3)$$

при любых $K \geq 1$ (т. е. с любым числом неизвестных) имеет конечное множество Z целочисленных решений (v_2, v_3, v_4, \dots), определяемое набором четных и/или нечетных взаимно простых целых чисел в составе константы C_0 и рассчитываемое по формуле

$$Z = \sum N_i, \quad N_i = \left(\frac{m_0}{2} + k_0\right) + \left(\frac{m_1 + k_1}{2}\right), \quad (4)$$

$$C_0 = 2(K-1) - [3v_4 + 4v_5 + \dots + (k-1)v_k], \quad C_0 \leq C = 2(K-1), \quad (5)$$

где N_i – число целочисленных решений в пределах данного значения C_0 ; m_0, k_0 – сумма четных цифр (m_0) и их количество (k_0) в цифровом диапазоне от нуля до предела, равного C_0 (включительно); m_1, k_1 – сумма нечетных цифр (m_1) и их количество (k_1) в цифровом диапазоне от нуля до предела, равного C_0 (включительно).

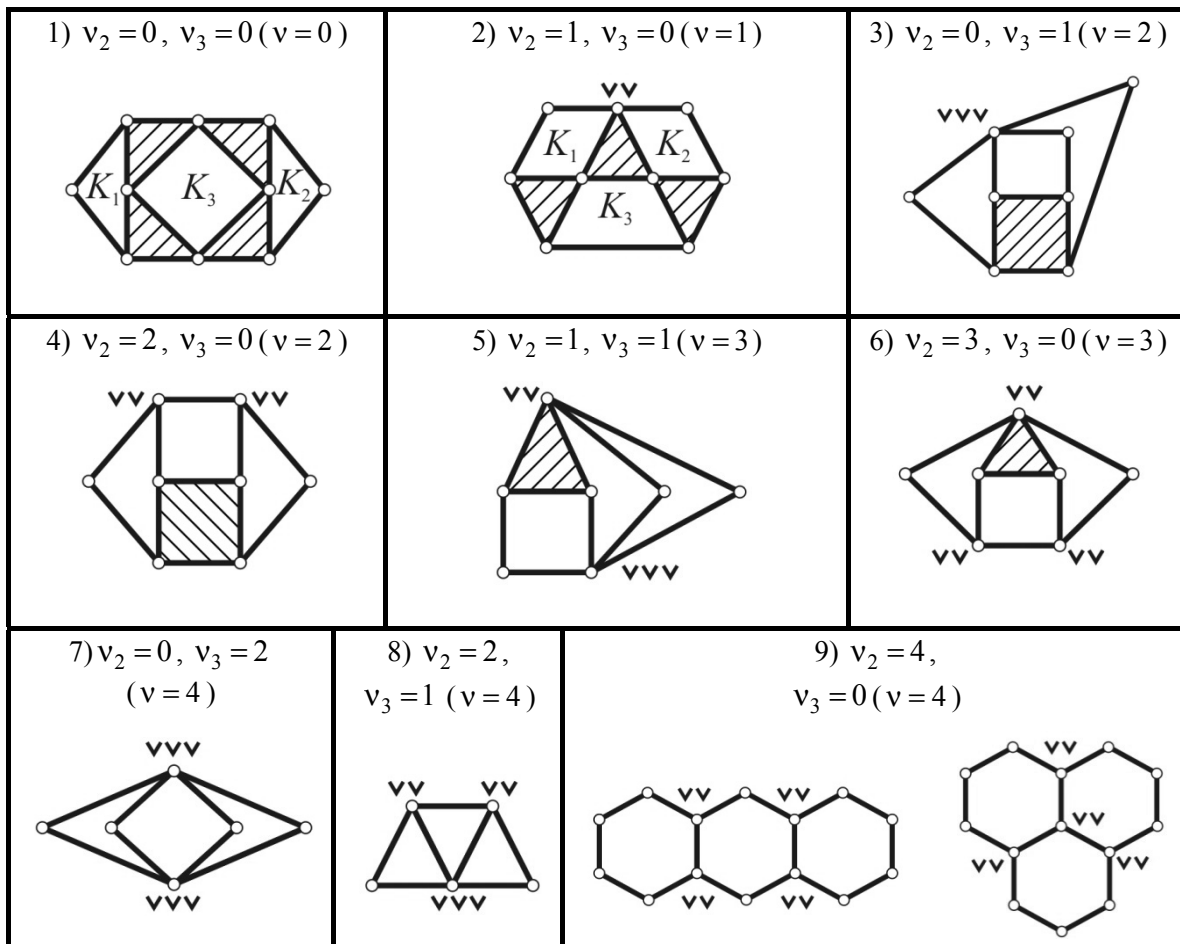


Рис. 5. Создание трехконтурных ($K = 3, C = 2(K - 1)$) замкнутых механических систем (на основе решений в целых числах структурного уравнения механики (1) в случае $C > K$)

Пример № 1. Исходные данные: $K = 2; v_2 + 2v_3 = 2(K - 1) = 2; C_0 = C = 2; N_i = N$.

Результаты расчета: $m_0 = 0 + 2 = 2, k_0 = 2; m_1 = 1, k_1 = 1 \Rightarrow N = (2 / 2 + 2) + (1) = 4; Z = N = 4$.

Пример № 2. Исходные данные: $K = 3; v_2 + 2v_3 = 4; C_0 = C = 4; N_i = N$.

Результаты расчета: $m_0 = 0 + 2 + 4 = 6, k_0 = 3; m_1 = 1 + 3 = 4, k_1 = 2 \Rightarrow N = (3 + 3) + (3) = 9; Z = N = 9$. (Совпадают с представленными на рис. 4 и 5 для случаев $K = 2$ и $K = 3$).

Примечание

В работе [6] рассматривается метод поиска целочисленных решений линейного уравнения с двумя неизвестными вида

$$ax + by + E = 0,$$

решение которого представлено в виде $x = x_0 - bt, y = y_0 + at$, где t – параметр ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), (x_0, y_0) – некоторое решение данного уравнения, в указанном уравнении a, b – целые числа, отличные от нуля и взаимно простые; E – целое.

Применительно к рассматриваемой механической системе с $K = 2$ (см. рис. 4) на a, b, E необходимо наложить дополнительные условия: $x \geq 0, y \geq 0; a = 1, b = 2; E \leq 0; (x_0 = E, y_0 = -E)$ – одно из решений; $E \in [-2, 0]$.

Расчет и конструирование

С учетом данных условий получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x = E - 2t \geq 0; \\ y = -E + t \geq 0, \end{cases}$$

из которой определяем интервал изменения параметра t (с учетом отрицательной величины E):

$t \leq \frac{E}{2}$; $t \geq E$ и получаем следующий набор целочисленных решений:

$$x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 1, y_2 = 0; x_3 = 2, y_3 = 0; x_4 = 0, y_4 = 1.$$

Сравнительный анализ полученного множества из 4 решений показывает, что данный результат (пары чисел x и y) полностью согласуется как с целочисленными решениями при $K = 2$ (см. п.2), так и с определением числа решений по аналитической зависимости (4) теоремы, предложенной в п.3 данной работы.

Выводы

1. Установлено, что исходное структурное уравнение механики вида [2]

$$v_2 + 2v_3 + 3v_4 + 4v_5 + \dots + (k-1)v_k = v; v \leq 2(K-1)$$

имеет конечное множество целочисленных решений Z (4), зависящих от набора четных и нечетных чисел в пределах константы данного уравнения, возрастающее с увеличением числа K образуемых звеньями механической системы замкнутых контуров.

2. Полученные целочисленные решения указанного структурного уравнения механики отражают все возможное многообразие структур с многократными связями и могут быть практически реализованы в виде разнообразных механических систем взаимосвязанных твердых тел (подвижных или неподвижных звеньев) для разных областей техники.

3. В синтезированных на основе целочисленных решений разнообразных механических систем (см. рис. 4 и 5) выявлена общая закономерность упрощения структуры (за счет снижения сложности составляющих звеньев) при переходе от нижней границы $v = 0$ к верхней границе $v = C$ их строения с многократными связями.

Литература

1. Крайнев, А.Ф. Механика (искусство построения) машин. Фундаментальный словарь / А.Ф. Крайнев. – М.: Машиностроение, 2000. – 904 с.
2. Пожбелко, В.И. Структурный анализ и синтез механизмов заданного уровня сложности по универсальной структурной таблице стандартных кодов строения / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. – 2012. – Т. 10, №1 (19). – С. 24–45.
3. Глинка, Н.Л. Кристаллические решетки твердого вещества // Общая химия / Н.Л. Глинка. – Л.: Химия, 1986. – Гл. V. – 704 с.
4. Крапивцев, В.Г. Организация конвективного переноса в пучке твэлов за сотовыми решетками для водо-водяных энергетических реакторов / В.Г. Крапивцев, В.И. Солонин, С.И. Цирин // Известия вузов. Машиностроение. – 2011. – № 4. – С. 7–12.
5. Серпинский, В.О. О решении уравнений в целых числах: пер. с пол. / В.О. Серпинский. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 88 с.
6. Гельфонд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1983. – 63 с.
7. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Совет. энцикл., 1988. – 847 с.

Поступила в редакцию 4 сентября 2012 г.

Пожбелко Владимир Иванович. Доктор технических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет. Область научных интересов – теория механизмов и машин.

Vladimir I. Pozhbelko. Doctor engineering science, professor, South-Ural State University. The area of scientific interests – theory of machine and mechanisms.

Ермошина Екатерина Николаевна. Студентка, Южно-Уральский государственный университет. Область научных интересов – прикладные математика и физика.

Ekaterina N. Ermoshina. Student, South Ural State University. The area of scientific interests – applied mathematics and physics.