

## МОДЕЛЬ ВИБРАТОРА ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВИБРОМАШИН

С.Г. Некрасов<sup>1</sup>, С.В. Перминов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

<sup>2</sup> АО «Медприбор», г. Челябинск, Россия

Одним из направлений развития машиностроения является проектирование и производство вибромашин для уплотнения сыпучих сред, начиная от низкочастотных дорожных виброкатков и виброплит для трамбовки дорожного полотна и укладки асфальта и завершая литейными установками и высокочастотными компактерами для создания новых материалов. Актуальной проблемой при проектировании такого типа вибромашин является выбор параметров вибрации рабочего инструмента, значения которых должны зависеть от параметров обрабатываемого материала, и, как следствие, выбор устройства, удовлетворяющего этим требованиям. Универсальных устройств на рынке нет, однако можно создать универсальную модель и конструкцию пригодную для проектирования вибромашин различного назначения.

В работе рассматривается модель универсального вибратора, принцип действия которого основан на изгибных поперечных колебаниях пластин. В отличие от полуволновых преобразователей стержневого типа, данная конструкция при тех же габаритных размерах и энергопотреблении обладает в широком диапазоне частот большим динамическим диапазоном колебаний рабочего инструмента, форму рабочей поверхности которого можно задавать произвольной. Конструкция и структура могут быть изменены в рамках базового набора элементов путем выбора, например, нулевых значений соответствующих параметров.

Получена распределенная модель на основе уравнений математической физики, которая сведена к интегральному виду за счет определения импульсной характеристики (функции Грина) круглой пластины и затем всего датчика. Проведено параметрическое исследование, показана возможность изменения частотной характеристики вибратора. Разработанная математическая модель применима как для низкочастотных, так и высокочастотных применений, так как является линейной и выполнена с использованием безразмерных комплексов теории подобия. Модель учитывает упругий гистерезис элементов конструкции, обеспечивая тем самым достоверные величины амплитуды резонансных колебаний рабочего инструмента. Валидация модели показала высокую точность определения резонансных частот.

*Ключевые слова:* вибратор, уплотнение материалов, конструкция, математическая модель, структура, собственная частота, упругий гистерезис, амплитуда.

### Введение

Одним из направлений развития машиностроения является проектирование и производство вибромашин, начиная от низкочастотных дорожных виброкатков и виброплит для трамбовки дорожного полотна и укладки асфальта и завершая высокочастотными компактерами для создания новых материалов и установками для литья металлов под давлением. Одной из проблем при проектировании таких вибромашин является выбор параметров вибрации рабочего инструмента, значения которых должны зависеть от размера частиц обрабатываемого материала. Общеизвестно, что при укладке дорожного полотна с применением виброплит используют частоты около 30 Гц, что обеспечивает резонансные колебания частиц грунта диаметром примерно 40 мм, при этом окружающие их более мелкие частицы не перемещаются и взаимодействие крупных частиц между собой не происходит. Спасти ситуацию позволяет присутствующее здесь ударное воздействие виброплиты на грунт в сочетании со статическим пригрузом и использование более высоких кратных частот – 60 и 90 Гц, что обеспечивает подвижность не только крупных частиц, но и частиц размером 10...20 мм.

Аналогичная ситуация наблюдается и в области производства высокочастотных устройств. Например, в последние годы идут разработки новых технологий компактирования нанопорошков [1], размеры частиц которых лежат в диапазоне 1...100 нм. Основная задача – обеспечить равномерное распределение плотности нанопорошка в компактах разной формы, сохранить нанострук-

## Расчет и конструирование

туру в прессовках для формирования наноразмерных зерен в процессе спекания, т. е. создать условия для подавления роста зерен и спекания тем самым нанокристаллических изделий с заданными функциональными свойствами. Для решения этой задачи чаще всего используют полуволновые концентраторы [2] на одной из стандартных ультразвуковых частот (21, 27... 44 кГц), используя уже другой критерий – размер наночастицы должен быть соизмерим с амплитудой колебаний рабочего инструмента [2]. Аналогичный результат можно было бы получить при наложении на матрицу ударных воздействий, так как их спектр частот обычно не превышает вышеуказанный диапазон низкочастотного ультразвука. Такой подход не всегда эффективен.

Исходя из размера наночастиц, для создания их подвижности в процессе компактирования требуется уже радиочастотный диапазон ультразвукового воздействия большой мощности, например радиоимпульсы с высокочастотным заполнением [3]. Здесь необходимо искать самые современные технические решения, обеспечивающие максимальную величину электромеханической связи и КПД вибропреобразователей. Например, дополнительные возможности для изменения характеристик высокочастотных преобразователей дает использование в них двух и более пьезоэлементов [4–7], при этом уже разработаны двухэлементные двухчастотные преобразователи, позволяющие существенно улучшить эксплуатационные характеристики при расположении пьезоэлементов соосно [8] или концентрично [9]. Также показано, что создание акустического резонанса между двумя излучающими элементами с переменным зазором между ними позволяет увеличить интенсивность возбуждаемого акустического поля на 12 дБ и обеспечить перестройку частоты до 24 % относительно резонансной [10], что обеспечивает подвижность частиц с нестабильными размерами в уплотняемом компакте.

Отметим, что аналогичные методы воздействия можно использовать и при литье изделий сложной формы, однако основным фактором воздействия на жидкий металл здесь уже является косвенное явление – ультразвуковая кавитация – микровзрывы пузырьков газа с масштабом явления от одного до нескольких десятков микрон, который соизмерим с размером зерен, зарождающихся при охлаждении слитка [11]. Это способствует их подвижности и образованию мелкого равновесного зерна, повышению однородности слитка и уменьшению степени развития «ликвационных» процессов, что, в конечном итоге, приводит к существенному улучшению потребительских свойств литого изделия.

Как видим, утилитарная, казалось бы, задача превращается в разработку с большим количеством экспериментальных исследований. При этом разработчики не уделяют в нужной мере внимание выбору оборудования с необходимой частотой вибрационного воздействия, при том что частота является важнейшим параметром наряду с амплитудой колебаний инструмента. Одна из причин – это отсутствие на рынке должных предложений. Очевидно также, что нужен системный подход в конструировании такого типа устройств на произвольную частоту и первое с чего, на наш взгляд, надо начать – это разработка моделей мощных вибраторов, унифицированных для работы в широком диапазоне частот (1... 100 кГц).

В работе рассматривается конструкция и модель универсального вибратора, пригодного для использования в широком диапазоне частот, принцип действия которого основан на изгибных поперечных колебаниях пластин. В отличие от полуволновых преобразователей стержневого типа данная конструкция при меньших габаритных размерах и энергопотреблении обладает в вышеуказанном диапазоне частот большим динамическим диапазоном колебаний рабочего инструмента, форму рабочей поверхности которого можно задавать произвольной. Разработанная математическая модель применима как для низкочастотных, так и высокочастотных преобразователей, так как выполнена с использованием безразмерных комплексов теории подобия. Модель учитывает упругий гистерезис элементов конструкции, обеспечивая тем самым достоверные величины амплитуды резонансных колебаний рабочего инструмента.

### Модель вибратора

Вибратор представляет собой электромеханический комбинированный преобразователь, в котором пьезокерамический цилиндр 5 (рис. 1, а) сопряжен с одной стороны с упругим высокодобротным элементом 3 (пластина), а с другой – инерционным концевым элементом (концевик) 2, являющимся рабочим инструментом для воздействия на нагрузку 1, например на одну из стенок матрицы для прессования или сам является этой стенкой. Полая или цельная шпилька 4 связывает конструкцию в единое целое и позволяет также задать необходимую величину предвари-

тельного напряжения сжатия, что улучшает как прочностные характеристики конструкции, так и действие пьезоэффекта [12]. Пьезокерамический цилиндр 5 связан с внешним источником переменной частоты и реализует обратный пьезоэффект.

Влияние нагрузки 1 может проявляться различно. При небольших габаритах жесткой нагрузки 1 ее влияние можно учесть, как дополнительную массу к массе концевика 2, однако, в общем случае, когда характерные размеры поверхности излучения сравнимы с длиной волны в нагрузке (сыпучая среда или жидкость), влияние нагрузки следует рассматривать как комплексную величину [13]. В любом случае учет влияния нагрузки на вибрирующий объект – это нетривиальная задача, связанная иногда с решением интегральных или дифференциальных уравнений в частных производных, например, в виде упругогидродинамической задачи.

**Математическая модель.** Для описания изгибных поперечных колебаний круглой пластины используем моментную теорию оболочек [14]. Продольные колебания пьезокерамических стержней и цилиндров описываем с помощью одномерного волнового уравнения [15]. Учтем также, что абсолютные значения упругих постоянных пьезокерамики зависят от условий на электрической стороне, поэтому принимаем, что модуль Юнга  $E^c$  и другие определены при постоянной напряженности  $e$  электрического поля [13], что характерно для работы преобразователя в режиме излучения. В модели действие пьезоэффекта со стороны цилиндра заменяем парой противоположно направленных интенсивностей  $G_0$ , приложенных по окружности на краях цилиндра (рис. 1, б). В случаях, когда шпилька 4 также наделена пьезоактивными свойствами (пьезостержень), необходимо добавочно рассматривать пару противоположно направленных сил  $F_0$  (рис. 1, б), приложенных в полюсе пластины в направлении согласованном с направлением  $G_0$  и с реализуемой формой колебаний.

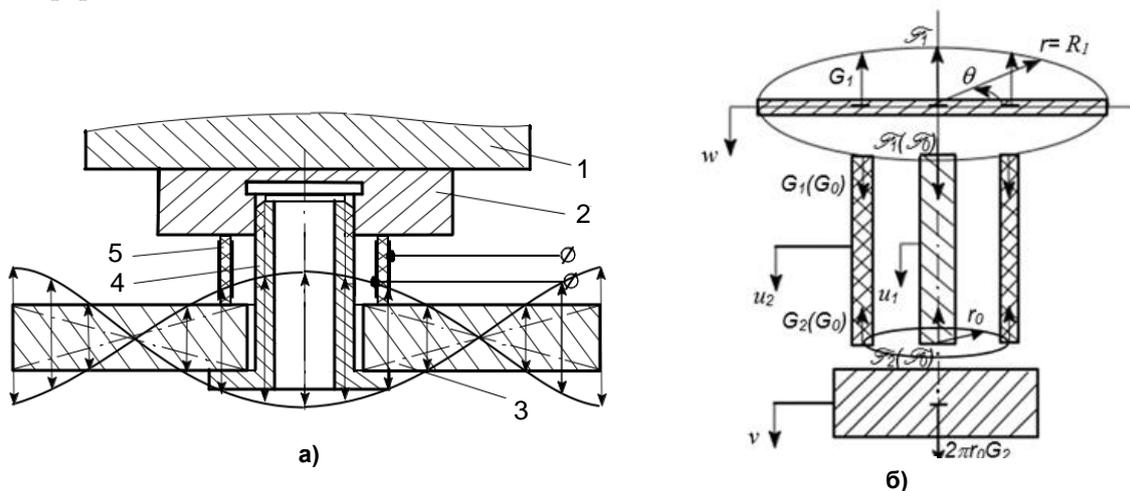


Рис. 1. Вибратор (а) и его расчетная модель (б)

Свяжем неподвижную систему отсчета со срединной плоскостью пластины и направим осевую координату вдоль продольной оси симметрии как это показано на рис. 1, б. Поперечные колебания пластины  $w$  будем рассматривать в полярной системе координат  $(r, \theta)$ . Обозначим перемещения элементов вибратора относительно неподвижной системы координат следующим образом: продольное относительное перемещение стержня –  $u_1$ , пьезоэлемента –  $u_2$ , инерционной массы –  $v$ . Разобьем сенсор на составляющие, заменив связи их реакциями, и воспользуемся методом кинестатики для записи уравнений движения. Колебания пластины [14, 15] опишем следующим уравнением:

$$D_0 \Delta_{r,\theta} \Delta_{r,\theta} \bar{w} + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = \Phi(r, \theta, \tau), \tag{1}$$

Используем условия свободного края [14] на граничном контуре при  $r = R_1$  и ненулевые начальные условия. В выражении (1) введены обозначения:  $\Delta_{r,\theta}$  – оператор Лапласа;  $\Phi(r, \theta, \tau)$  – функция поперечных возмущений на пластину;  $D_0 = Eh^3/[12(1-\sigma)]$  – цилиндрическая жесткость;  $\rho$ ,  $E$ ,  $\sigma$  – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  – толщина пластины.

## Расчет и конструирование

Определим вид функции  $\Phi(r, \theta, \tau)$  и воспользуемся для этого понятием стандартизирующей функции [16], что позволяет нам получить задачу с нулевыми значениями краевых и начальных условий:

$$\Phi(r, \theta, t) = G_1 \delta(r - r_0) - F_1 \delta'(r) + \rho h \cdot [\bar{w}_1(r, \theta) \delta'(t) + \bar{w}'_2(r, \theta) \delta(t)]. \quad (2)$$

Здесь  $G_1$  – интенсивность реакции связи со стороны пьезоэлемента, распределенная по окружности радиуса  $r = r_0$  ( $\Delta r_0$  – толщина элемента);  $F_1$  – сосредоточенная реакция связи со стороны стержня, приложенная в полюсе пластины;  $\delta, \delta'$  – дельта функция и её первая производная по соответствующей координате, которая в силу своей избирательности указывает на место и время приложения воздействия, например, начальных условий  $w_1(r, \theta)$  и  $w'_2(r, \theta)$ .

Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры:  $w = \bar{w}/h_0, u_1 = \bar{u}_1/h_0, u_2 = \bar{u}_2/h_0, v = \bar{v}/h_0, \tau = \omega t, \omega^* = \omega/\omega_0, \eta = x/l_2 (l_1 = l_2), \xi = k_0 r, k_0 = \rho h \omega_0^2 / D_0$ , где  $\omega_0$  и  $h_0$  – характерная частота и амплитуда колебаний,  $P_0$  – атмосферное давление. При решении колебательной задачи ( $t \rightarrow \infty$ ) можно не учитывать влияние начальных условий и ограничиться рассмотрением используемых чаще всего на практике осесимметричных форм колебаний, что позволяет записать полную систему уравнений движения вибратора в следующем виде:

$$\Delta_\xi \Delta_\xi w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -G_1 \cdot B_1 \delta(\xi - \xi_0) \omega^{*1/2} - F_1 \cdot B_2 \delta(\xi) / (\xi \cdot \omega^*), \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \sigma \left( \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right]_{/\xi=\bar{R}_1} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta_\xi w) \right]_{/\xi=\bar{R}_1} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = k_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \eta}_{/\eta=0} = b_1 (F_1 + F_0 \Delta_1^i), \quad \frac{\partial u_1}{\partial \eta}_{/\eta=l_1} = -b_1 (F_2 + F_0 \Delta_1^i), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} = k_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta}_{/\eta=0} = b_2 (G_1 + G_0 \Delta_2^i), \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta}_{/\eta=l_1} = -b_2 (G_2 + G_0 \Delta_2^i), \quad (6)$$

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = \lambda_0 (4\pi G_2 + F_2 + P); \quad (7)$$

$$u_1(0) = w(0), \quad u_2(0) = w(\xi_0), \quad u_1(1) = u_2(1) = v. \quad (8)$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения:

$$B_1 = P_0 2\pi R_1 / (D_0 k_0^3 h_0), \quad B_2 = P_0 R_1^2 / (2D_0 k_0^2 h_0), \quad P = P/P_0, \quad G_1 = G_1 / (P_0 2\pi R_1),$$

$$G_2 = G_2 / (P_0 2\pi R_1), \quad F_1 = F_1 / (P_0 \pi R_1^2), \quad F_2 = F_2 / (P_0 \pi R_1^2),$$

$$k_1 = \omega_0 l_1 / c_1, \quad k_2 = \omega_0 l_1 / c_2, \quad b_1 = P_0 \pi R_1^2 l_1^2 / (E_1 S_1 h_0), \quad (9)$$

$$b_2 = P_0 \pi R_1 l_2 / (E_1 \Delta r_0 h_0), \quad R_1 = k_0 R_1, \quad \lambda_0 = P_0 \pi R_1^2 / (m_0 \omega_0^2 h_0),$$

а символ Кронекера  $\Delta_j^i$  ( $i = 1, 2$ ) указывает на воздействие  $F_0$  со стороны шпильки ( $j = 1$ ) или цилиндра  $G_0$  ( $j = 2$ );  $c_1$  и  $c_2$  – скорости звука в продольном направлении стержня и цилиндра.

Допускаем, что рассеивание энергии при колебаниях равномерно размазано по объему материала, зависит от амплитуды деформации и не зависит от частоты [17, 18]. Связь между амплитудами напряжений  $\tau_0$  и деформаций  $\Delta x_0$  описывается петлей гистерезиса и может быть представлена в следующем виде [17]:

$$\tau_0 = E \cdot \Delta x_0 (1 + j \Delta \psi / 2\pi), \quad (10)$$

где  $\Delta \psi$  – эквивалентный коэффициент поглощения энергии,  $j$  – мнимая единица,  $E$  – модуль упругости материала элементов сенсора. Зависимость (10) предполагает решение задачи (3) – (8) на комплексной плоскости.

**Функция Грина вибрирующей круговой пластинки.** Для решения смешанной краевой задачи (3...8) воспользуемся методом функции Грина, который позволяет свести решение задачи к интегральному виду (в свертках). Как известно, фундаментальное решение линейного дифференциального уравнения в теории обобщенных функций совпадает с обобщенной функцией Грина  $G$  [19]:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)G(\xi, \alpha; \theta, \varphi; \tau, \nu) = \delta(\xi, \theta, \tau), \quad (11)$$

где  $L$  – линейный дифференциальный оператор. Учтем синусоидальные смещения пластины во времени и разложим дельта функцию в тригонометрический ряд по  $\theta$  (рис. 1, б):

$$\delta(\xi, \theta, \tau) = \frac{1}{\pi} \delta(\xi) \exp(i\omega^* \tau) \sum_{m=0}^{\infty} (1 - 0,5\Delta_0^m) \cos(m\theta), \quad (12)$$

где  $\Delta_0^m$  – символ Кронекера. Представим искомую функцию Грина аналогичным рядом

$$G_G(\xi, \alpha, \theta, \tau) = \exp(i\omega^* \tau) \sum_{m=0}^{\infty} G_m(\xi, \alpha) \cos(m\theta). \quad (13)$$

Подставляя выражение (13) и тригонометрический ряд (12) в уравнение (11), получим в общем виде решение

$$G_m(\xi, \alpha) = (1 - 0,5\Delta_0^m) L_m^{-1} \delta(\xi - \alpha), \quad (14)$$

которое включает в себя [19, 20] сингулярную часть  $G_{m+}(\xi, \alpha)$  и аналитическую часть  $G_{m0}(\xi, \alpha)$ . Функция  $G_{m0}$  должна удовлетворять однородному уравнению, соответствующему уравнению (11). Общее решение однородного уравнения имеет вид [20] линейной комбинации функций Бесселя:

$$G_{m0}(\xi) = C_{1m} J_m(\xi) + C_{3m} Y_m(\xi) + C_{2m} I_m(\xi) + C_{4m} K_m(\xi), \quad (15)$$

где  $C_{1m} \dots C_{4m}$  – произвольные постоянные. Сингулярную часть решения определяем в виде:

$$G_{m+}(\xi, \alpha) = H_0(\xi - \alpha) G_{m0}(\xi), \quad (16)$$

где  $H_0(\xi - \alpha)$  – функция Хевисайда. Функция  $G_{m+}(\xi, \alpha)$  должна удовлетворять уравнению с правой частью  $L_m G_{m+} = \delta$  и, следовательно, можно удовлетворить этому уравнению, используя неизвестные нам постоянные в выражении функции  $G_{m0}(\xi, \alpha)$ . Дифференцируя выражение (15) в пространстве обобщенных функций, приходим к системе алгебраических уравнений линейной относительно искомых постоянных  $C_1 \dots C_4$ , решение которой можем получить аналитически. Подставляя найденные коэффициенты в выражение (14), находим функцию Грина пластины. Ограничимся опять рассмотрением осесимметричных форм колебаний, что позволяет проинтегрировать полученное выражение по  $\theta$  от нуля до  $2\pi$ :

$$G(\xi, \alpha) \exp(i\omega^* \tau) = \frac{\pi\alpha}{4} \cdot \{H_0(\xi - \alpha)[Y_0(\alpha)J_0(\xi) - J_0(\alpha)Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi} K_0(\alpha)I_0(\xi) - \frac{2}{\pi} I_0(\alpha)K_0(\xi)] + C_{10}J_0(\xi) + C_{30}Y_0(\xi) + C_{20}I_0(\xi) + C_{40}K_0(\xi)\} \exp(j\omega^* \tau). \quad (17)$$

Произвольные постоянные  $C_{10} \dots C_{40}$  определяем из условий регулярности решения в полюсе и из краевых условий (4). В частности, учитывая, что  $Y_0(\xi) \rightarrow \infty$ ,  $K_0(\xi) \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow 0$ ), получаем  $C_{30} = 0$  и  $C_{40} = 0$ . Значения постоянных  $C_{10}$  и  $C_{20}$  определяем из условий свободного края (4). В результате получаем искомую функцию:

$$G(\xi, \alpha) \exp(i\omega^* \tau) = \frac{\pi\alpha}{4} \cdot \{H_0(\xi - \alpha)[Y_0(\alpha)J_0(\xi) - J_0(\alpha)Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi} K_0(\alpha)I_0(\xi) - \frac{2}{\pi} I_0(\alpha)K_0(\xi)] - Y_0(\alpha)J_0(\xi) - \frac{2}{\pi} K_0(\alpha)Y_0(\xi) + \left(\frac{4C_{10}}{\pi\alpha} + Y_0(\alpha)\right)J_0(\xi) + \left(\frac{4C_{20}}{\pi\alpha} + \frac{2}{\pi} K_0(\alpha)\right)I_0(\xi)\} \exp(j\omega^* \tau). \quad (18)$$

**Импульсная функция вибратора.** Для определения импульсной функции (Грина) всего вибратора необходимо определить неизвестные реакции связей  $G1$ ,  $G2$  и  $F1$ ,  $F2$  (см. рис. 1, б). Общий вид решения уравнений (5) и (6) для амплитуд колебаний ищем в виде:

$$\begin{aligned} U_{10} &= A_1 \cos(k_1 \omega^* \eta) + B_1 \cos(k_1 \omega^* \eta), \\ U_{20} &= A_2 \cos(k_2 \omega^* \eta) + B_2 \cos(k_2 \omega^* \eta), \end{aligned} \quad (19)$$



ной составляющих давления. В результате амплитуда колебаний рабочего инструмента определяется выражением:

$$v_0 = F_0 \lambda_0 \Delta^j W_3 + 4\pi G_0 \lambda_0 \Delta^j W_3 - w_0(O) W_1 W_3 - w_0(\xi_0) W_2 W_3 + P_0 \lambda_0 W_3, \quad (24)$$

где выражение для распределения амплитуд прогиба пластины имеет уже алгебраическую форму в силу фильтрующих свойств дельта-функции:

$$w_0(\xi) = \{ (F_0 \Delta^j + P_0) B_2 [\lambda_0 W_3 W_4 + 1 / (\xi \omega^*)] \delta(\xi) + G_0 B_1 \lambda_0 \Delta^j (4\pi W_3 W_7 + 1 / \omega^{*3/2}) \delta(\xi - \xi_0) + 4\pi G_0 \Delta^j B_1 \lambda_0 W_3 W_4 \delta(\xi) + (F_0 \Delta^j + P_0) \lambda_0 W_3 W_7 \delta(\xi - \xi_0) \} \otimes \bar{G}(\xi, \alpha). \quad (25)$$

Учет неупругого сопротивления по формуле (10) приводит нас к необходимости замены  $b_1$ ,  $b_2$  и  $k$  на их комплексные аналоги:

$$b_1^* = b_1 / (1 + j\Delta\psi / 2\pi), \quad b_2^* = b_2 / (1 + j\Delta\psi / 2\pi), \quad k^* = k_0 (1 + j\Delta\psi / 2\pi)^{1/4} \approx k_0 (1 - j\Delta\psi / 8\pi) \quad (26)$$

Решение общей задачи связано с дискретизацией и вычислением комплексных алгебраических выражений (24) и (25), которые можно выполнить в любой специализированной вычислительной системе.

### Численное исследование и валидация модели

Рассмотрим некоторые результаты расчетов. Исходные параметры численной модели сенсора повторяют параметры натурной модели: масса концевого элемента – 850 г, масса стержня – 20 г, масса пластины – 1500 г, внешний и внутренний диаметр пластины  $R_1 = 120$  мм и  $R_2 = 22$  мм, толщина пластины  $h = 15$  мм, диаметр концевого элемента – 64 мм, толщина концевого элемента – 12 мм, длина стержня и цилиндра – 10 мм. Внешний диаметр и толщина стенок цилиндра – 26 мм и 1,65 мм. Материал металлических элементов – инструментальная сталь, пьезокерамика – ЦТС-844.

На рис. 3, а представлены расчетные зависимости безразмерной амплитуды колебаний активной поверхности от величины массы концевого элемента (резонансные значения) и кривая изменения резонансной частоты. Видим, что с изменением массы в представленном диапазоне резонансных частот к основному резонансу, связанному с колебаниями пластины, присоединяется еще одно резонансное явление, связанное с колебаниями стержня или цилиндра с массой на конце. Такие резонансы обычно происходят не на собственных (парциальных) частотах элементов конструкции, а на комбинационных частотах, функционально связанных с собственными. Исследовалось также влияние диаметра пьезокерамического цилиндра на амплитудно-частотные характеристики вибратора (рис. 3, б). Увеличение диаметра пьезоцилиндра вызывает уменьшение амплитуды резонансных колебаний на поверхности концевого элемента и пластины.

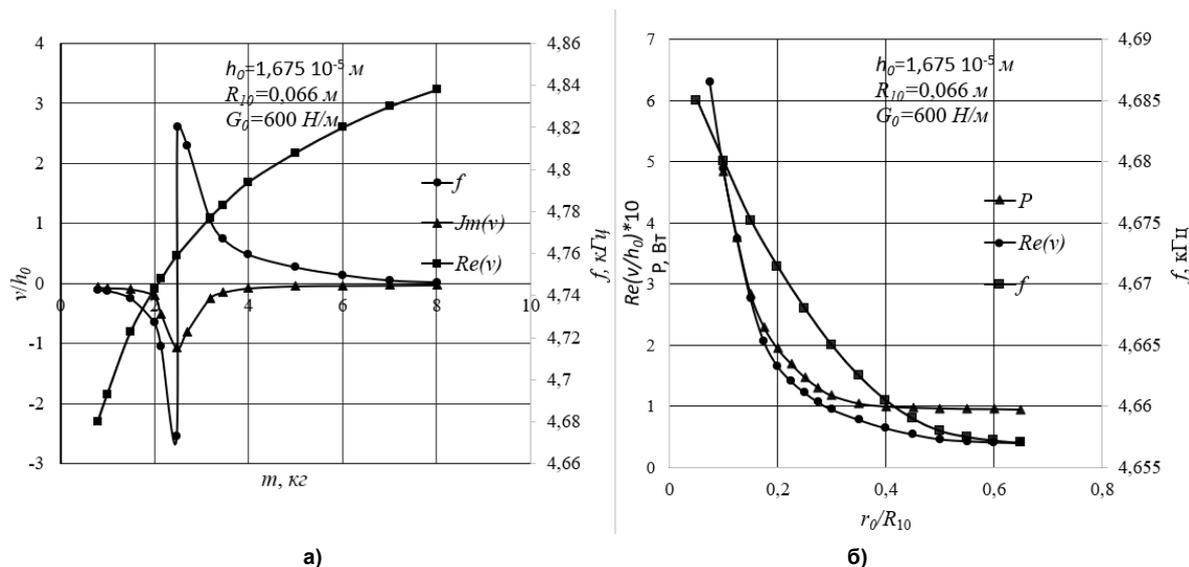


Рис. 3. Резонансные характеристики вибратора в зависимости от массы концевого элемента (а) и радиуса пьезокерамического цилиндра (б)

Валидация модели по натурному образцу показала высокую точность определения резонансных частот и форм колебаний пластины в составе вибратора. Относительная погрешность расчета пьезо-

## Расчет и конструирование

ти нижних резонансных частот вибратора для вышеуказанных параметров менее 0,05 %. Для учета конструкционного и внутреннего трения требуется «калибровка» модели на ее натурной копии в резонансном режиме (использовались пьезопленочные датчики SDT1 фирмы Measurement Specialties, наклеенные узкой полосой по радиусу пластинки для захвата зоны узла и смежной с ним зоны пучности колебаний). После такой «калибровки» и определения эквивалентного коэффициента поглощения  $\Delta\psi$  в формуле (10) точность расчета амплитуд колебаний на данной модели сенсора ограничена в основном инструментальными погрешностями измерительного оборудования, модельными допущениями и погрешностью аппроксимации дискретной модели: относительная погрешность расчета резонансных амплитуд колебаний менее 1 %, а для нерезонансных значений амплитуд – менее 0,2 %.

### Выводы

Данная модель может использоваться как основа для проектирования вибромашин различного типа, принцип действия которых основан на изгибных колебаниях упругих элементов. Она позволяет удовлетворить требованиям по частоте и амплитуде колебаний рабочего инструмента при возможных ограничениях на габариты и массу, решив тем самым задачу синтеза и другие оптимизационные задачи. Мы ограничили благоприятный выбор рабочих частот диапазоном 1...100 кГц, но это не значит, что конструкция не реализуема для частот порядка сотни герц или выше 100 кГц, учитывая, что оборудование и технология изготовления могут существенно измениться. В мегагерцовом диапазоне частот предпочтение надо отдать полуволновым преобразователям.

Модель учитывает упругий гистерезис, а использование безразмерных комплексов позволяет распространить полученное решение на подобные объекты. Решение колебательной задачи в свертках определяет ее «вырожденное» (24, 25) решение в алгебраической форме, что существенно упрощает модель и делает ее пригодной для инженерных расчетов.

### Литература

1. *Nanotechnology Research Directions: Vision for Nanotechnology in the Next Decade/ Edited by M.C. Roco, R.S. Williams, P. Alivisatos. – London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 292 p.*
2. *Полисадова, В.В. Ультразвуковое и коллекторное компактирование. Лекции. – Томский политехнический университет, 2009. – 44 с.*
3. *Коробов, А.И. Особенности распространения упругих волн в 3-d гранулированной неконсолидированной среде / А.И. Коробов, Н.В. Ширгина, А.И. Кокшайский // Труды школы-семинара «Волны–2012» (секция 8). – М.: МГУ. – 2012. – С. 41–44.*
4. *Sferruzza, J.P. Generation of Very High Pressure Pulses at the Surface of a Sandwiched Piezoelectric Material/ J. P. Sferruzza, A. Birer, D. Calhignol // Ultrasonics. – 2000. – № 38. – P. 965–968.*
5. *Dubus, B. Characterization of Multilayered Piezoelectric Ceramics for High Power Transducers/ B. Dubus, G. Haw, C. Granger, O. Lecléz // Ultrasonics. – 2002. – № 40. – P. 903–906.*
6. *Shuyu, L. Load Characteristics of High Power Sandwich Piezoelectric Ultrasonic Transducers / L. Shuyu // Ultrasonics. – 2005. – № 43. – P. 365–373.*
7. *Chang, K.-T. Improving the Transient Response of a Boltclamped Langevin Transducer Using a Parallel Resistor / K.-T. Chang // Ultrasonics. – 2003. – № 41. – P. 427–436.*
8. *Saitoh, S.A Dual Frequency Ultrasonic Probe for Medical Application / S. Saitoh, M. Izumi, Y.A. Mine // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Cont. – 1995. – Vol. 42. – № 2. – P. 294–300.*
9. *Chang, J.H. Frequency Compounded Imaging with a High-Frequency Dual Element Transducer / J.H. Chang, H.H. Kim, J. Lee, K.K. Sluving // Ultrasonics. – 2010. – № 50. – P. 453–457.*
10. *Казаков, В.В. Исследование характеристик двухэлементных ультразвуковых преобразователей в режиме излучения длинных импульсов/ В. В. Казаков, А. Г. Санин // Акустический журнал. – Т. 63. – № 1. – 2017. – С. 104–113.*
11. *Эскин, Г.И. Ультразвуковая обработка расплавленного алюминия / Г.И. Эскин – М.: Металлургия, 1965. – 224 с.*
12. *Биушкин, В.А. Способ настройки газовой виброопоры с пьезокерамическим вибратором / В.А. Биушкин, С.Г. Некрасов // А.С. №830034 от 15.05.1981.*
13. *Ультразвуковые преобразователи / Е. Кукучи. – М.: Мир, 1972. – 424 с.*

14. Огибалов, Л.М. *Оболочки и пластины* / Л.М. Огибалов, М.А. Колтунов. – М.: МГУ, 1969. – 695 с.
15. Wang, C.M. *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions* / C.M. Wang, K.H. Reddy, J.Lee. – Boston: Elsevier Science, 2000. – 372 p.
16. Бутковский, А.Г. *Структурная теория распределенных систем* / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1977. – 348 с.
17. Сорокин, Е.С. *К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях* / Е.С. Сорокин – М.: Гос. изд. лит. по стрит, и арх., 1954. – 73 с.
18. Писаренко, Г.С. *Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях* / Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1975. – 240 с.
19. Colombeau, J.F. *Nonlinear Generalized Functions: their origin, some developments and recent advances* / J.F. Colombeau // *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*. – 2013. – Vol. 7. – № 2. – P. 201–239.
20. Жигалко, Ю.П. *Пологие сферические оболочки под действием сосредоточенных сил* / Ю.П. Жигалко // *Исслед. по теор. пластин и оболочек: Сб. трудов Казанского ун-та*. – 1976. – № 12. – С. 58–67

**Некрасов Сергей Геннадьевич**, доктор технических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, nekrasovsg@susu.ru

**Перминов Сергей Васильевич**, главный инженер АО «Медприбор», г. Челябинск, info@medpribor.net

Поступила в редакцию 8 октября 2021 г.

DOI: 10.14529/engin210402

## VIBRATOR MODEL FOR DESIGN OF VIBRATION MACHINES

**S.G. Nekrasov**<sup>1</sup>, nekrasovsg@susu.ru,

**S.V. Perminov**<sup>2</sup>, info@medpribor.net

<sup>1</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup>Medpribor, JSC, Chelyabinsk, Russian Federation

One of the directions of development of mechanical engineering is the design and production of vibratory machines for compacting bulk media, ranging from low-frequency road vibratory rollers and vibratory plates for road ramming and asphalt paving and ending with foundries and high-frequency compactors for creating new materials. An actual problem in the design of this type of vibrating machine is the choice of vibration parameters of the working tool, the values of which should depend on the parameters of the material being processed, and, as a consequence, the choice of a device that meets these requirements. There are no universal devices on the market, however it is possible to create a universal model and design suitable for designing vibratory machines for various purposes.

The paper considers a model of a universal vibrator, the operating principle of which is based on bending transverse vibrations of plates. Unlike half-wave rod-type transducers, this design, with the same overall dimensions and power consumption, has a large dynamic range of oscillations of the working tool in a wide frequency range, the shape of the working surface of which can be set arbitrarily. The design and structure can be changed within the basic set of elements by choosing, for example, the zero values of the corresponding parameters.

A distributed model is obtained based on the equations of mathematical physics, which is reduced to an integral form by determining the impulse response (Green's function) of a round plate and then the entire sensor. A parametric study is carried out, the possibility of changing the frequency response of the vibrator is shown. The developed mathematical model is applicable for both low-frequency and high-frequency applications, since it is linear and performed using dimensionless complexes of the similarity theory. The model considers the elastic hysteresis of structural elements, thereby providing reliable values of the amplitude of the resonant vibrations

of the working tool. The validation of the model has shown a high accuracy in determining the resonant frequencies.

*Keywords: vibrator, material compaction, design, mathematical model, structure, natural frequency, elastic hysteresis, amplitude.*

### References

1. Roco M.C., Williams R.S., Alivisatos P. Nanotechnology Research Directions: Vision for Nanotechnology in the Next Decade. London, Kluwer Academic Publishers, 2002. 292 p.
2. Polissadova V.V. *Ul'trazvukovoe i kollektornoe kompaktirovanie. Lektsii*. [Ultrasonic and collector compacting. Lectures]. Tomskiy politekhnicheskii universitet, 2009. 44 p.
3. Korobov A.I., Shirgina N.V., Kokshayskiy A.I. *Osobennosti rasprostraneniya uprugikh voln v 3-d granulirovannoy nekonsolidirovannoy srede* [Features of elastic wave propagation in 3-d granular unconsolidated medium]. Trudy shkoly-seminara "Volny-2012" (seksiya 8). Moscow, MGU, 2012, pp. 41-44.
4. Sferruzza J.P., Birer A., Calhignol D. Generation of Very High Pressure Pulses at the Surface of a Sandwiched Piezoelectric Material. *Ultrasonics*, 2000, no. 38, pp. 965-968.
5. Dubus B., Haw G., Granger C., Leclez O. Characterization of Multilayered Piezoelectric Ceramics for High Power Transducers. *Ultrasonics*, 2002, no. 40, pp. 903-906.
6. Shuyu L. Load Characteristics of High Power Sandwich Piezoelectric Ultrasonic Transducers. *Ultrasonics*, 2005, no. 43, pp. 365-373.
7. Chang K.-T. Improving the Transient Response of a Boltclamped Langevin Transducer Using a Parallel Resistor. *Ultrasonics*, 2003, no. 41, pp. 427-436.
8. Saitoh S., Izumi M., Mine Y.A. Dual Frequency Ultrasonic Probe for Medical Application. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Cont.*, 1995, vol. 42, no. 2, pp. 294-300.
9. Chang J.H., Kim H.H., Lee J., Sluing K.K. Frequency Compounded Imaging with a High-Frequency Dual Element Transducer. *Ultrasonics*, 2010, no. 50, pp. 453-457.
10. Kazakov V.V., Sanin A.G. *Issledovanie kharakteristik dvukhelementnykh ul'trazvukovykh preobrazovateley v rezhime izlucheniya dlinnykh impul'sov* [Investigation of Characteristics of Two-Element Ultrasonic Transducers in the Mode of Radiation of Long Pulses]. *Acoustic Journal*, 2017, vol. 63, no. 1, pp. 104-113.
11. Eskin G.I. *Ul'trazvukovaya obrabotka rasplavlennoy alyuminiya* [Ultrasonic treatment of molten aluminium]. Moscow, Metallurgiya, 1965. 224 p.
12. Biushkin, V.A., Nekrasov, S.G. *Sposob nastroyki gazovoy vibroopory s p'ezokeramicheskim vibratorom* [The way to adjustment of gas vibration support with piezoceramic vibrator]. Copyright Certificate SU, no. 830034, 1981.
13. *Ultrasonic Transducers*. Ed. by E. Kikuchi. Tokyo, Corona Publishing Company, 1969. 472 p.
14. Ogibalov, L.M., Koltunov M.A. *Obolochki i plastiny* [Shells and plates]. Moscow, MGU Publ., 1969. 695 p.
15. Wang, C.M., Wang, J.N., Reddy, K.H. Lee, J. *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*. Boston, Elsevier Science, 2000. 372 p.
16. Butkovskiy, A.G. *Strukturnaya teoriya raspredelennykh system* [Structural theory of distributed systems]. Moscow, Nauka, 1977. 348 p.
17. Sorokin E.S. *K voprosu neuprugogo soprotivleniya stroitel'nykh materialov pri kolebaniyakh* [To the issue of inelastic resistance of building materials in case of fluctuations]. Moscow, Gos. izd. lit. po stroit. i arkh., 1954. 73 p.
18. Pisarenko, G.S. *Obobshchennaya nelineynaya model' ucheta rasseyaniya energii pri kolebaniyakh* [Generalized nonlinear model for accounting for energy dissipation during oscillations]. Kiev, Naukova dumka, 1975. 240 p.
19. Colombeau J.F. Nonlinear Generalized Functions: their origin, some developments and recent advances. *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 7, no. 2, pp. 201-239.
20. Zhigalko, Yu.P. *Pologie sfericheskie obolochki pod deystviem sosredotochennykh sil* [Gentle spherical shells under the action of concentrated forces]. *Issled. po teor. plastin i obolochek: Sb. trudov*

---

*Kazanskogo un-ta* [Studies on the theory of plates and shells: Collection of works of Kazan University].  
Kazan, Kazan University Publ., 1976, no. 12, pp. 58–67.

*Received 8 October 2021*

---

**ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ**

Некрасов, С.Г. Модель вибратора для проектирования вибромашин / С.Г. Некрасов, С.В. Перминов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2021. – Т. 21, № 4. – С. 15–25. DOI: 10.14529/engin210402

**FOR CITATION**

Nekrasov S.G., Perminov S.V., Vibrator Model for Design of Vibration Machines. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 15–25. (in Russ.). DOI: 10.14529/engin210402