

# ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ЗУБЧАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ: ГЛУБИННАЯ КОНТАКТНАЯ ВЫНОСЛИВОСТЬ

**С.Ю. Лебедев, В.Н. Сызранцев**

*Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, Россия*

Надежность технической системы обуславливается сохраняемостью, ремонтпригодностью, долговечностью и безотказностью. Вероятность безотказной работы как количественная оценка безотказности является важным параметром надежности зубчатых передач. Расчет вероятности безотказной работы ведется по различным критериям – возможным видам отказа передачи. У поверхностно-упрочненных зубчатых цилиндрических передач такими отказами являются: поломка зубьев (критерий изгибной выносливости), выкрашивание рабочих поверхностей зуба (критерий контактной выносливости), глубинное выкрашивание рабочих поверхностей зуба (критерий глубинной контактной выносливости). Цель статьи – разработать методику расчета вероятности безотказной работы поверхностно-упрочненных зубчатых цилиндрических передач по критерию глубинной контактной выносливости. Объект исследования – поверхностно-упрочненные цилиндрические прямозубые и косозубые передачи. В статье выполнен анализ существующих методик оценки надежности зубчатых цилиндрических передач по критерию глубинной контактной выносливости. Разработан алгоритм и представлены расчетные формулы для определения вероятности безотказной работы зубчатой цилиндрической передачи по критерию глубинной контактной выносливости. Для определения действующих напряжений внутри тела зуба используются формулы, основанные на обобщенном критерии предельного состояния Лебедева-Писаренко для структурно неоднородного материала. Для определения функции плотности распределения контактных напряжений в методике реализованы инструменты непараметрической статистики. Реализация разработанной методики и сравнение результатов расчета со значениями вероятности безотказной работы рассчитываемой передачи по критериям контактной и изгибной выносливости показало, что при увеличении максимального крутящего момента лимитирующим критерием безотказности передачи становится глубинная контактная выносливость. Разработанная методика может служить частью методологии проверочного расчета зубчатых цилиндрических передач, основанной на численных методах моделирования.

Ключевые слова: вероятность безотказной работы, глубинная контактная выносливость, зубчатая цилиндрическая передача

## Введение

Безотказность является составным критерием оценки надежности зубчатых передач. Безотказность зубчатой передачи подразумевает способность непрерывно сохранять свою работоспособность за установленный срок службы. Для количественного определения безотказности передач выполняется расчет вероятности безотказной работы, основанный на вероятностно-статистических методах. Ввиду того, что существуют различные виды отказов зубчатых передач, вероятность безотказной работы можно определить по различным критериям. К отказам зубчатых передач и критериям безотказной работы относятся: поломка зубьев – изгибная выносливость; выкрашивание рабочих поверхностей зуба – контактная выносливость; глубинное выкрашивание рабочих поверхностей зуба – глубинная контактная выносливость; абразивный износ – износостойкость; заедание – противозадирная стойкость.

Первые три критерия являются наиболее важными критериями безотказной работы поверхностно-упрочненных зубчатых передач. Расчет вероятности безотказной работы по критерию изгибной и контактной выносливости разработан с достаточной глубиной и при корректном определении погрешности взаимного положения зубьев позволяет получить расчетные данные, согласующиеся с экспериментальными данными [1].

Глубинная контактная выносливость – это способность материала зуба сопротивляться циклическим напряжениям (глубинным контактными напряжениями) внутри зуба. Напряжения внутри

зуба являются следствием напряжения на площадке контакта, сил трения между зубьями и остаточных напряжений в теле зуба. Расчет глубинных контактных напряжений у инженеров и исследователей строится на положениях теории сопротивления материала.

В основе методики расчета на предотвращение глубинного контактного разрушения, представленной в ГОСТ 21354-87 [2], лежит гипотеза Геста–Мора: определение касательных напряжений с учетом положительного влияния нормальных напряжений. Гипотеза также используется в методиках расчета на определение минимального коэффициента запаса прочности по глубине упрочненного слоя зуба в [1, 3, 4].

Влияние остаточных напряжений в упрочненном слое зуба учитывается в [5]. Методика использует подход, предложенный Финдли [6], суть которого заключается в том, что существует плоскость в теле зуба, на которой при максимальном нормальном напряжении амплитуда касательных напряжений максимальна. В этой критической плоскости определяется эффективное напряжение. В расчетах используется параметр материала зуба, который именуется критерием Финдли. Критерий в [7–9] имеет другие расчетные формулы и носит наименования: критерий Данг Вана или критерий Матаке. В основном расчет сводится к определению точки по глубине упрочненного слоя зуба с минимальным коэффициентом запаса прочности [10], с последующим определением в этой точке усталостного ресурса передачи [11].

В [12] расчет действующих эффективных напряжений по глубине упрочненного слоя основан на обобщенном критерии предельного состояния Лебедева–Писаренко [13] для структурно неоднородного материала.

В исследовании [14] распределение напряжений и зоны пластической деформации оценивались с помощью упругопластической модели для пластически градиентных материалов. Модель подробно описана в [15]. Эквивалентная пластическая деформация при расчете определяется по Мизесу путем численного моделирования (методом конечных элементов) напряжений по глубине упрочненного слоя.

Также существуют методики [16, 17], определяющие лишь глубину опасной зоны, соответствующей максимальному значению отношению эквивалентных напряжений (по принятому критерию) к твердости по Виккерсу, при этом не пытаюсь определить какие-либо качественные значения (коэффициент запаса прочности, ресурс передачи и др.).

В рассмотренных выше методиках расчета, а также [18–20] не было обнаружено создания методики расчета вероятности безотказной работы по критерию глубинной контактной выносливости.

Цель статьи – разработать методику расчета вероятности безотказной работы поверхностно-упрочненных зубчатых цилиндрических передач по критерию глубинной контактной выносливости.

### Методика расчета вероятности безотказной работы по критерию глубинной контактной выносливости

В общем виде вероятность безотказной работы зубчатых передач, при известных функциях плотности распределения фактических напряжений и допускаемых, сводится к определению интеграла:

$$P = 1 - \int_0^{\sigma_m} \left[ \int_0^{\sigma_m} P_{\sigma}(\sigma + \sigma_{lim}) \cdot P_{\sigma_{lim}}(\sigma_{lim}) d\sigma_{lim} \right] d\sigma, \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $\sigma_{lim}$  – фактические и допускаемые напряжения;  $\sigma_m$  – максимальное допускаемое напряжение;  $P_{\sigma}$ ,  $P_{\sigma_{lim}}$  – функции плотности фактических и допускаемых напряжений.

Для определения фактических и допускаемых напряжений используем расчетные формулы из методики [21], основанной на критерии предельного состояния Лебедева–Писаренко. Выбор формул основан на проведенном анализе и валидации существующих методик расчета глубинной контактной выносливости цилиндрических передач [22].

Действующее эффективное напряжение  $\sigma$  рассчитывается по формуле, МПа:

$$\sigma = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 A \left| 1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i} \right|, \quad (2)$$

## Расчет и конструирование

где  $\chi$  – параметр пластичности материала;  $\sigma_i$  – интенсивность октаэдрических напряжений, МПа;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения, МПа;  $A$  – статистический параметр дефектности для закаленных сталей  $A = 0,7 \div 0,8$ .

Пластичность материала  $\chi$  имеет функциональную зависимость от твердости материала и вида ХТО:  
– цементация

$$\chi = -0,89H_{HV} \cdot 10^{-3} + 1,356, \quad \chi_{min} = 0,6, \quad (3)$$

– нитроцементация

$$\chi = -0,71H_{HV} \cdot 10^{-3} + 1,284, \quad \chi_{min} = 0,68, \quad (4)$$

где  $H_{HV}$  – твердость стали по Виккерсу (при  $H_{HV} \leq 400$   $\chi = 1$ ).

Напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  определяются через компоненты  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  контактного напряжения  $\sigma_H$ , связанные кубическим уравнением:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (5)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – коэффициенты уравнения, рассчитываемые по формулам:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (6)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \quad (7)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \quad (8)$$

Индексация главных напряжений – корней уравнения (5) – определяется через условие:  
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Компоненты  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  контактного напряжения  $\sigma_H$  для случая первоначального контакта двух цилиндров по линии рассчитываются по формулам [23]:

$$\sigma_x = -\sigma_H 2v \frac{z}{b} \left( \sqrt{\frac{b^2+u}{u}} - 1 \right), \quad (9)$$

$$\sigma_y = -\sigma_H \frac{z}{b} \left( \sqrt{\frac{b^2+u}{u}} \left[ 2 - \frac{b^2 z^2}{u^2 + b^2 z^2} \right] - 2 \right), \quad (10)$$

$$\sigma_z = -\sigma_H \frac{bz^3}{u^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{b^2+u}{u}}, \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = -\sigma_H \frac{byz^2}{u^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{u}{b^2+u}}, \quad (12)$$

где  $y, z$  – координаты точки на площадке касания (рис. 1), мм;  $b$  – полуширина эллиптической площадки касания (см. рис. 1), мм;  $v$  – коэффициент Пуассона;  $u$  – корень уравнения  $\frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{u} =$

1. Напряжения  $\tau_{xy}, \tau_{zx}$  принимаются равными нулю.

Интенсивность октаэдрических напряжений определяются по формуле, МПа:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (13)$$

Допускаемые эффективные напряжения определяются по формуле, МПа:

$$\sigma_{lim} = \chi(\chi - 0,11128)H_{HV}Z_{LK} \prod_{i=1}^4 K_i, \quad (14)$$

где  $Z_{LK}$  – коэффициент долговечности;  $K_1$  – коэффициент, зависящий от характера контактирования (для линейного контакта  $K_1 = 2,05 \div 2,15$ );  $K_2$  – коэффициент, зависящий от числа «зон риска» в пределах упрочненного слоя (при наличии одной зоны  $K_2 = 1$ , двух зон –  $K_2 = 0,90 \div 0,95$ );  $K_3$  – коэффициент, учитывающий влияние внешней касательной нагрузки;  $K_4$  – коэффициент, учитывающий качество материала и ХТО (для углеродистых и низколегированных сталей, не содержащих никеля  $K_4 = 0,90 \div 0,95$ , для легированных сталей с содержанием никеля до 1 %  $K_4 = 0,95 \div 1,05$ , для никельсодержащих сталей  $K_4 = 1,05 \div 1,10$ ).

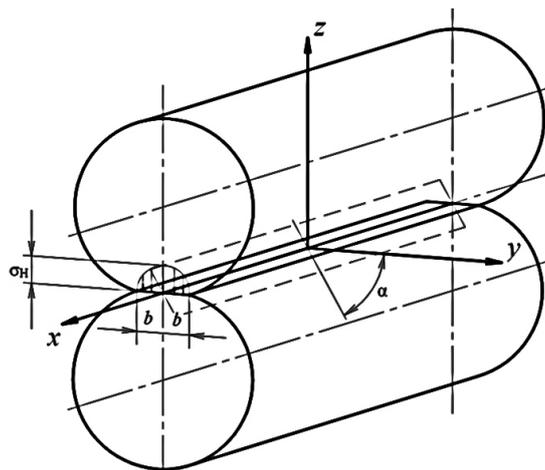


Рис. 1. Расчетная схема контактных напряжений двух параллельных цилиндров

Коэффициент долговечности  $Z_{LK}$  вычисляется по формуле:

$$Z_{LK} = \sqrt[20]{\frac{10^7}{N_{EK}}}, \tag{15}$$

где  $N_{EK}$  – эквивалентное число циклов перемены напряжений.

Коэффициент  $K_3$  имеет функциональную зависимость координаты  $z$ :

$$K_3 = \frac{1}{1 + \left[ (1 + 60 C_{\alpha\beta}^{0,25} f^2)^{0,5} - 1 \right] (1 + z^0)^{-3,5}}, \tag{16}$$

где  $C_{\alpha\beta}$  – отношение профильного радиуса к продольному,  $C_{\alpha\beta} = 0$  (линейный контакт);  $f$  – коэффициент трения;  $z^0$  – относительная координата  $z$  ( $z^0 = z/b$ ).

При выполнении расчетов на сопротивление глубинной контактной усталости используется функция распределения твердости по глубине упрочненного слоя. Существует множество различных функций распределения твердости [24–26], используемых инженерами и исследователями, при расчетах зубчатых передач. Авторами данной статьи была оценена точность существующих функций распределения твердости по глубине упрочненного слоя рабочих поверхностей зубчатых передач на основе известных экспериментальных данных. В результате оценки точности были выбраны следующие уравнения, используемые в описываемой методике:

– при цементации

$$HV(z) = H_0 g(z) + H_c (1 - g(z)), \tag{17}$$

где

$$g(z) = 1 - 3 \left( \frac{z}{\delta_c} \right)^2 + 2 \left( \frac{z}{\delta_c} \right)^3; \tag{18}$$

– при нитроцементации

$$\left\{ \begin{array}{l} HV(z) = \frac{(H_{max} - H_0)(\delta_c - z)}{\delta_c - 0,05} + \\ + H_0 \quad \text{при } 0 < z \leq z_{max} \\ HV(z) = (H_c - H_0) \left[ \frac{z - z_{max}}{\delta_c} \exp \left( 1 - \frac{z - z_{max}}{\delta_c} \right) \right]^B + \\ + H_0 \quad \text{при } z_{max} < z \leq \delta_c \end{array} \right. \tag{19}$$

где

$$B = \ln \left( \frac{H_{eff} - H_0}{H_c - H_0} \right) \left[ \ln \left( \frac{z_{eff}}{\delta_c} \exp \frac{\delta_c - z_{eff}}{\delta_c} \right) \right]^{-1}. \tag{20}$$

В (17)–(20) приняты следующие обозначения:  $H_0$  – твердость поверхности зуба;  $H_{max}$  – максимальная твердость упрочненного слоя;  $H_{eff}$  – эффективная твердость упрочненного слоя;  $H_c$  – твердость сердцевины;  $z_{max}$  – глубина максимальной твердости упрочненного слоя;  $z_{eff}$  – эффективная толщина упрочненного слоя;  $\delta_c$  – толщина упрочненного слоя (расстояние от поверхности до сердцевины).

## Расчет и конструирование

Для расчета вероятности безотказной работы по критерию контактной или изгибной прочности функция фактических напряжений будет зависеть только от переменной величины крутящего момента. Однако в случае расчета глубинной контактной выносливости фактические напряжения зависят от контактных напряжений  $\sigma_H$  и изменяются по глубине упрочненного слоя. При этом с изменением контактных напряжений  $\sigma_H$  меняется и координата минимального коэффициента запаса прочности  $SH = \sigma_{lim}/\sigma$ , так как компоненты объемного напряженного состояния внутри тела зуба зависят от величины площадки контакта (9)–(12), размер которой коррелирует с контактными напряжениями  $\sigma_H$ . Предел выносливости также будет изменяться по глубине упрочненного слоя из-за изменения его твердости. На рис. 2 представлен график изменения координаты расположения точки  $z_{SHmin}$  с минимальным коэффициентом запаса прочности  $SH$  в зависимости от изменения контактных напряжений  $\sigma_H$ .

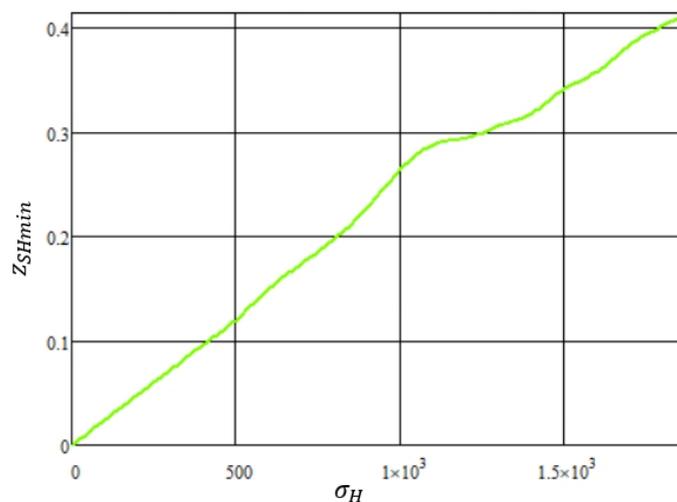


Рис. 2. График изменения координаты расположения точки  $z_{SHmin}$  с минимальным коэффициентом запаса прочности в зависимости от изменения контактных напряжений  $\sigma_H$

В результате для создания методики расчета вероятности безотказной работы зубчатых передач по критерию глубинной контактной выносливости был взят за основу подход, предложенный в [27], для расчета вероятности безотказной работы корпуса трубопроводной арматуры по критерию прочности. Суть подхода в том, что с помощью численного моделирования определяется набор опасных (по критерию прочности) точек корпуса, далее для каждой точки получают функцию напряжений и рассчитывают вероятность безотказной работы. Вероятность безотказной работы корпуса оценивается точкой с минимальным значением.

Стоит отметить, что есть и другой вариант решения поставленной задачи: нужно решить задачу оптимизации для функции двух переменных  $SH(z, \sigma_H) \rightarrow \min$ , используя методы нелинейного программирования. Затем рассчитать вероятность безотказной работы для  $z_{SHmin}$ , полученного на предыдущем этапе. Это вариант расчета был отклонен по причине того, что велика вероятность возникновения овражных, седловых зон на функции  $SH(z, \sigma_H)$ , потребуется постоянный контроль при расчетах (вывод отображения функции  $SH(z, \sigma_H)$ ) и применение громоздких алгоритмов при реализации методов оптимизации.

На рис. 3 представлен алгоритм расчета для определения вероятности безотказной работы по критерию глубинной контактной выносливости.

Основные блоки алгоритма на рис. 3 пронумерованы. Остановимся подробнее на каждом из них.

Блок 1 (см. рис. 3) предназначен для ввода исходных данных. Выборка контактных напряжений, необходимая в исходных данных, либо передается из расчета вероятности безотказной работы по критерию контактной выносливости, либо генерируется датчиком случайных чисел с указанием типа функции плотности распределения контактных напряжений и ее параметров. Также в исходных данных необходимо указать параметры поверхностного упрочнения зубьев, модуль упругости, коэффициент Пуассона и приведенный радиус кривизны в полюсе зацепления.

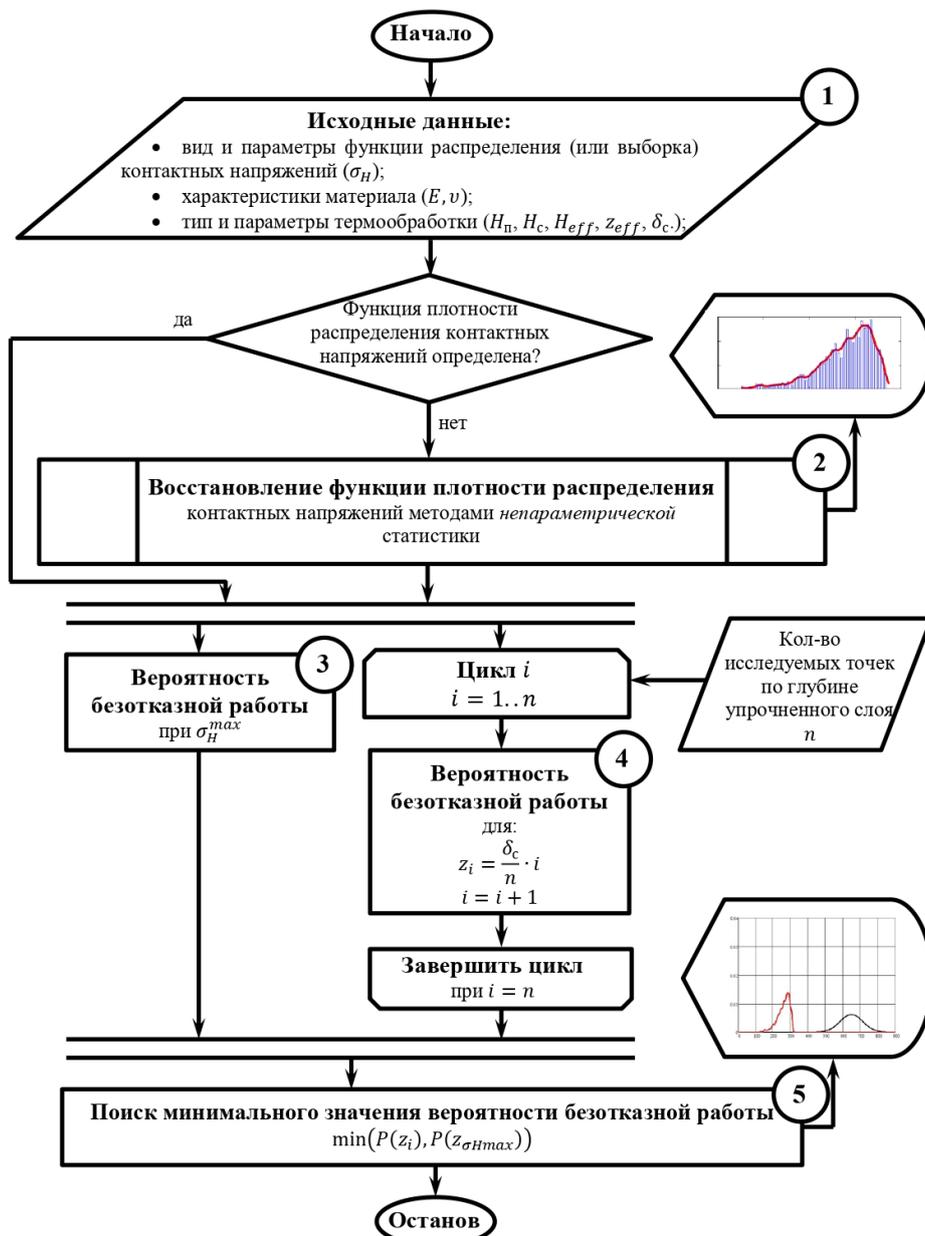


Рис. 3. Алгоритм расчета для определения вероятности безотказной работы по критерию глубинной контактной выносливости

На основе полученной выборки контактных напряжений в блоке 2 (см. рис. 3) нужно определить закон распределения контактных напряжений, используя методы непараметрической статистики [28]. Блок 2 представляет собой отдельную программу, если функция плотности распределения известна, то блок 2 пропускается в расчете.

Блоки 3 и 4 выполняют расчеты параллельно, используя формулы (1)–(20). Блок 3 рассчитывает вероятность безотказной работы при максимальном значении контактного напряжения из полученной выборки, при этом координату  $z_{SHmin}$  для расчета определяют как координату, для которой функция коэффициента запаса прочности  $SH(z) \rightarrow min$ . В блоке 4 выполняется расчет вероятности безотказной работы для всех координат  $z_i$  ( $i = 1..n$ ), равномерно распределенных по глубине упрочненного слоя, количество  $n$  которых задается пользователем. Разброс значений (коэффициент вариации) допускаемого глубинного напряжения на глубине меньше эффективной толщины упрочненного слоя принимается равным 5 %, на большей – 10 % [12].

В блоке 5 (см. рис. 3) определяется минимальное значение вероятности безотказной работы, из полученных в блоках 3 и 4 и выводится график плотностей распределения фактических и допускаемых контактных напряжений.

## Расчет и конструирование

### Результаты расчетов

Используя представленный алгоритм, выполним расчет вероятности безотказной работы для зубчатой цилиндрической передачи, параметры которой представлены в таблице.

Таблица

Параметры зубчатой передачи

Параметр	Значение
Модуль, мм	10,5
Число зубьев: – шестерни – колеса	12 53
Приведенный радиус кривизны в полюсе зацепления, мм	94,605
Угол наклона зубьев, град	0
Эквивалентное число циклов нагружения	$1,13238 \cdot 10^8$
Материал	12ХН3А
Поверхностное упрочнение	цементация
Твердость поверхности зуба, HV	600
Твердость сердцевины, HV	320
Эффективная твердость, HV	550
Общая толщина упрочненного слоя, мм	2
Эффективная толщина упрочненного слоя (по ГОСТ 21354-87), мм	1,007
Модуль упругости, МПа	$2,15 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона	0,3

Выборка контактных напряжений (рис. 4) получена в результате расчета контактной выносливости по методике [29]. Напряжения получены для выборки крутящего момента при номинальном значении  $5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и функции плотности  $\beta$ -распределения ( $a = 6$ ,  $b = 2$ ), что соответствует тяжелому режиму работы зубчатой передачи [29].

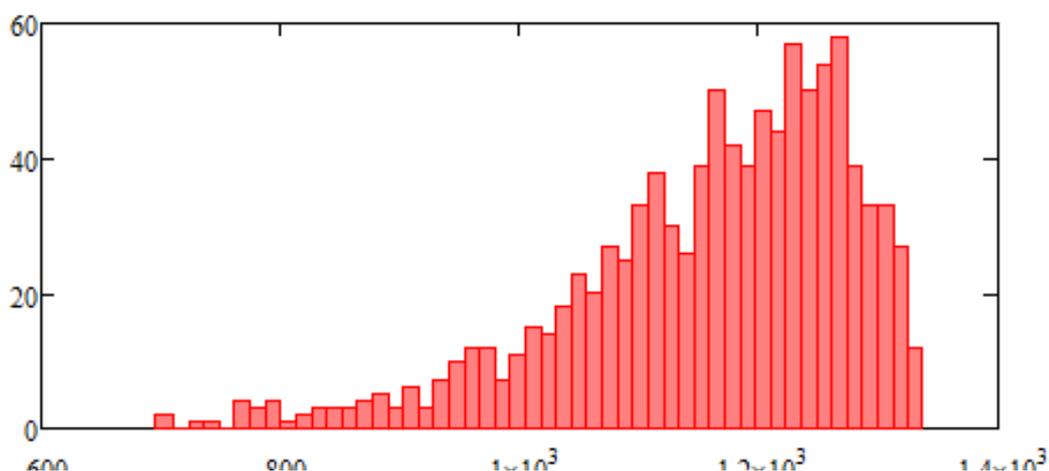


Рис. 4. Выборка контактных напряжений

На рис. 5 представлены результаты вычислений вероятности безотказной работы для заданных координат  $z$ .

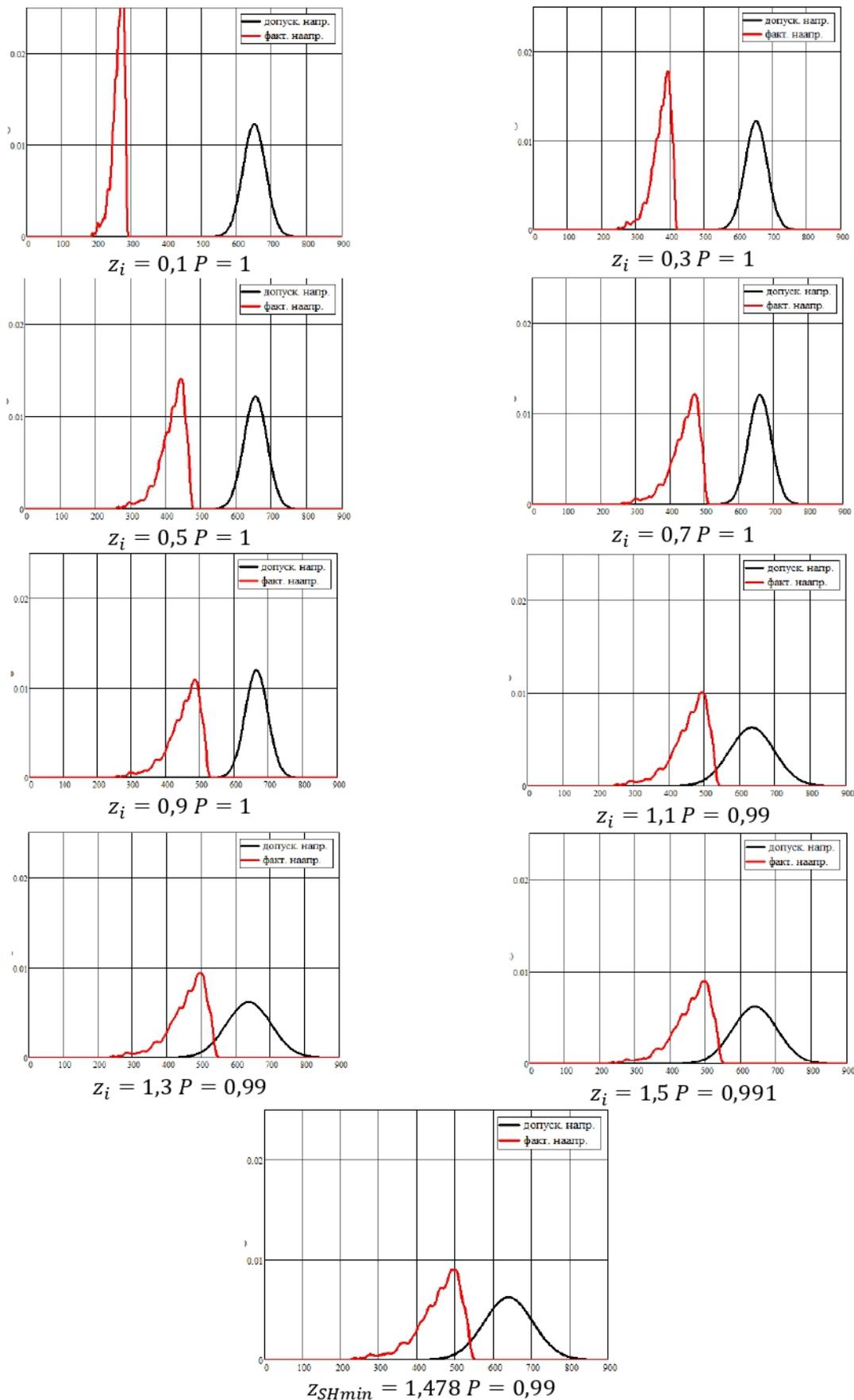


Рис. 5. Результаты вычислений вероятности безотказной работы по критерию глубинной контактной выносливости

## Расчет и конструирование

В результате расчета вероятность безотказной работы по критерию глубинной контактной выносливости принимается  $P = 0,99$ .

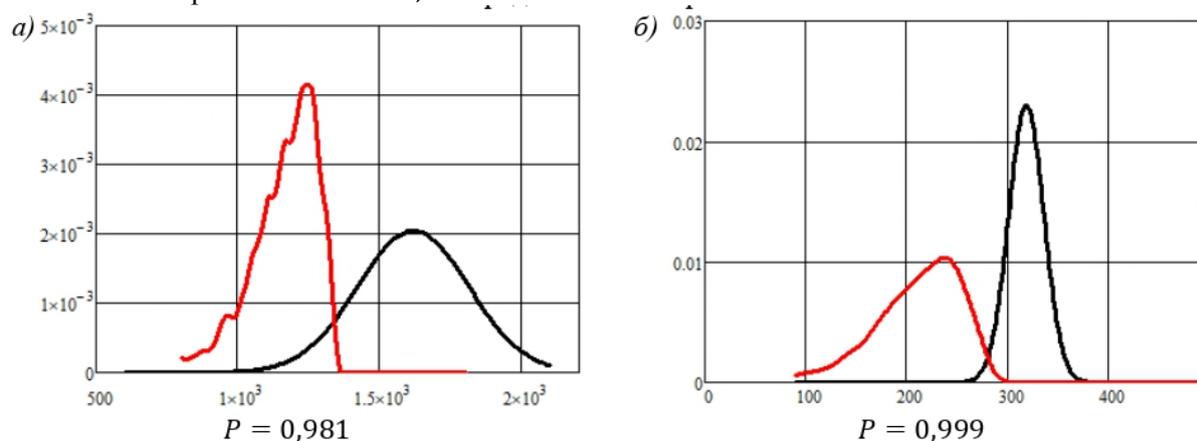


Рис. 6. Вероятность безотказной работы зубчатой передачи при  $5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  по критерию: а) контактной выносливости; б) изгибной выносливости

Сравним вероятность безотказной работы по всем трем критериям (рис. 6), можно заключить, что лимитирующим фактором работоспособности передачи является контактная выносливость. Однако при увеличении номинального крутящего момента до  $6 \text{ кН} \cdot \text{м}$  характер влияния критериев на работоспособность зубчатой передачи изменяется (рис. 7).

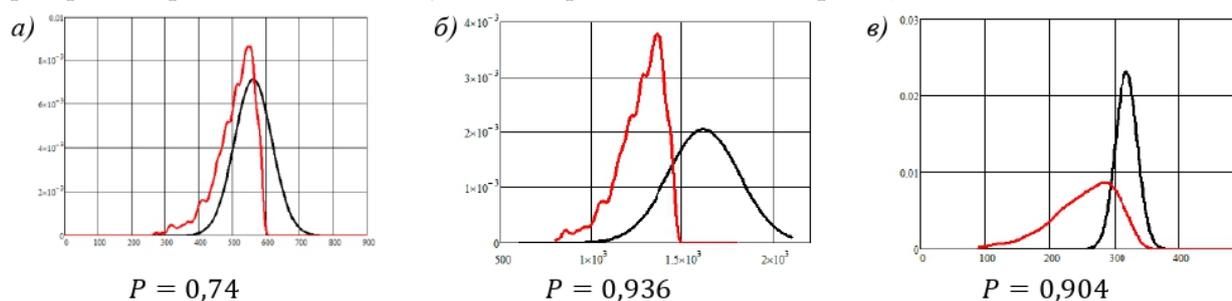


Рис. 7. Вероятность безотказной работы зубчатой передачи при  $5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  по критерию: а) глубинной контактной выносливости; б) контактной выносливости; в) изгибной выносливости

С увеличением крутящего момента вероятность безотказной работы по критерию контактной выносливости показало наименьшее снижение, по критерию изгибной выносливости значение снизилось до удовлетворительного. Вероятность безотказной работы по глубинной контактной выносливости стала значительно ниже, что делает ее лимитирующим фактором работоспособности для рассчитываемой зубчатой передачи.

### Выводы

1. Разработана методика расчета вероятности безотказной работы зубчатой цилиндрической передачи по критерию глубинной контактной выносливости с применением методов непараметрической статистики.

2. На основе разработанной методики был выполнен расчет вероятности безотказной работы зубчатой цилиндрической передачи при номинальных крутящих моментах в  $5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и  $6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

3. Сравнение результатов расчета со значениями вероятности безотказной работы рассчитываемой передачи по критериям контактной и изгибной выносливости показало, что при увеличении крутящего момента лимитирующим фактором работоспособности передачи становится глубинная контактная выносливость.

4. Разработанная методика может служить частью методологии проверочного расчета зубчатых цилиндрических передач численными методами моделирования (метод Монте-Карло).

5. Взаимосвязь значений вероятности безотказной работы по различным критериям, а также основные факторы влияния на их значение, требует дальнейшего исследования.

## Литература

1. Голофаст, С.Л. Диагностика работоспособности передач Новикова датчиками деформаций интегрального типа: монография / С.Л. Голофаст. – Новосибирск: Наука, 2004. – 163 с.
2. ГОСТ 21354-87 Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные. Расчет на прочность. – М.: Изд-во стандартов, 1988. – 125 с.
3. Дрозд, М.С. Глубинные контактные разрушения зубьев цементованных шестерен / М.С. Дрозд, Е.И. Тескер, М.А. Шаров // Вестник машиностроения. – 1974. – №10. – С. 21–25.
4. Руденко, С.П. Особенности расчета зубчатых колёс трансмиссий на глубинную контактную выносливость / С.П. Руденко, А.Л. Валько // Вестник машиностроения. – 2015. – № 11. – С. 5–11.
5. MackAldener, M. Tooth Interior Fatigue Fracture – computational and material aspects / M. MackAldener, M. Olsson // International Journal of Fatigue 23. – 2001. – P. 329–340.
6. Findley, W.N. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending / W.N. Findley // Engineering for Industry. – 1959.
7. Dang Van, K. On a new multiaxial fatigue limit criterion: Theory and application / K. Dang Van, B. Griveau, O. Message // Biaxial and Multiaxial Fatigue, EGF 3. University of Sheffield: London, UK. – 1989. – P. 459–478.
8. Snidle, R.W. Comparison of fatigue model results for rough surface elasto-hydrodynamic lubrication / R.W. Snidle, H.P. Evans, H. Qiao // Proc. Inst. Mech. Eng. Part J. Eng. Tribol. – 2008. – № 222. – P. 381–393.
9. Karolczuk, A. A Review of Critical Plane Orientations in Multiaxial Fatigue Failure Criteria of Metallic Materials / A. Karolczuk, E. Macha // Int. J. Fract. 2005. – №134. – P. 267–304.
10. Wang, W. Evaluation of contact fatigue risk of a carburized gear considering gradients of mechanical properties / W. Wang, H. Liu, C. Zhu et al. // Friction 8(6). – 2020. – P. 1039–1050. <https://doi.org/10.1007/s40544-019-0317-z>
11. Bai, H. Study on Tooth Interior Fatigue Fracture Failure of Wind Turbine Gears / H. Bai, C. Zhu, Y. Zhou et al. // Metals. – 2020. – № 10 (1497). – P. 1–18. doi:10.3390/met10111497
12. Короткин, В.И. К оценке глубинной контактной выносливости эвольвентных зубчатых передач с поверхностно упрочненными зубьями / В.И. Короткин, Н.П. Онишков // Вестник машиностроения. – 2008. – № 5. – С. 9–14.
13. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Академия наук Украинской ССР: институт проблем прочности / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев: Наукова думка, 1976. – 415 с.
14. Xie, L. Effect of Surface Hardening Technique and Case Depth on Rolling Contact Fatigue Behavior of Alloy Steels / L. Xie, D. Palmer, F. Otto et al. // Tribology Transactions. – 2015. – № 58. – С. 215–224.
15. Wang, Z. An Efficient Numerical Method with a Parallel Computational Strategy for Solving Arbitrarily Shaped Inclusions in Elasto-Plastic Contact Problems / Z.J. Wang, X.Q. Jin, Q.H. Zhou et al. // Journal of Tribology. – 2013. – № 135 (3). – P. 031–401.
16. Фудзита, К. Влияние глубины цементованного слоя и относительного радиуса кривизны на долговечность при контактной усталости цементованного ролика из хромомолибденовой стали / К. Фудзита, А. Иосида // Конструирование и технология машиностроения. – 1981. – № 2. – С. 115–124.
17. Xiao-gang, L. Initiation and propagation of case crushing cracks in rolling contact fatigue / L. Xiao-gang, G. Qing, S. Eryu // Wear. – 1988. – № 1. – P. 33–43.
18. Boiadjiev, I. Tooth flank fracture—basic principles and calculation model for a sub-surface-initiated fatigue failure mode of case-hardened gears / I. Boiadjiev, J. Witzig, T. Tobie et al. // Proceedings of the International Gear Conference. – 2014. – P. 26–28.
19. Beermann, S. Tooth Flank Fracture—A Critical Failure Mode Influence of Macro and Micro Geometry / S. Beermann, U. Kissling // Proceedings of the KISSsoft User Conference. – 2015. – P. 25–26.
20. He, H. Study on the gear fatigue behavior considering the effect of residual stress based on the continuum damage approach / H. He, H. Liu, C. Zhu et al. // Eng. Fail. Anal. – 2019. – 104. – P. 531–544.

21. Короткин, В.И. Зубчатые передачи Новикова. Достижения и развитие / В.И. Короткин, Н.П. Онишков, Ю.Д. Харитонов. – М.: Изд-во «Машиностроение-1», 2007. – 384 с.
22. Лебедев, С.Ю. Анализ методик расчета глубинной контактной выносливости / С.Ю. Лебедев // Омский научный вестник. – 2022. – № 2 (182). DOI: 10.25206/1813-225-2022-182.
23. Редукторы энергетических машин: справочник. Под ред. Ю.Л. Державца. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1985. – 232 с.
24. Baydu, C. Comparison of Tooth Interior Fatigue Fracture Load Capacity to Standardized Gear Failure Modes / C. Baydu, R. Patel, P. Langlois // Gear solutions. – 2017. – P. 47–57.
25. Thomas, J. Flankentragfähigkeit und Laufverhalten von hartfeinbearbeiteten Kegelrädern. PhD Thesis, Technical University of Munich. Germany. – 1997.
26. Tobe, T. Bending strength of carburized C42OH spur gear teeth / T. Tobe, M. Kato, K. Inoe et al. // JSME. – 1986. – P. 273–280.
27. Сызранцев, В.Н. Расчет прочностной надежности изделий на основе методов непараметрической статистики / В.Н. Сызранцев, Я.П. Невелев, С.Л. Голофаст. – Новосибирск: Наука, 2008. – 216 с.
28. Syzrantsev, V.N. An algorithm for determining the parameters of the distribution density function with the application of nonparametric statistics methods / V.N. Syzrantsev, M.D. Antonov // AIP Conference Proceedings: 14<sup>th</sup> International Conference on MRDMS-2020. Ekaterinburg. – 2020. – P. 40–42. DOI: 10.1063/5.0037016
29. Сызранцева, К.В. Расчет прочностной надежности деталей машин при случайном характере внешних нагрузок / К.В. Сызранцева. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2011. – 92 с.

**Лебедев Сергей Юрьевич**, аспирант, кафедра «Транспортные и технологические системы», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, lebedevsergey1995@gmail.com

**Сызранцев Владимир Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, syzrantsevvn@tyuiu.ru

*Поступила в редакцию 2 апреля 2022 г.*

---

DOI: 10.14529/engin220202

## PROBABILITY OF NO-FAILURE OPERATION OF CYLINDRICAL GEARS: TOOTH INTERIOR FATIGUE FRACTURE

**S.Yu. Lebedev**, lebedevsergey1995@gmail.com

**V.N. Syzrantsev**, syzrantsevvn@tyuiu.ru

*Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation*

The reliability of a technical system is determined by its storageability, maintainability, durability and reliability. Probability of failure-free operation, as a quantitative assessment of failure-free operation, is an important parameter of gear reliability. The calculation of the probability of failure-free operation is carried out according to various criteria – possible types of gear failure. For case-hardened spur gears, such failures are: gear tooth failure (bending fatigue), pitting (rolling-contact fatigue), deep fatigue failure (tooth interior fatigue fracture). The purpose of the article is to develop a methodology for calculating the probability of failure-free operation of case-hardened cylindrical gears according to the tooth interior fatigue fracture. The object of research is case-hardened spur and helical gears. The article analyzes the existing methods for assessing the reliability of cylindrical gears according to the tooth interior fatigue fracture. An algorithm is developed and calculation formulas are presented for determining the probability of failure-free operation of a spur gear according to the tooth interior fatigue fracture. To determine the

acting stresses inside the tooth body, formulas are used based on the generalized Lebedev-Pisarenko limit state criterion for a structurally inhomogeneous material. To determine the contact stress distribution density function, the methodology implements nonparametric statistics tools. The implementation of the developed methodology and comparison of the calculation results with the values of the probability of failure-free operation of the calculated gear according to the criteria of rolling-contact fatigue and bending endurance showed that with an increase in the maximum torque, the limiting criterion for the failure-free transmission becomes tooth interior fatigue fracture. The developed technique can serve as a part of the methodology for the verification calculation of spur gears based on numerical simulation methods.

Keywords: probability of no-failure operation, tooth interior fatigue fracture (TIFF), spur gear

### References

1. Golofast S.L. *Diagnostika rabotosposobnosti peredach Novikova datchikami deformatsii integral'nogo tipa* [Diagnosis of the performance of Novikov gears with integral type strain gauges]. Novosibirsk: Nauka (in Russ.).
2. GOST 21354-87 (1988). *Cylindrical evolvent gears of external engagement. Strength calculation*. Moscow: Izd-vo standartov (in Russ.).
3. Drozd M.S., Tesker E.I., Sharov M.A. *Glubinnye kontaktnye razrusheniya zub'ev tsementovannykh shesteren* [Deep contact destruction of the teeth of hardened gears]. *Vestnik mashinostroeniya* [Bulletin of mechanical engineering], no. 10. pp. 21–25 (in Russ.).
4. Rudenko S.P., Val'ko A.L. (2015). *Osobennosti rascheta zubchatykh koles transmissiy na glubinnuyu kontaktnuyu vynoslivost'* [Features of the calculation of transmission gears for tooth interior fatigue fracture]. *Vestnik mashinostroeniya* [Bulletin of mechanical engineering], no. 11. pp. 5–11 (in Russ.).
5. MackAldener M., Olsson M. (2001). *Tooth Interior Fatigue Fracture – computational and material aspects*. *International Journal of Fatigue*, no. 23, pp. 329–340.
6. Findley W.N. *A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending*. *Engineering for Industry*.
7. Dang Van K., Griveau B., Message O. *On a new multiaxial fatigue limit criterion: Theory and application*. *Biaxial and Multiaxial Fatigue, EGF 3*. University of Sheffield: London, UK. pp. 459–478.
8. Baydu C., Rupesh P., Langlois P. *Comparison of Tooth Interior Fatigue Fracture Load Capacity to Standardized Gear Failure Modes*. *Gear solutions*, pp. 47–57.
9. Karolczuk A., Macha E. *A Review of Critical Plane Orientations in Multiaxial Fatigue Failure Criteria of Metallic Materials*. *Int. J. Fract.* no. 134, pp. 267–304.
10. Wang W., Liu H., Zhu C., Tang J., Jiang Ch. (2020). *Evaluation of contact fatigue risk of a carburized gear considering gradients of mechanical properties*. *Friction* 8(6), pp. 1039–1050. <https://doi.org/10.1007/s40544-019-0317-z>
11. Houyi B., Caichao Z., Ye Zh., Xiaojin Ch., Houbin F., Wei Ye. (2020). *Study on Tooth Interior Fatigue Fracture Failure of Wind Turbine Gears*. *Metals*, no. 10, 1497. pp. 1–18. doi:10.3390/met10111497
12. Korotkin V.I., Onishkov N.P. *Vestnik mashinostroeniya* [Bulletin of mechanical engineering], no. 5, pp. 9–14 (in Russ.).
13. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. *Deformirovanie i prochnost' materialov pri sloznom napryazhenom sostoyanii* [Deformation and strength of materials under complex stress state]. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR: Institute of Strength Problems. Kiev: Naukova dumka.
14. Xie L., Palmer D., Otto F., Wang Zh., Wang Q. *Effect of Surface Hardening Technique and Case Depth on Rolling Contact Fatigue Behavior of Alloy Steels*. *Tribology Transactions*, no. 58, pp. 215–224.
15. Wang Z.J., Jin X.Q., Zhou Q.H., Ai X.L., Keer L. M., and Wang Q. *An Efficient Numerical Method with a Parallel Computational Strategy for Solving Arbitrarily Shaped Inclusions in Elasto-Plastic Contact Problems*. *Journal of Tribology*. no. 135(3), pp. 031–401.
16. Fudzita K., Iosida A. *Vliyanie glubiny tsementovannogo sloya i odnositel'nogo radiusa krivizny na dolgovechnost' pri kontaktnoy ustalosti tsementovannogo roluka iz khromomolibdenovoy stali* [In-

## Расчет и конструирование

---

fluence of carburized layer depth and relative radius of curvature on durability under contact fatigue of carburized chromium molybdenum steel roller] // *Konstruirovaniye i tekhnologiya mashinostroeniya* [Design and technology of mechanical engineering]. no. 2, pp. 115–124 (in Russ.).

17. Xiao-gang L., Qing G., Eryu S. Initiation and propagation of case crushing cracks in rolling contact fatigue. *Wear*. no. 1, pp. 33–43.

18. Boiadjiev I., Witzig J., Tobie T. Stahl K. Tooth flank fracture—basic principles and calculation model for a sub-surface-initiated fatigue failure mode of case-hardened gears. *Proceedings of the International Gear Conference*, pp. 26–28.

19. Beermann S., Kissling U. Tooth Flank Fracture—A Critical Failure Mode Influence of Macro and Micro Geometry. *Proceedings of the KISSsoft User Conference*, pp. 25–26.

20. He, H.; Liu, H.; Zhu, C.; Tang, J. (2019) Study on the gear fatigue behavior considering the effect of residual stress based on the continuum damage approach. *Eng. Fail. Anal.*, no. 104, pp. 531–544.

21. Korotkin V.I., Onishkov N.P., Kharitonov Yu.D. *Zubchatye peredachi Novikova. Dostizheniya i razvitiye* [Novikov Gears. Achievements and development]. Moscow: Mashinostroenie-1 (in Russ.).

22. Lebedev S.Yu. *Analiz metodik rascheta glubinnoy kontaktной выносливости* [Analysis of methods for tooth interior fatigue fracture]. *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omsk Scientific Bulletin]. no. 2 (182). DOI: 10.25206/1813-225-2022-182. (in Russ.).

23. *Reduktory energeticheskikh mashin: spravochnik*. [Gearboxes of power machines: a reference book.] Ed. Yu. L. Derzhavtsa. St. Petersburg: Mashinostroenie. (in Russ.).

24. Baydu C., Patel R., Langlois P. Comparison of Tooth Interior Fatigue Fracture Load Capacity to Standardized Gear Failure Modes. *Gear solutions*. pp. 47–57.

25. Thomas J. *Flankentragfähigkeit und Laufverhalten von hartfeinbearbeiteten Kegelrädern*. PhD Thesis, Technical University of Munich, Germany.

26. Tobe T., Kato M., Inoe K., Takatsu N., Morita I. Bending strength of carburized C42OH spur gear teeth. *JSME*. pp. 273–280.

27. Syzrantsev V.N., Nevelev Ya.P., Golofast S.L. (2008). *Raschet prochnostnoy nadezhnosti izdeliy na osnove metodov neparametricheskoy statistiki* [Calculation of the strength reliability of products based on non-parametric statistics methods]. Novosibirsk: Nauka (in Russ.).

28. Syzrantsev V.N., Antonov M.D. An algorithm for determining the parameters of the distribution density function with the application of nonparametric statistics methods. *AIP Conference Proceedings: 14<sup>th</sup> International Conference on MRDMS-2020*. Ekaterinburg. pp. 40–42. DOI: 10.1063/5.0037016

29. Syzrantseva K.V. *Raschet prochnostnoy nadezhnosti detaley mashin pri sluchaynom kharaktere vneshnikh nagruzok* [Calculation of strength reliability of machine parts under random nature of external loads]. Tyumen: UIT.

Received 2 April 2022

---

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Лебедев, С.Ю. Вероятность безотказной работы зубчатых цилиндрических передач: глубинная контактная выносливость / С.Ю. Лебедев, В.Н. Сызранцев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2022. – Т. 22, № 2. – С. 20–32. DOI: 10.14529/engin220202

### FOR CITATION

Lebedev S.Yu., Syzrantsev V.N. Probability of no-failure operation of cylindrical gears: tooth interior fatigue fracture. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 20–32. (in Russ.) DOI: 10.14529/engin220202